R 50.1991 F2557

ACADEMIA ROMÂNĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1—2

TOMUL 50

ianuarie — aprilie

1991

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor șef*

Membri :

Acad. ȘTEFAN BĂLAN
Acad. CAIUS IACOB
Acad. DAN MATEESCU
Acad. RADU VOINEA
Acad. GHEORGHE BUZDUGAN
Acad. NICOLAE PATRAULEA
Prof. RADU C. BOGDAN
Prof. VIRGILIU N. CONSTANTINESCU
Prof. NICOLAE CRISTESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Prof. LAZĂR DRAGOȘ
Prof. CONSTANTIN IAMANDI
Prof. DUMITRU MANGERON
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. CRISTIAN PELECUDI
Dr. ing. MIRCEA RĂDEȘ
Prof. GHEORGHE SILAȘ
Dr. doc. VIOREL VISARION

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacție*

COLEGIUL DE REDACȚIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor șef*

Membri :

Acad. ȘTEFAN BĂLAN
Acad. DAN MATEESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacție*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei Române se vor adresa la : ROMPRESFILATELIA, sectorul export-import presă, P.O. Box 12—201, telex : 10376 prsfi r, Calea Griviței nr. 64—66, 78104 București, România ; în țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență se trimit pe adresa Colegiului de redacție al revistei, 79717 București 22, Calea Victoriei nr. 125.

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
79717 București 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 50, nr. 1—2 **ianuarie—aprilie 1991**

SUMAR

STUDII

ŞT. STAICU, Model tensorial în mecanica sistemelor 3
PAULA-MANUELA TRANDAFIR, Studiul asimptotic al unei probleme de perturbaţii singulare 13
D. HOMENTCOVSCHI şi L. JUDE, Asupra reţelelor circulare de profile 19
I. ŢĂPOSU, Determinarea răspunsului avionului la comenzi în manevre neliniare arbitrare cu variaţii mici de altitudine şi viteză 25
P. BRATU, Stabilirea ecuaţiilor de mişcare pentru rigidul cu legături elastice. Vibraţii libere 53
I. PĂRĂUŞANU, Predicţia efectului modificărilor structurale prin analiză modală . . . 67
GH. I. ENE şi GH. IORDACHE, Determinarea puterii necesare acţionării morilor pendulare 83
V. HANDRA-LUCA şi T.L. TIUCĂ, Studiul geometric al angrenajului melcat globoidal 89

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

D. D. CIOCLOV, Concepte probabiliste în mecanica ruperii materialelor 101
GH. BUZDUGAN, Dinamica sistemului maşină-fundaţie-sol: o trecere în revistă a stadiului actual al problemei 115

RECENZII 151

BME KOZPONTI KONYVTARA
2157
FOLYOIRAT OSZTALY

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heldelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

BUDAPESTI MUSZAKI EGYETEM
KOZPONTI KONYVTARA
1846

MODEL TENSORIAL ÎN MECANICA SISTEMELOR

ȘT. STAICU

Institutul Politehnic București

Lucrarea studiază mișcarea unui sistem spațial de rigide rezemat fără frecare pe mai multe curbe sau suprafețe, prin metoda grafului echivalent. Utilizînd principiul deplasărilor virtuale se stabilesc relații de echilibru dinamic sub forma matriceală care conduc la determinarea legilor de mișcare.

1. INTRODUCERE

În lucrare se stabilesc, sub forma matriceală, ecuațiile diferențiale ale mișcării unui sistem spațial de rigide supus la legături perfecte, aplicînd metoda grafului echivalent.

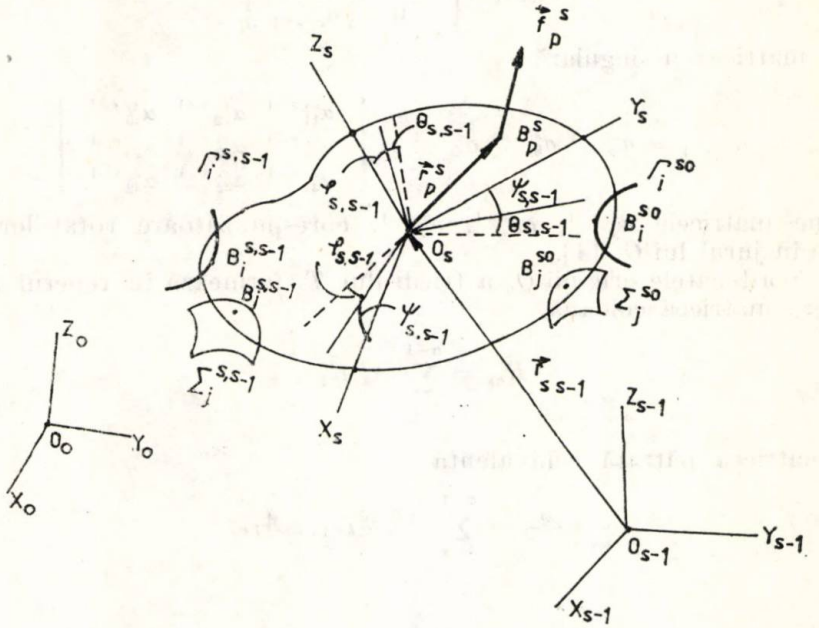


Fig. 1

Să considerăm un referențial fix $O_0x_0y_0z_0$ (T_0) în raport cu care se deplasează, sub acțiunea forțelor exterioare $\vec{f}_p^s$, sistemul de corpuri T_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ solidare cu triedrele $O_sx_sy_sz_s$ (fig. 1). Sistemul are forma

unui lanț cinematic închis, în care ultimul element T_n este legat de primul element component T_1.

Poziția rigidului T_s față de reperul T_{s-1} este precizată de coordonatele relative $x_{s,\,s-1}$, $y_{s,\,s-1}$, $z_{s,\,s-1}$ ale originii O_s și de unghiurile relative ale lui Euler $\psi_{s,\,s-1}$, $\theta_{s,\,s-1}$, $\varphi_{s,\,s-1}$ formate de axele O_sx_s, O_sy_s, O_sz_s cu $O_{s-1}x_{s-1}, O_{s-1}y_{s-1}, O_{s-1}z_{s-1}$. Acești parametri determină vectorii polari $\vec{r}_{s,\,s-1}$ și vectorii axiali $\vec{\lambda}_{s,\,s-1}$ [2] prin matricele

$$\vec{r}_{s,\,s-1}=\begin{bmatrix} x_{s,\,s-1} \\ y_{s,\,s-1} \\ z_{s,\,s-1} \end{bmatrix}, \qquad \vec{\lambda}_{s,\,s-1}=\begin{bmatrix} \psi_{s,\,s-1} \\ \theta_{s,\,s-1} \\ \varphi_{s,\,s-1} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

care pot constitui blocurile matricelor coloane

$$\vec{R}_{s,\,s-1}=\begin{bmatrix} \vec{r}_{s,\,s-1} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix}, \qquad \Lambda_{s,\,s-1}=\begin{bmatrix} 0 \\ \hline \vec{\lambda}_{s,\,s-1} \end{bmatrix} (s=1,2,\ldots,n). \tag{2}$$

Matricea ortogonală $A_{s,\,s-1}$ de trecere din reperul T_{s-1} în sistemul alăturat T_s este

$$A_{s,\,s-1}=\left[\begin{array}{c|c} a_{s,\,s-1} & 0 \\ \hline 0 & a_{s,\,s-1} \end{array}\right] \tag{3}$$

unde matricea nesingulară

$$a_{s,\,s-1}=a_{\varphi}^{s,\,s-1}\,a_{\theta}^{s,\,s-1}\,a_{\psi}^{s,\,s-1}=\begin{bmatrix} \alpha_{11}^{s,\,s-1} & \alpha_{12}^{s,\,s-1} & \alpha_{13}^{s,\,s-1} \\ \alpha_{21}^{s,\,s-1} & \alpha_{22}^{s,\,s-1} & \alpha_{23}^{s,\,s-1} \\ \alpha_{31}^{s,\,s-1} & \alpha_{32}^{s,\,s-1} & \alpha_{32}^{s,\,s-1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

conține matricele $a_{\psi}^{s,\,s-1}$, $a_{\theta}^{s,\,s-1}$, $a_{\varphi}^{s,\,s-1}$, corespunzătoare rotațiilor succesive în jurul lui O_s [4].

Coordonatele originii O_σ a triedrului T_σ formează în reperul mobil $O_sx_sy_sz_s$, matricea coloană

$$\vec{R}_{\sigma s}=\sum_{k=s}^{\sigma-1} A_{ks}^{T}\vec{R}_{k+1,\,k} \tag{5}$$

sau matricea pătrată echivalentă

$$\mathcal{R}_{\sigma s}=\sum_{k=s}^{\sigma-1} A_{ks}^{T}\,\mathcal{R}_{k+1,\,k}\,A_{ks} \tag{6}$$

unde

$$A_{ks}=\prod_{u=1}^{k-s} A_{k-u+1,\,k-u}, \quad A_{ks}^{T}=\prod_{u=s+1}^{k} A_{u,\,u-1}^{T} \tag{7}$$

Operatorul

$$\mathcal{R}_{k+1,\,k}=\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \tilde{r}_{k+1,\,k} & 0 \end{array}\right] \tag{8}$$

conține matricea antisimetrică

$$\tilde{r}_{k+1,\,k} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{k+1,\,k} & y_{k+1,\,k} \\ z_{k+1,\,k} & 0 & -x_{k+1,\,k} \\ -y_{k+1,\,k} & x_{k+1,\,k} & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

asociată vectorului polar $\vec{r}_{k+1,\,k}$.

Viteza relativă a solidului T_σ în punctul său O_σ, în raport cu referențialul T_{s-1}, este dată de vectorul dual.

$$\vec{V}_{\sigma,\,s-1} = \begin{bmatrix} \vec{v}_{\sigma,\,s-1} \\ \vec{\omega}_{\sigma,\,s-1} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

unde $\vec{v}_{\sigma,\,s-1}$ este viteza originii O_σ, iar $\vec{\omega}_{\sigma,\,s-1}$ este viteza unghiulară în jurul punctului O_σ. Matricea coloană $\vec{V}_{\sigma,\,s-1}$ este exprimată în funcție de vitezele relative $\vec{V}_{k,\,k-1}$ ale rigidelor T_k prin relația fundamentală [1]:

$$\vec{V}_{\sigma,\,s-1} = \sum_{k=s}^{\sigma-1} A_{\sigma k} \{\vec{V}_{k,\,k-1} + \Omega_{k,\,k-1} \sum_{q=k}^{\sigma-1} A_{qk}^T \vec{R}_{q+1,\,q}\} + \vec{V}_{\sigma,\,\sigma-1} \tag{11}$$

unde operatorul antisimetric

$$\Omega_{k,\,k-1} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\omega}_{k,\,k-1} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{\omega}_{k,\,k-1} \end{array}\right] \tag{12}$$

conține matricea antisimetrică a mișcării relative

$$\tilde{\omega}_{k,\,k-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^{k,\,k-1} & \omega_y^{k,\,k-1} \\ \omega_z^{k,\,k-1} & 0 & -\omega_x^{k,\,k-1} \\ -\omega_y^{k,\,k-1} & \omega_x^{k,\,k-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

asociată vectorului axial $\vec{\omega}_{k,\,k-1}$.

Pentru a materializa interacțiunea dintre elementele componente ale sistemului, se face ipoteza că un solid oarecare T_σ este rezemat, pe de o parte, în punctele $B_i^{\sigma 0}$ pe curbele fixe $(\Gamma_i^{\sigma 0})$ și în punctele $B_j^{\sigma 0}$ pe suprafețele fixe $(\Sigma_j^{\sigma 0})$, iar pe de altă parte, în $B_i^{\sigma,\,\sigma-1}$ pe curbele $(\Gamma_i^{\sigma,\,\sigma-1})$ și în $B_j^{\sigma,\,\sigma-1}$ pe suprafețele $(\Sigma_j^{\sigma,\,\sigma-1})$ care aparțin rigidului $T_{\sigma-1}$ solidar cu triedrul mobil $O_{\sigma-1}x_{\sigma-1}y_{\sigma-1}z_{\sigma-1}$.

Fie

$$h_{1i}^{\sigma 0}\ (x_0,\ y_0,\ z_0) = 0$$

$$h_{2i}^{\sigma 0}\ (x_0,\ y_0,\ z_0) = 0 \tag{14}$$

$$\{i = 1,\ 2,\ \ldots,\ l_{\sigma 0};\ l_{\sigma 0} \leqslant E\ (m_{\sigma 0}/2)\}$$

ecuațiile curbelor $(\Gamma_i^{\sigma 0})$,

$$h_j^{\sigma 0}(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad \{j = 1 + 2l_{\sigma 0}, \ldots, m_{\sigma 0};\ m_{\sigma 0} < 6\} \tag{15}$$

ecuațiile suprafețelor $(\Sigma_j^{\sigma 0})$ și

$$h_{1i}^{\sigma,\sigma-1}(x_{\sigma-1}, y_{\sigma-1}, z_{\sigma-1}) = 0$$
$$h_{2i}^{\sigma,\sigma-1}(x_{\sigma-1}, y_{\sigma-1}, z_{\sigma-1}) = 0 \tag{16}$$
$$\{i = 1,2, \ldots, l_{\sigma,\sigma-1};\ l_{\sigma,\sigma-1} \leqslant E(m_{\sigma,\sigma-1}/2)\}$$

ecuațiile curbelor $(\Gamma_i^{\sigma,\sigma-1})$,

$$h_j^{\sigma,\sigma-1}(x_{\sigma-1}, y_{\sigma-1}, z_{\sigma-1}) = 0 \qquad \{j = 1 + 2l_{\sigma,\sigma-1}, \ldots, m_{\sigma,\sigma-1};\ m_{\sigma,\sigma-1} < 6\} \tag{17}$$

ecuațiile suprafețelor $(\Sigma_i^{\sigma,\sigma-1})$ în raport cu $O_{\sigma-1}\, x_{\sigma-1}\, y_{\sigma-1}\, z_{\sigma-1}$. În aceste relații notația $E(m/2)$ reprezintă partea întreagă a numărului $m/2$.

2. REPREZENTAREA SISTEMULUI PRIN GRAFUL ECHIVALENT

Pentru a simplifica studiul mișcării sistemului se construiește graful echivalent, reprezentînd corpurile prin puncte materiale, iar legăturile prin segmente care unesc punctele respective (fig. 2).

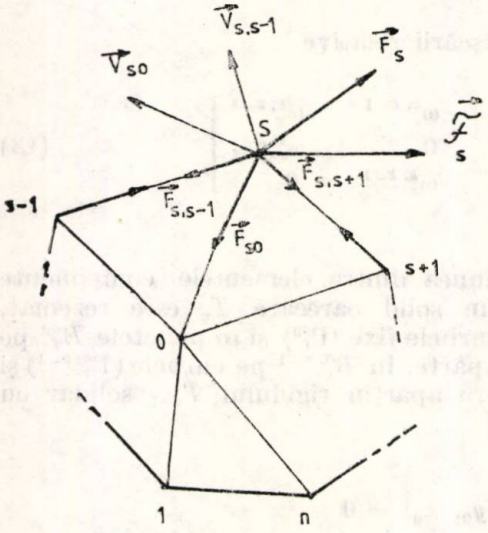


Fig. 2

Coordonatele relative ale punctelor σ din spațiul grafului echivalent sînt $x_{\sigma,\sigma-1}, y_{\sigma,\sigma-1}, z_{\sigma,\sigma-1}, \psi_{\sigma,\sigma-1}, \theta_{\sigma,\sigma-1}, \varphi_{\sigma,\sigma-1}$.

Graful obținut servește la stabilirea mobilității relative a fiecărui subansamblu reprezentat printr-un ciclu. Vom observa că fiecărei raze $\sigma 0$ a grafului îi corespunde o restricție exterioară $m_{\sigma 0}$ egală cu numărul de suprafețe pe care se reazemă punctele $B_i^{\sigma 0}$, $B_j^{\sigma 0}$ și că laturii σ, $\sigma-1$ îi revine o restricție interioară $m_{\sigma,\sigma-1}$ care corespunde numărului de suprafețe pe care sînt situate punctele $B_i^{\sigma,\sigma-1}$, $B_j^{\sigma,\sigma-1}$.

Pornind de la mobilitatea relativă a punctului σ

$$\mu_\sigma = 6 - m_{\sigma,\sigma-1} - m_{\sigma+1,\sigma} - m_{\sigma 0}, \tag{18}$$

rezultă formula mobilității relative a subsistemului format din punctele materiale s, $s+1$, ..., n :

$$\mu_{sn} = 6(n-s+1) - m_{s,s-1} - \sum_{\sigma=s}^{n} (m_{\sigma+1,\sigma} + m_{\sigma 0}) \quad (s = 2,3, \ldots, n) \tag{19}$$

și mobilitatea întregului lanț cinematic

$$\mu_{1n} = 6n - \sum_{\sigma=1}^{n} (m_{\sigma+1,\sigma} + m_{\sigma 0}). \tag{20}$$

Deoarece legăturile sînt presupuse perfecte și rigide, imaginea sistemului mecanic în spațiul grafului asociat corespunde unui sistem de particule legate prin fire inextensibile, astfel încît laturile σ, $\sigma-1$ reprezintă legături interioare, iar razele $\sigma 0$ constituie legături exterioare.

Vitezele duale relative $\vec{V}_{\sigma,s-1}$ vor fi vectori legați de punctele σ din graful echivalent. Vitezele absolute $\vec{V}_{\sigma 0}$ sînt orientate perpendicular pe razele $\sigma 0$, în timp ce vitezele relative $\vec{V}_{\sigma,\sigma-1}$ ale punctelor σ au direcții normale pe laturile σ, $\sigma-1$.

3. METODA DEPLASĂRILOR VIRTUALE

Presupunînd cunoscute forțele exterioare $\vec{f}_p^{\sigma}$, putem stabili unele relații care să permită studiul mișcării sistemului material, dacă condițiile de echilibru dinamic vor fi exprimate prin metoda deplasărilor virtuale.

Se notează cu

$$\vec{U}_p^{\sigma} = \begin{bmatrix} \vec{u}_p^{\sigma} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix} = [\alpha_p^{\sigma} \ \beta_p^{\sigma} \ \gamma_p^{\sigma} \ 0 \ 0 \ 0]^T \tag{21}$$

versorul direcției forței exterioare $\vec{f}_p^{\sigma}$ și cu

$$\vec{R}_p^{\sigma} = \begin{bmatrix} \vec{r}_p^{\sigma} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix} = [x_p^{\sigma} \ y_p^{\sigma} \ z_p^{\sigma} \ 0 \ 0 \ 0]^T \tag{22}$$

vectorul de poziție al punctului său de aplicație B_p^{σ}.

Torsorul forțelor exterioare aplicate rigidului T_{σ}, calculat în originea O_{σ} este dat de vectorul dual

$$\vec{F}_{\sigma} = \sum_{p=1}^{l_{\sigma}} f_p^{\sigma} R_p^{\sigma} \vec{U}_p^{\sigma}, \tag{23}$$

unde operatorul

$$R_p^{\sigma} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{e} & 0 \\ \hline \tilde{r}_p^{\sigma} & 0 \end{array}\right] \tag{24}$$

conține matricea diagonală unitate $\hat{e}$ și matricea antisimetrică $\tilde{r}_p^{\sigma}$.

Vectorii $\vec{F}_\sigma$ vor fi aplicați în punctele σ ale grafului echivalent sub forma unor forțe duale.

În continuare se determină torsorul forțelor de inerție, aplicate pe solidul T_σ, față de același punct O_σ. Vectorii componenți ai torsorului pot fi exprimați sub forma unitară a unui vector dual [1];

$$\vec{\mathcal{F}}_\sigma = -M_\sigma \dot{\vec{V}}_{\sigma 0} - M_\sigma \Omega_{\sigma 0} \vec{V}_{\sigma 0} - \Omega_{\sigma 0} M_\sigma \vec{\Omega}_{\sigma 0}, \tag{25}$$

unde

$$M_\sigma = \begin{bmatrix} \hat{m}_\sigma & \hat{m}_\sigma \tilde{r}_C^{\sigma T} \\ \hat{m} \tilde{r}_C^\sigma & \hat{J}_\sigma \end{bmatrix} \tag{26}$$

este matricea generală de inerție a rigidului considerat, relativ la axele $O_\sigma x_\sigma$, $O_\sigma y_\sigma$, $O_\sigma z_\sigma$, exprimată în funcție de matricea masei

$$\hat{m}_\sigma = \begin{bmatrix} m_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & m_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & m_\sigma \end{bmatrix}, \tag{27}$$

matricea antisimetrică a momentului static $\hat{m}_\sigma \tilde{r}_C^\sigma$ și de matricea simetrică a tensorului de inerție

$$\hat{J}_\sigma = \begin{bmatrix} J_x^\sigma & -J_{xy}^\sigma & -J_{xz}^\sigma \\ -J_{yx}^\sigma & J_y^\sigma & -J_{yz}^\sigma \\ -J_{zx}^\sigma & -J_{zy}^\sigma & J_z^\sigma \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Viteza dual absolută $\vec{V}_{\sigma 0}$ se deduce ușor din (11) pentru $s = 1$, iar matricea antisimetrică $\Omega_{\sigma 0}$ și viteza unghiulară absolută $\vec{\Omega}_{\sigma 0}$ au următoarele expresii [1]:

$$\begin{aligned} \Omega_{\sigma 0} &= \sum_{k=1}^{\sigma} A_{\sigma k} \Omega_{k,\,k-1} A_{\sigma k}^T \\ \vec{\Omega}_{\sigma 0} &= \sum_{k=1}^{\sigma} A_{\sigma k} \vec{\Omega}_{k,\,k-1}. \end{aligned} \tag{29}$$

Forțele duale de inerție $\vec{\mathcal{F}}_\sigma$ aplicate asupra punctelor σ din graful echivalent capătă expresii reduse dacă originile O_σ coincid cu centrele de masă ale rigidelor:

$$\vec{\mathcal{F}}_\sigma = -M_\sigma \dot{\vec{V}}_{\sigma 0} - \Omega_{\sigma 0} M_\sigma \vec{V}_{\sigma 0}. \tag{30}$$

Expresia obținută corespunde în graful asociat unei forțe de inerție aplicată particulei σ de masă M_σ având viteza absolută $\vec{V}_{\sigma 0}$ și impulsul cinetic dual $M_\sigma \vec{V}_{\sigma 0}$.

Vom presupune, mai departe, că sistemul material realizează o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, în timpul căreia coordonatele

relative ale punctului reprezentativ σ din graful echivalent capătă variații virtuale. Viteza virtuală a rigidului T_σ în punctul său O_σ în raport cu triedrul T_{s-1}, realizată în deplasarea virtuală a subsistemului T_s, T_{s-1}, ..., T_n este exprimată de vectorul dual

$$\vec{V}_{\sigma,\, s-1} = \begin{bmatrix} \vec{v}_{\sigma,\, s-1} \\ \vec{\omega}_{\sigma,\, s-1} \end{bmatrix}, \tag{31}$$

a cărui expresie este asemănătoare cu cea dată de relația (11).

Aplicînd metoda deplasărilor virtuale, condiția de echilibru dinamic a sistemului de corpuri este ca puterea virtuală a tuturor forțelor exterioare $\vec{f}_p^{\,\sigma}$ ($p = 1,2, \ldots, t$), aplicate în punctele B_p^σ ale rigidelor T_σ și a forțelor de inerție, corespunzătoare unei deplasări virtuale subsistemului T_s, T_{s+1}, ..., T_n, compatibilă cu legăturile exterioare și interioare, să fie egală cu zero.

Se observă că puterea virtuală care apare în condiția de echilibru dinamic corespunde unei deplasări virtuale a subsistemului de puncte materiale s, $s+1$, ..., n în jurul polului fix 0, sub acțiunea forțelor duale reale $\vec{F}_s$, $\vec{F}_{s+1}$, ..., $\vec{F}_n$ și a forțelor duale de inerție $\overrightarrow{\mathcal{F}}_s$, $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{s+1}$, ..., $\overrightarrow{\mathcal{F}}_n$, care se efectuează cu vitezele virtuale duale $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{s,\, s-1}$, $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{s+1,\, s-1}$, ..., $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{n,\, s-1}$ astfel ca lungimile razelor și laturilor grafului să rămînă constante. Condiția enunțată se exprimă prin relația generală

$$\sum_{\sigma=s}^{n} \overrightarrow{\mathcal{F}}^{\,T}_{\sigma,\, s-1} \{\vec{F}_\sigma + \overrightarrow{\mathcal{F}}_\sigma\} = 0 \quad (s = 1,2, \ldots, n). \tag{32}$$

Ecuațiile (32) pot fi aplicate pentru echilibrul dinamic al subsistemului de puncte materiale $s+1$, $s+2$, ..., n sub forma

$$\sum_{\sigma=s+1}^{n} \overrightarrow{\mathcal{V}}^{\,T}_{\sigma s} \{\vec{F}_\sigma + \overrightarrow{\mathcal{F}}_\sigma\} = 0, \tag{33}$$

în care vom introduce viteza virtuală duală $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\sigma s}$, pornind de la relația

$$\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\sigma,\, s-1} = \overrightarrow{\mathcal{V}}_{\sigma s} + A_{\sigma s} \{\overrightarrow{\mathcal{V}}_{s,\, s-1} + \Omega_{s,\, s-1} \vec{R}_{\sigma s}\}. \tag{34}$$

Dezvoltînd calculele se obține o nouă formă a ecuațiilor de mișcare pentru sistemul de corpuri

$$\overrightarrow{\mathcal{V}}^{\,T}_{s,\, s-1} \sum_{\sigma=s}^{n} A^T_{\sigma s} \{\vec{F}_\sigma + \overrightarrow{\mathcal{F}}_\sigma\} +$$

$$+ \vec{\Omega}^{\,T}_{s,\, s-1} \sum_{\sigma=s+1}^{n} R_{\sigma s} A^T_{\sigma s} \{\vec{F}_\sigma + \overrightarrow{\mathcal{F}}_\sigma\} = 0 \quad (s = 1,2, \ldots, n). \tag{35}$$

Vitezele virtuale absolute şi relative ale punctelor $B_i^{\sigma 0}$, $B_j^{\sigma 0}$, $B_i^{\sigma,\sigma-1}$ şi $B_j^{\sigma,\sigma-1}$ sînt supuse la următoarele condiţii cinematice de legătură

$$\begin{gathered}
\vec{\mathcal{V}}_{\sigma 0}^{T} R_i^{\sigma 0} A_{\sigma 0} \vec{G}_{1i}^{\sigma 0} = 0 \\
\vec{\mathcal{V}}_{\sigma 0}^{T} R_i^{\sigma 0} A_{\sigma 0} \vec{G}_{2i}^{\sigma 0} = 0 \qquad (i = 1,2, \ldots, l_{\sigma 0}) \\
\vec{\mathcal{V}}_{\sigma 0}^{T} R_j^{\sigma 0} A_{\sigma 0} \vec{G}_j^{\sigma 0} = 0 \ (j = 1 + 2l_{\sigma 0}, \ldots, m_{\sigma 0}) \\
\vec{\mathcal{V}}_{\sigma,\sigma-1}^{T} R_i^{\sigma,\sigma-1} A_{\sigma,\sigma-1} \vec{G}_{1i}^{\sigma,\sigma-1} = 0 \\
\vec{\mathcal{V}}_{\sigma,\sigma-1}^{T} R_i^{\sigma,\sigma-1} A_{\sigma,\sigma-1} \vec{G}_{2i}^{\sigma,\sigma-1} = 0 \ (i = 1,2, \ldots, l_{\sigma,\sigma-1}) \\
\vec{\mathcal{V}}_{\sigma,\sigma-1}^{T} R_j^{\sigma,\sigma-1} A_{\sigma,\sigma-1} \vec{G}_j^{\sigma,\sigma-1} = 0 \ (j = 1 + 2l_{\sigma,\sigma-1}, \ldots, m_{\sigma,\sigma-1})
\end{gathered} \tag{36}$$

unde matricele

$$\begin{gathered}
\vec{G}_{1i}^{\sigma 0} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} h_{1i}^{\sigma 0} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix}, \vec{G}_{2i}^{\sigma 0} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} h_{2i}^{\sigma 0} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix}, \vec{G}_j^{\sigma 0} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} h_j^{\sigma 0} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix} \\
\vec{G}_{1i}^{\sigma,\sigma-1} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} h_{1i}^{\sigma,\sigma-1} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix}, \vec{G}_{2i}^{\sigma,\sigma-1} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} h_{2i}^{\sigma,\sigma-1} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix}, \vec{G}_j^{\sigma,\sigma-1} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} h_j^{\sigma,\sigma-1} \\ \hline \vec{0} \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{37}$$

conţin vectorii gradienţi.

Legăturile sistemului T_s, T_{s+1}, ..., T_n permit deplasări virtuale dacă este îndeplinită condiţia

$$\mu_{sn} \geqslant 1. \tag{38}$$

În acest caz sistemul (36) va conţine μ_{sn} viteze virtuale independente $v_x^{\sigma,\sigma-1}$, $v_y^{\sigma,\sigma-1}$, $v_z^{\sigma,\sigma-1}$, $\omega_x^{\sigma,\sigma-1}$, $\omega_y^{\sigma,\sigma-1}$, $\omega_z^{\sigma,\sigma-1}$, $\sigma \in [s,n]$, în funcţie de care se poate exprima uşor restul

$$\mu_{sn}^{*} = m_{s,s-1} + \sum_{\sigma=s}^{n} (m_{\sigma+1,\sigma} + m_{\sigma 0}) \tag{39}$$

de viteze virtuale. Introducînd aceste expresii în (35) rezultă un sistem de μ_{sn} ecuaţii.

Un alt grup de relaţii se deduc din condiţiile impuse punctelor de contact de a rămîne pe curbele şi suprafeţele de legătură, adică

$$\begin{gathered}
\vec{R}_i^0 - A_{\sigma 0}^T \vec{R}_i^{\sigma 0} = \sum_{k=0}^{n} A_{k0}^T \vec{R}_{k+1,k} \\
\vec{R}_{j\sigma} - A_{\sigma 0}^T \vec{R}_j^{\sigma 0} = \sum_{k=0}^{\sigma=1} A_{k0}^T \vec{R}_{k+1,k} \\
\vec{R}_{i\sigma}^{\sigma-1} - A_{\sigma,\sigma-1}^T \vec{R}_i^{\sigma,\sigma-1} = \vec{R}_{\sigma,\sigma-1} \\
\vec{R}_{j\sigma}^{\sigma-1} - A_{\sigma,\sigma-1}^T \vec{R}_j^{\sigma,\sigma-1} = \vec{R}_{\sigma,\sigma-1}.
\end{gathered} \tag{40}$$

Deci, relaţiile (40) formează cu (14), (15), (16), (17) şi (35) un număr

$$\nu = 6\,(n - s + 1) + 2\left\{m_{s,\,s-1} + \sum_{\sigma=s}^{n}\,(m_{\sigma+1,\,\sigma} + m_{\sigma 0})\right\} \tag{41}$$

de ecuaţii diferenţiale din care rezultă coordonatele $x_{\sigma,\,\sigma-1}$, $y_{\sigma,\,\sigma-1}$, $z_{\sigma,\,\sigma-1}$, $\psi_{\sigma,\,\sigma-1}$, $\theta_{\sigma,\,\sigma-1}$ şi $\varphi_{\sigma,\,\sigma-1}$.

Primit în redacţie la 12 mai 1989

BIBLIOGRAFIE

1. ŞT. STAICU, *Aplicaţii ale calculului matriceal în mecanica solidelor*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1986.
2. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUŞU, *Mecanica*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.
3. C. IACOB, *Mecanica teoretică*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.
4. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicaţie în inginerie*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1978.
5. GH. SILAŞ, I. GROŞANU, *Mecanica*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.
6. M.M. NIŢĂ, *Curs de mecanică teoretică*, Academia Militară, Bucureşti, 1972.
7. M. ATANASIU, *Mecanica*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973.
8. R. VOINEA, M. ATANASIU, *Metode analitice noi în teoria mecanismelor*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1964.

STUDIUL ASIMPTOTIC AL UNEI PROBLEME DE PERTURBAȚII SINGULARE

PAULA-MANUELA TRANDAFIR
Institutul Politehnic București

Aplicînd metoda dezvoltărilor asimptotice exterioare și interioare unei probleme care guvernează oscilațiile unei mase mici, autoarea găsește problemele de primă și de a doua aproximație. Se regăsesc rezultate obținute de alți autori printr-o metodă mai complicată.

Vom studia comportamentul asimptotic al soluției unei probleme Cauchy pentru o ecuație diferențială ordinară de ordin II, liniară și neomogenă din teoria micilor oscilații forțate ale unui punct material foarte ușor cu ajutorul metodei dezvoltărilor asimptotice interioare și exterioare racordate și al metodei de scară dublă.
Se consideră problema Cauchy

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \alpha(t)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \beta(t)u = f(t), & t \in [0,\ 1] \\ u(0,\ \varepsilon) = a, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0,\ \varepsilon) = b + \dfrac{c}{\varepsilon} \end{cases} \tag{1}$$

unde $\varepsilon > 0$ este parametrul mic, a, b, c constante, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(t)$ funcții (de variabila t) reale, mărginite, suficient de netede. În plus, se presupune că α, β, $f = o(1)$ pentru $\varepsilon \to 0$ și că există δ astfel încît $\alpha(t) \geqslant \delta > 0$, $(\forall)$ $t \in [0, 1]$.

Vom aminti (fără demonstrație) următoarea

Lemă. Fie problema

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} + \alpha(t)\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \beta(t)R = f(t), & t \in [0,1] \\ R(0) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}(0) = \dfrac{c}{\varepsilon}, \text{ unde } \varepsilon > 0. \end{cases} \tag{1'}$$

Dacă $\alpha(t) \geqslant \delta > 0$, $(\forall)$ $t \in [0, 1]$, α, β, f sînt funcții mărginite și c este o constantă, atunci (2) are soluție unică și mărginită pe $[0,\ 1]$.

1. Vom aplica pentru problema (1) metoda dezvoltărilor asimptotice exterioare și interioare [1]. Astfel, cînd $t = 0(1)$ pentru $\varepsilon \to 0$ considerăm dezvoltarea exterioară de forma

$$u(t,\varepsilon) \sim U_0(t) + \varepsilon U_1(t) + \ldots$$

Ecuaţia de aproximaţie asimptotică de ordin 0

$$\alpha(t)\frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}t} + \beta(t)\ U_0 = f(t)$$

are soluţia

$$U_0(t) = A\exp\left\{-\int_0^t \beta(\sigma)\alpha^{-1}(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right\} + \int_0^t f(\sigma)\alpha^{-1}(\sigma)\exp\left\{-\int_\sigma^t \beta(s)\alpha^{-1}(s)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\sigma,$$

unde $A \in \mathbb{R}$ este o constantă încă nedeterminată. Există studii [2] care arată că problema de perturbaţii singulare (1) în care $\alpha(t) > 0$ are un strat limită lîngă $t = 0$. Deoarece dezvoltarea exterioară este valabilă în exteriorul acestui strat, condiţiile iniţiale ale problemei (1) nu trebuie puse pentru dezvoltarea exterioară. Constanta A se va determina din condiţiile de racordare.

Să trecem acum la variabila interioară $\hat{t} = \dfrac{t}{\varepsilon}$ cînd $\hat{t} = 0(1)$ pentru $\varepsilon \to 0$, punînd $\hat{u}(\hat{t}, \varepsilon) = u(\varepsilon\hat{t}, \varepsilon)$. Problema (1) devine

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\hat{u}}{\mathrm{d}t^2} + \alpha(\varepsilon\hat{t})\dfrac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}\hat{t}} + \varepsilon\beta(\varepsilon\hat{t})\hat{u} = \varepsilon f(\varepsilon\hat{t}), \\ \hat{u}(0,\ \varepsilon) = a, \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}\hat{t}}(0,\ \varepsilon) = b + \dfrac{c}{\varepsilon}. \end{cases} \tag{1''}$$

Să alegem dezvoltarea interioară de forma $\hat{u}(\hat{t},\ \varepsilon) \sim \hat{u}_0(\hat{t}) + \hat{u}_1(\hat{t}) + \ldots$ şi să o introducem în (1''), atît în ecuaţie cît şi în condiţiile la limită, făcînd în prealabil presupunerea că

$$\left.\begin{aligned} \alpha(\varepsilon\hat{t}) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\hat{t})\varepsilon^k \\ \beta(\varepsilon\hat{t}) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(\hat{t})\varepsilon^k \end{aligned}\right\} \text{pentru } \varepsilon \to 0$$

Atunci, problema de aproximaţie asimptotică interioară de ordin 0 este

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\hat{u}_0}{\mathrm{d}\hat{t}^2} + \alpha_0(\hat{t})\dfrac{\mathrm{d}\hat{u}_0}{\mathrm{d}t} = 0, \\ \hat{u}_0(0) = a, \\ \dfrac{d\hat{u}_0}{\mathrm{d}\hat{t}}(0) = c, \end{cases}$$

în care $\alpha_0(\hat{t}) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \alpha(\varepsilon t) \equiv \alpha(0)$ cu t fixat.

Soluția acestei probleme este

$$\hat{u}_0(\hat{t}) = c\int_0^{\hat{t}} \exp\left\{-\int_0^{\sigma}\alpha(s)\,ds\right\} d\sigma + a = c[\alpha(0)]^{-1}(1 - \exp(-\alpha(0)\hat{t}) + a.$$

Să aplicăm principiul de racordare 1×1, ceea ce revine la $\lim_{t\to 0} U_0(t) = \lim_{\hat{t}\to\infty} \hat{u}_0(\hat{t}) = \tilde{u}_0$ (primul termen al dezvoltării intermediare).

Se obține $A = \dfrac{c}{\alpha(0)} + a$. Rezultă că dezvoltarea uniform valabilă a soluției, în prima aproximație, este suma dezvoltărilor exterioare și interioare, din care se scade dezvoltarea intermediară ([4], [5])

$$u_0(t) = (a + c/\alpha(0))\exp\left\{-\int_0^t \beta(s)\alpha^{-1}(s)ds + \right.$$

$$+\int_0^t \exp\left\{-\int_\sigma^t \beta(s)\alpha^{-1}(s)\,ds\right\} f(\sigma)\alpha^{-1}(\sigma)\,d\sigma - c\alpha^{-1}(0)\exp\{-\alpha(0)t/\varepsilon\}.$$

2. Să aplicăm acum metoda scărilor multiple. Pentru aceasta să introducem o nouă variabilă de forma $\tau = \dfrac{h(t)}{\varepsilon}$, $t\in[0, 1]$ unde $h(t)$ este o funcție necunoscută, ce urmează a fi determinată, îndeplinind condițiile: a) h suficient de netedă; b) $h(t) = 0(1)$ pentru $t\in[0,1]$ cînd $\varepsilon\to 0$. (Pentru $h(t) = t$ se obține variabila interioară.)

Să căutăm o dezvoltare uniform valabilă de formă

$$u(t, \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, \tau)\varepsilon^n \tag{2}$$

în care t și τ sînt independente, astfel că operatorii de derivare devin

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{h'(t)}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\tau}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2h'(t)}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau} + \frac{h''(t)}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{h'^2(t)}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}. \tag{3}$$

Introducînd dezvoltarea (2) în (1) și anulînd coeficientul lui ε^k pentru $k = -1$ se obține ecuația de aproximație asimptotică de ordin 0

$$h'^2(t)u_{0,\tau\tau} + \alpha(t)h'(t)\,u_{0,\tau} = 0 \tag{4}$$

iar din (2) găsim condițiile inițiale pe care le satisface soluția sa.

$$\begin{cases} u_0(0, 0) = a, \\ h'(0)\dfrac{\partial u_0}{\partial\tau}(0, 0) = c. \end{cases} \tag{4'}$$

Presupunem $h'(t) \neq 0$ $\forall t \in [0, 1]$; atunci $h'(t)$ va avea același semn pe $[0, 1]$. Soluția ecuației (4) este

$$u_0(t, \tau) = A(t) + B(t) \exp\left\{-\frac{\alpha(t)}{h'(t)}\tau\right\}, \tag{5}$$

unde A, B sînt funcții necunoscute, iar din condițiile (4') rezultă

$$\begin{cases} B(O) = -\dfrac{c}{\alpha(0)}, \\ A(0) = a + \dfrac{c}{\alpha(0)}. \end{cases} \tag{6}$$

Pentru $k = 0$ se obține problema de primă aproximație asimptotică

$$h'^2(t)u_{1,\tau\tau} + \alpha(t)h'(t)u_{1,\tau} = -2h'(t)u_{0,t\tau} - h''(t)u_{0,\tau} - \alpha(t)u_{0,\tau} - \beta(t)u_0 + f(t) \tag{7}$$

și condițiile corespunzătoare

$$\begin{cases} u_1(0,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial t}(0, 0) + h'(0)\dfrac{\partial u_1}{\partial \tau}(0, 0) = b. \end{cases} \tag{8}$$

Integrînd (7) de două ori în raport cu τ obținem

$$h'^2(t)u_1 = -[\alpha(t)A'(t) + \beta(t)A(t) - f(t)]\frac{h'(t)}{\alpha(t)}\left[\tau - \frac{h'(t)}{\alpha(t)}\right] -$$

$$-\frac{h'(t)}{\alpha(t)}[2h'(t)A'(t) + h''(t)\ A(t)] - \tau\ \exp\left\{-\frac{\alpha(t)}{h'(t)}\tau\right\} \cdot$$

$$\cdot\left[h'(t)B'(t) + h''(t)B(t) - \frac{h'(t)}{\alpha(t)}\beta(t)B(t) + \frac{h'^2(t)}{\alpha(t)} \cdot \left(\frac{\alpha(t)}{h'(t)}\right)' \cdot \right. \tag{9}$$

$$\left. \cdot\ B(t)\right] + B(t)\frac{\tau^2}{2}\exp\left\{-\frac{\alpha(t)}{h'(t)}\tau\right\} h'(t) \cdot \left(\frac{\alpha(t)}{h'(t)}\right)' +$$

$$+\frac{h'(t)}{\alpha(t)}C(t) + D(t)\ \exp\left\{-\frac{\alpha(t)}{h'(t)}\tau\right\}$$

unde $C(t)$ și $D(t)$ sînt funcții necunoscute. Punînd condiția ca în relația (9) să nu apară termeni seculari [2] obținem o ecuație diferențială de ordin 1 pentru A

$$\alpha(t)\ A'(t) + \beta(t)\ A(t) = f(t) \tag{10}$$

cu soluția

$$A(t) = \left(a + \frac{c}{\alpha(0)}\right) \exp\left\{-\int_0^t \beta(s)\alpha^{-1}(s)\, ds\right\} + \tag{11}$$

$$+ \int_0^t \exp\left\{-\int_\sigma^t \beta(s)\alpha^{-1}(s)\, ds\right\} f(\sigma)\alpha^{-1}(\sigma)\, d\sigma.$$

Pentru ca u_1 să fie mărginită este necesar ca $h'(t) > 0$. Pentru ca raportul între u_1 și u_0 să fie mărginit nu trebuie să existe termeni în τ și τ^2. Anulînd coeficienții acestor termeni se obține :

$$\left(\frac{\alpha(t)}{h'(t)}\right)' = 0 \text{ și } h'(t)B'(t) + h''(t)\ B(t) - \frac{h'(t)}{\alpha(t)}\beta(t)\ B(t) = 0.$$

$$\text{Deci } \frac{\alpha(t)}{h'(t)} = A_0 = \text{const. sau } h(t) = \frac{1}{A_0}\int_0^t \alpha(s)\, ds.$$

Se poate determina acum și funcția necunoscută B folosind $(6)_1$

$$B(t) = -\frac{c}{\alpha(t)} \exp\left\{\int_0^t \beta(s)\alpha^{-1}(s)\, ds\right\}. \tag{12}$$

Pentru a găsi $C(t)$, $D(t)$ se procedează în mod analog.

În prima aproximație soluția este dată de (5) în care se introduc (11) și (12) și ea coincide cu expresia găsită cu ajutorul metodei dezvoltărilor asimptotice exterioare și interioare. Regăsim, astfel, aceeași dezvoltare, valabilă pînă la termeni de ordinul $0\ (\varepsilon^2)$ pentru $\varepsilon \to 0$, ca aceea dată în [3] cu ajutorul unei variante mai complicate a metodei scărilor multiple.

Primit în redacție la 12 februarie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. M. VAN DYKE, *Perturbation Methods in Fluid Nechanies*, Academic Press, New York, 1964.
2. A.H. NAYFEH, *Pertubation Methods*, John Wille & Sons, New York, 1973.
3. D.R. SMITH, *The Multivariable Method in Singular Perturbation Analysis*, SIAM Review, **17**, 2 (1975).
4. J.D. COLE, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell, Waltham, Mass., 1968.
5. ADELINA GEORGESCU, *Aproximații asimptotice*, Edit. tehnică, București, 1989.

ASUPRA REȚELELOR CIRCULARE DE PROFILE

D. HOMENTCOVSCHI și L. JUDE
Institutul Politehnic, București

În această lucrare se dezvoltă o teorie a rețelelor circulare de profile aplicabilă în cazul general al profilelor fără grosime (reduse la scheletul lor) fără a folosi simplificări de tipul celor utilizate în teoriile dezvoltate anterior. Se obțin soluții analitice pentru potențialul complex al mișcării și pentru acțiunea hidrodinamică asupra palelor.

1. Să considerăm o rețea circulară de profile subțiri (fig. 1). Fie n, numărul de profile. Vom utiliza un reper fix Ox_1y_1 și un reper mobil OXY solidar cu profilele.

În cazul general al mișcării cu prerotație, în rețeaua circulară se plasează în origine un izvor și un vîrtej de intensități date Q respectiv Γ.

Mișcarea fluidului incompresibil este plană, potențială.

Vom determina potențialul complex al mișcării $f(z_1,t)$ și acțiunea hidrodinamică asupra palelor.

Notăm $z_1 = x_1 + iy_1$ și $Z = X + iY$

Potențialul complex al mișcării este în acest caz de forma :

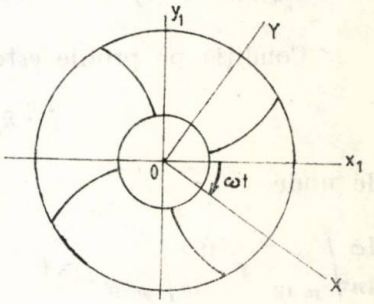


Fig. 1

$$f(z_1, t) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln z_1 + \hat{f}(z_1, t) \tag{1.1}$$

unde $\hat{f}(z_1, t)$ este potențialul perturbației introduse de prezența palelor.

Avînd în vedere relația de trecere de la reperul fix (z_1) la reperul mobil (Z)

$$z_1 = Z \cdot e^{i\omega t} \tag{1.2}$$

obținem expresia potențialului complex în reperul mobil

$$F(Z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln Z + \hat{F}(Z, t) \tag{1.3}$$

Relația dintre vitezele complexe în cele două sisteme

$$w_1(z_1) = \frac{df}{dz_1} = u_1 - iv_1, \quad w(Z) = \frac{dF}{dZ} = u - iv$$

este :

$$w_1 = w \cdot e^{-i\omega t} \tag{1.4}$$

Dacă proiectăm pe sistemul mobil, relaţia vectorială

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_r + \vec{v}_t$$

unde $\vec{v}$ — viteza absolută, $\vec{v}_r$ — viteza relativă, $\vec{v}_t$ — viteza de transport obţinem

$$u_r - \mathrm{i}v_r = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}Z} + \mathrm{i}\omega\bar{Z} \tag{1.5}$$

relaţie pe care o vom utiliza în calculul acţiunii hidrodinamice a fluidului asupra palelor.

Notăm $F(Z) = \varphi + \mathrm{i}\psi$, $\hat{F}(Z) = \hat{\varphi} + \mathrm{i}\hat{\psi}$.

Condiţia pe profile este :

$$\vec{v} \cdot \vec{n}/_{\text{profil}} = \vec{v}_t \cdot \vec{n}/_{\text{profil}}$$

de unde

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n}\bigg/_{\text{profil}} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}\bigg/_{\text{profil}} = (-Y\omega,\ X\omega) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}n}, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}n}\right) = -\frac{\omega}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(X^2 + Y^2)$$

Rezultă

$$\psi/_{\text{profil}} = -\frac{\omega}{2}(X^2 + Y^2) + C \tag{1.6}$$

şi de aici

$$\hat{\psi}/_{\text{profil}} = -\frac{\omega}{2}(X^2 + Y^2) - \operatorname{Im}\left\{\frac{\Gamma + \mathrm{i}Q}{2\pi\mathrm{i}} \ln Z\right\} + C \tag{1.7}$$

Odată determinat potenţialul complex $\hat{F}(Z)$, pentru calculul acţiunii hidrodinamice a fluidelor asupra palelor folosim relaţia lui Bernoulli scrisă pentru viteza relativă :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V_r^2 - \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) = \alpha(t)$$

Luînd saltul obţinem :

$$\left[\!\left[\frac{p}{\rho}\right]\!\right] = -\frac{1}{2}[\![V_r^2]\!] = -\operatorname{Re}\left\{\left(\frac{\Gamma + \mathrm{i}Q}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{Z} + \mathrm{i}\omega\bar{Z}\right)\left[\!\left[\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}Z}\right]\!\right]\right\} \tag{1.8}$$

Considerăm transformarea

$$z = Z^n \tag{1.9}$$

sistemului de profile din planul Z îi va corespunde un singur profil în planul (z), (fig. 2).

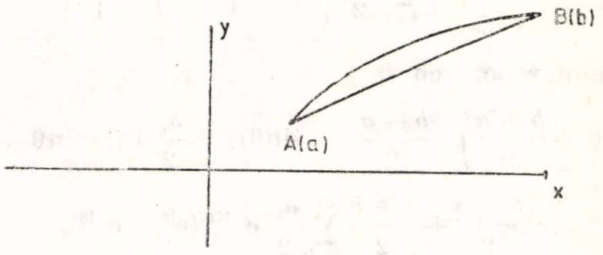


Fig. 2

Soluționarea problemei revine la rezolvarea unei probleme de tip Dirichlet pentru funcția $\hat{\psi}$ în planul (z) cu tăietură arcul $\widehat{AB}$.

2. Rezolvarea problemei în cazul cînd profilul din planul (z) nu diferă mult de coarda sa

2.1. Determinarea potențialului complex. Prin transformarea liniară,

$$z = \frac{b-a}{2}\,\hat{z} + \frac{b+a}{2} \tag{2.1.}$$

segmentul AB este reprezentat pe segmentul $[-1,1]$ din planul $\hat{z}$, (fig.3).

Fig. 3

Fie potențialul complex de perturbație de forma :

$$\hat{F}(z) = \frac{a_0}{2}\,\mathrm{i}\cdot[\hat{z} - \sqrt{\hat{z}^2-1} + \ln(\hat{z} + \sqrt{\hat{z}^2-1})]\cdot\frac{b-a}{2} + \tag{2.2}$$

$$+\mathrm{i}\,\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2}\left\{\frac{(\hat{z} - \sqrt{\hat{z}^2-1})^{k+1}}{k+1} - \frac{(\hat{z} - \sqrt{\hat{z}^2-1})^{k-1}}{k-1}\right\} + f_0(t)$$

cu

$$\hat{z} = \frac{2}{b-a}\left(z - \frac{b+a}{2}\right)$$

Punem $\hat{z} = \cos\theta$ și obținem :

$$\hat{F}\left(\frac{b-a}{2}\cos\theta + \frac{b+a}{2}\right) = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{a_0}{2}\cdot i\,(\cos\theta - i\sin\theta + i\theta) +$$

$$+\frac{b-a}{2}\,i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2}\left\{\frac{e^{-i(k+1)\theta}}{k+1} - \frac{e^{-i(k-1)\theta}}{k-1}\right\}$$

Derivăm în raport cu θ

$$\hat{F}'\left(\frac{b-a}{2}\cos\theta + \frac{b+a}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}(-\sin\theta) = \frac{a_0}{2}\,i\,(-\sin\theta + i\cos\theta + i)\cdot$$

$$\cdot\frac{b-a}{2} + \frac{a-b}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2}\,e^{-ik\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}),$$

de unde egalînd părțile imaginare

$$\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}\left(\frac{b-a}{2}\cos\theta + \frac{b+a}{2}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\theta \tag{2.3.}$$

Calculăm $\left.\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}\right|_{\hat{x}=\cos\theta}$ folosind condiția la limită (1.7)

$$\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(X^2+Y^2) = \frac{\partial}{\partial\hat{x}}(z\bar{z})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(z\bar{z})^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(z\bar{z})$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(z\bar{z}) = z\,\overline{\frac{b-a}{2}} + \bar{z}\cdot\frac{b-a}{2} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{b-a}{2}\cos\theta + \frac{b+a}{2}\right)\cdot\overline{\frac{b-a}{2}}\right\} =$$

$$= 2l^2\left(\cos\theta + \mathrm{Re}\left\{\frac{b+a}{b-a}\right\}\right)$$

$$z\bar{z} = l^2\cos^2\theta + l_1^2 + 2\,\cos\theta\cdot l^2\cdot\mathrm{Re}\left\{\frac{b+a}{b-a}\right\},$$

unde

$$4l^2 = (b-a)\,\overline{(b-a)},\quad 4l_1^2 = (b+a)\,\overline{(b+a)}.$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\left\{\mathrm{Im}\left[\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i n}\cdot\ln\left(\frac{b-a}{2}\hat{z} + \frac{b+a}{2}\right)\right]\right\}_{\hat{x}=\cos\theta} =$$

$$= \mathrm{Im}\left\{\frac{Q-i\Gamma}{2\pi n}\cdot\frac{1}{\cos\theta + \dfrac{b+a}{b-a}}\right\}$$

Se obține în final

$$(2.4)\quad \left.\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{x}}\right|_{\hat{x}=\cos\theta} = -\frac{\omega}{n}\left\{l^2\cos^2\theta + 2\cos\theta\cdot l^2\cdot \mathrm{Re}\left(\frac{b+a}{b-a}\right) + l_1^2\right\}^{\frac{1}{n}-1}\cdot$$

$$\cdot\, l^2\left[\cos\theta + \mathrm{Re}\left(\frac{b+a}{b-a}\right)\right] - \mathrm{Im}\left\{\frac{Q-i\Gamma}{2\pi n}\cdot\frac{1}{\cos\theta + \dfrac{b+a}{b-a}}\right\} = h(\theta)$$

Comparînd (2.3) cu (2.4) determinăm coeficienții a_k

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h\,(\theta)\mathrm{d}\theta, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(\theta)\cos k\theta\,\mathrm{d}\theta$$

și determinarea potențialului complex al mișcării este terminată.

2.2. *Determinarea acțiunii hidrodinamice asupra palelor.* Avînd în vedere saltul presiunii la traversarea profilului dat de (1.8), avem de calculat saltul $\left[\!\left[\dfrac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}Z}\right]\!\right]$.

$$\left[\!\left[\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}Z}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}z}\right]\!\right]\cdot n\cdot Z^{n-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}z}(\cos\theta \pm i0) = \frac{a_0}{2}i\left(1 \mp \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}i\right) + i\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\cos k\theta \mp i\sin k\theta)$$

$$(2.5)\quad \left[\!\left[\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}z}\right]\!\right] = a_0\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin k\theta$$

$$\left[\!\left[\frac{p}{\rho}\right]\!\right] = -\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\cdot\frac{1}{Z} + i\omega\bar{Z}\right)n\bar{Z}^{n-1}\right\}\left(a_0\cdot\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin k\theta\right)$$

$$\left[\!\left[\frac{p}{\rho}\right]\!\right] = -\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\cdot\frac{1}{X^2+Y^2} + i\omega\right)n\bar{z}\right\}\left(a_0\cdot\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin k\theta\right)$$

Această expresie, notată $g(\theta)$, este o funcție de θ, avînd în vedere

$$X^2 + Y^2 = l^{\frac{1}{n}}\cdot\left[\cos^2\theta + 2\cos\theta\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{b+a}{b-a}\right) + \left(\frac{l_1}{l}\right)^2\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$(2.6)$$

$$\bar{z} = \frac{\overline{b-a}}{2}\cos\theta + \frac{\overline{b+a}}{2}$$

Rezultanta acţiunii fluidului asupra plăci este :

$$R = \int_{-1}^{1} \left[\!\!\left[\frac{p}{\rho} \right]\!\!\right] d\hat{x} = \int_{0}^{\pi} g(\theta) \sin\theta \, d\theta$$

Dacă notăm $\chi(\theta) = -\operatorname{Re}\left\{\left(\frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \cdot \frac{1}{X^2 + Y^2} + i\omega\right) n\bar{z}\right\}$, aceasta fiind funcţia de θ, ţinînd cont de (2.6), o dezvoltăm în serie Fourier :

$$\chi(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\theta$$

şi de aici

$$R = \int_{0}^{\pi} \left(\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\theta\right)\left(a_0 \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\theta\right) \sin\theta \, d\theta$$

de unde după calcule se obţine forma următoare :

$$R = \frac{\pi}{2}\left[a_0(c_0 - c_1) + \sum_{l=1}^{\infty} (c_{l-1} - c_{l+1}) a_l \right].$$

Soluţia obţinută este asemănătoare soluţiei din cazul aripei subţiri pentru că în rezolvarea problemei se înlocuieşte profilul prin coarda sa.

Primit în redacţie la 31 mai 1990

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Dunod, Paris, 1959.
2. GH. ZIDARU, *Mişcări potenţiale şi hidrodinamica reţelelor de profile*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.

DETERMINAREA RĂSPUNSULUI AVIONULUI LA COMENZI ÎN MANEVRE NELINIARE ARBITRARE CU VARIAȚII MICI DE ALTITUDINE ȘI VITEZĂ

I. ȚĂPOSU

Institutul de Aviație — București

Pornind de la ecuațiile neliniare care descriu mișcarea avionului în manevre arbitrare cu variații mici de altitudine și viteză, se determină răspunsul la comanda flapsului, aripioarelor, profundorului, direcției și/sau frînelor aerodinamice. Bracajele suprafețelor de comandă se presupun funcții cunoscute pe intervalul de timp pe care se studiază răspunsul.

1. INTRODUCERE

În [1] au fost determinate componentele sarcinilor aerodinamice pe organele avionului în cazul manevrelor neliniare arbitrare cu variații mici de altitudine și viteză. Scopul prezentei lucrări este ca, utilizînd expresiile din [1] ale componentelor forțelor și momentelor, să se determine răspunsul avionului la comenzi. Metoda de abordare a problemei este similară cu cea din [2] și [3], unde au fost studiate numai manevrele longitudinale neliniare cu variații mici de altitudine și viteză. Deosebirea esențială față de [2] constă în creșterea numărului funcțiilor necunoscute de la trei la șase.

O ipoteză fundamentală utilizată în [1] și care va fi menținută în cadrul lucrării de față, este aceea că se neglijează variația numărului Mach în timpul manevrei. Una dintre consecințele acestei ipoteze, în special în cazul vitezelor mari, se referă la faptul că plecarea în manevră nu se poate face decît din zborul orizontal rectiliniuu și uniform sau dintr-o mică vecinătate a acestuia. In plus, dacă manevrele sînt scurte (de ordinul a cîtorva secunde) și variațiile de altitudine mici (de ordinul a cîtorva sute de metri) metoda permite descrierea manevrelor arbitrare în care intervin variații mari ale unghiurilor de incidență și de glisadă (pînă în apropierea punctelor de stall) cu o precizie de ordinul 3%.

Sistemele de referință, definițiile și notațiile de bază utilizate în lucrare sînt aceleași ca în [1]. Determinarea răspunsului avionului la comenzi revine la rezolvarea problemei Cauchy cu condiții inițiale nule (vezi [4]) pentru un sistem de ecuații diferențiale neliniare avînd funcțiile necunoscute α, β, p, q, r și V. Acest sistem, care va fi scris sub forma normală, se deduce utilizînd expresiile din [1] ale forțelor și momentelor aerodinamice, iar reprezentarea soluției se obține utilizînd soluția fundamentală a sistemului liniar și omogen asociat sistemului neliniar ce descrie mișcarea avionului. În lucrare sînt abordate și unele aspecte de ordin calitativ, dintre care menționăm existența și unicitatea soluției într-o anumită vecinătate a momentului inițial, precum și unele observații privind integrarea numerică a sistemului neliniar de ecuații.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 1—2, 1991, P. 25—52

2. O FORMĂ INTERMEDIARĂ A SISTEMULUI DE ECUAȚII

Dacă ținem seama de expresiile (34) din [1] ale forțelor și momentelor aerodinamice, sistemul de ecuații diferențiale (37) din [1], care descrie mișcarea avionului, se poate scrie sub forma

$$A_{11}\Delta\dot{\alpha} + A_{12}\Delta\dot{\beta} + A_{13}\Delta\dot{p} + A_{14}\Delta\dot{q} + A_{15}\Delta\dot{r} + A_{16}\Delta\dot{V} = B_{11}\Delta\alpha + B_{12}\Delta\beta + B_{13}\Delta p + B_{14}\Delta q + B_{15}\Delta r + B_{16}\Delta V + C_{11} + C_{12}\Delta\delta_f + C_{13}\Delta\delta_a + C_{14}\Delta\delta_e + C_{15}\Delta\delta_d + C_{16} + C_{17},$$

$$A_{21}\Delta\dot{\alpha} + A_{22}\Delta\dot{\beta} + A_{23}\Delta\dot{p} + A_{24}\Delta\dot{q} + A_{25}\Delta\dot{r} + A_{26}\Delta\dot{V} = B_{21}\Delta\alpha + B_{22}\Delta\beta + B_{23}\Delta p + B_{24}\Delta q + B_{25}\Delta r + B_{26}\Delta V + C_{21} + C_{22}\Delta\delta_f + C_{23}\Delta\delta_a + C_{24}\Delta\delta_e + C_{25}\Delta\delta_d + C_{26} + C_{27},$$

$$A_{31}\Delta\dot{\alpha} + A_{32}\Delta\dot{\beta} + A_{33}\Delta\dot{p} + A_{34}\Delta\dot{q} + A_{35}\Delta\dot{r} + A_{36}\Delta\dot{V} = B_{31}\Delta\alpha + B_{32}\Delta\beta + B_{33}\Delta p + B_{34}\Delta q + B_{35}\Delta r + B_{36}\Delta V + C_{31} + C_{32}\Delta\delta_f + C_{33}\Delta\delta_a + C_{34}\Delta\delta_e + C_{35}\Delta\delta_d + C_{36} + C_{37}, \quad (1)$$

$$A_{41}\Delta\dot{\alpha} + A_{42}\Delta\dot{\beta} + A_{43}\Delta\dot{p} + A_{44}\Delta\dot{q} + A_{45}\Delta r + A_{46}\Delta\dot{V} = B_{41}\Delta\alpha + B_{42}\Delta\beta + B_{43}\Delta p + B_{44}\Delta q + B_{45}\Delta r + B_{46}\Delta V + C_{41} + C_{42}\Delta\delta_f + C_{43}\Delta\delta_a + C_{44}\Delta\delta_e + C_{45}\Delta\delta_d + C_{46} + C_{47},$$

$$A_{51}\Delta\dot{\alpha} + A_{52}\Delta\dot{\beta} + A_{53}\Delta\dot{p} + A_{54}\Delta\dot{q} + A_{55}\Delta\dot{r} + A_{56}\Delta\dot{V} = B_{51}\Delta\alpha + B_{52}\Delta\beta + B_{53}\Delta p + B_{54}\Delta q + B_{55}\Delta r + B_{56}\Delta V + C_{51} + C_{52}\Delta\delta_f + C_{53}\Delta\delta_a + C_{54}\Delta\delta_e + C_{55}\Delta\delta_d + C_{56} + C_{57},$$

$$A_{61}\Delta\dot{\alpha} + A_{62}\Delta\dot{\beta} + A_{63}\Delta\dot{p} + A_{64}\Delta\dot{q} + A_{65}\Delta\dot{r} + A_{66}\Delta\dot{V} = B_{61}\Delta\alpha + B_{62}\Delta\beta + B_{63}\Delta p + B_{64}\Delta q + B_{65}\Delta r + B_{66}\Delta V + C_{61} + C_{62}\Delta\delta_f + C_{63}\Delta\delta_a + C_{64}\Delta\delta_e + C_{65}\Delta\delta_d + C_{66} + C_{67},$$

unde

$$A_{11} = \alpha_0 \frac{mV}{Q} + \zeta\gamma_1\varepsilon_\alpha C_{Lo}^{Ao} + \alpha_1 C_{L\dot{\alpha}}^{AF} + \zeta\varepsilon_1 C_{L\dot{\alpha}}^{t},$$

$$A_{12} = \beta_0 \frac{mV}{Q} + \eta\gamma_2\varepsilon_\beta C_{yo}^{AV} + \eta\varepsilon_2 C_{y\dot{\beta}}^{D},$$

$$A_{13} = 0,$$

$$A_{14} = 0,$$

$$A_{15} = 0,$$

$$A_{16} = -\frac{m}{Q},$$

$$B_{11} = q_0 \frac{mV}{Q} - C_{L_0}^{Af} - \zeta(1-\varepsilon_\alpha)C_{L_0}^{Ao} - \alpha_1 C_{L\alpha}^{AF} - \zeta\varepsilon_1 C_{L\alpha}^{t},$$

$$B_{12} = C_{y_0}^{AF} - r_0 \frac{mV}{Q} - \eta(1-\varepsilon_\beta)C_{y_0}^{AV} - \beta_1 C_{y\beta}^{AF} - \eta\varepsilon_2 C_{y\beta}^{D},$$

$$B_{13} = 0,$$

$$B_{14} = \alpha_0 \frac{mV}{Q} - \gamma_1 C_{L_0}^{Ao} - \alpha_1 C_{Lq}^{AF} - \zeta\varepsilon_1 C_{Lq}^{t},$$

$$B_{15} = -\eta\varepsilon_2 C_{yr}^{D} - \gamma_2 C_{y_0}^{AV} - \beta_0 \frac{mV}{Q},$$

$$B_{16} = 0,$$

$$C_{11} = \frac{mg}{Q}\sin\theta_0 + \frac{mV}{Q}(\alpha_0 q_0 - \beta_0 r_0) - \sum_{i=1}^{n} C_i^T \cos\alpha_i^T - \alpha_0 C_{L_0}^{AF} - \beta_0 C_{y\delta}^{AF} -$$

$$-\zeta\varepsilon_0 C_{L_0}^{AO} + \eta\tau_0 C_{y_0}^{AV} + C_{D^*} + K_{AF}[(C_{L_0}^{Af})^2 + (C_{y_0}^{AF})^2] + \zeta K_{AO}(C_{L_0}^{Ao})^2 + \eta K_{AV}(C_{y_0}^{AV})^2,$$

$$C_{12} = -\alpha_1 C_{L\delta}^{f},$$

$$C_{13} = 0, \qquad (2a)$$

$$C_{14} = -\zeta\varepsilon_1 C_{L\delta}^{e},$$

$$C_{15} = -\eta\varepsilon_2 C_{y\delta}^{d},$$

$$C_{16} = K_{AF}(C_{L\delta}^{f})^2(\Delta\delta_f)^2 + \zeta K_{AO}(C_{L\delta}^{e})^2(\Delta\delta_e)^2 + \eta K_{AV}(C_{y\delta}^{d})^2(\Delta\delta_d)^2 + \sum_{i=1}^{m} C_{Ni}^{b}\sin\delta_i^b,$$

$$C_{17} = \frac{mg}{Q}F_1(\theta) + \zeta C_{L\delta}^{e}(2K_{AO}C_{L\dot\alpha}^{t} - \gamma_1\varepsilon_\alpha)\Delta\dot\alpha\Delta\delta_e + \eta C_{y\delta}^{d}(2K_{AV}C_{y\dot\beta}^{D} - \gamma_2\varepsilon_\beta)\Delta\dot\beta\Delta\dot\delta_d -$$

$$- a_1 C_{L\delta}^{f}\Delta\alpha\delta_f - \zeta b_1 C_{L\delta}^{e}\Delta\alpha\Delta\delta_e - \eta b_2 C_{y\delta}^{d}\Delta\beta\Delta\delta_d + \zeta C_{L\delta}^{e}(2K_{AO}C_{Lq}^{t} - \gamma_1)\Delta q\Delta\delta_e -$$

$$-\eta C_{y\delta}^{d}(2K_{AV}C_{yr}^{D} + \gamma_2)\Delta r\Delta\delta_d - [C_{L\alpha}^{AF}(1 - K_{AF}C_{L\alpha}^{AF}) + \zeta C_{L\alpha}^{t}(1 - \varepsilon_\alpha - K_{AO}C_{L\alpha}^{t})](\Delta\alpha)^2 +$$

$$+ [C_{y\beta}^{AF}(1 - K_{AF}C_{y\beta}^{AF}) + \eta C_{y\beta}^{D}(1 - \varepsilon_\beta - K_{AV}C_{y\beta}^{D})](\Delta\beta)^2 -$$

$$-[\zeta C^t_{Lq}(\gamma_1 - K_{Ao}C^t_{Lq}) - K_{AF}(C^{AF}_{Lq})^2](\Delta q)^2 - \gamma_l C^D_{yr}(\gamma_2 + K_{AV}C^D_{yr})(\Delta r)^2 -$$

$$-\left[a_1 C^{AF}_{Lq} + \zeta(b_1 C^t_{Lq} + \gamma_1 C^t_{L\alpha}) - \frac{mV}{Q}\right]\Delta\alpha\Delta q -$$

$$-\left[\gamma_l(\gamma_2 C^D_{y\beta} - b_2 C^D_{yr}) - \frac{mV}{Q}\right]\Delta\beta\Delta r - \left[a_1 C^{AF}_{L\dot\alpha} + \zeta(b_1 C^t_{L\dot\alpha} + \gamma_1\varepsilon_\alpha C^t_{L\alpha}) + \frac{mV}{Q}\right]\Delta\alpha\Delta\dot\alpha -$$

$$-\left[\gamma_l(\gamma_2\varepsilon_\beta C^D_{y\beta} + b_2 C^D_{y\dot\beta}) + \frac{mV}{Q}\right]\Delta\beta\Delta\dot\beta - [\zeta\gamma_1(C^t_{L\dot\alpha} + \varepsilon_\alpha C^t_{Lq}) - 2(K_{AF}C^{AF}_{Lq}C^{AF}_{L\dot\alpha} +$$

$$+\zeta K_{Ao}C^t_{Lq}C^t_{L\dot\alpha})]\Delta q\Delta\dot\alpha + \gamma_l[\gamma_2(C^D_{y\dot\beta}) + \varepsilon_\beta C^D_{yr}) + 2K_{AV}C^D_{yr}C^D_{y\dot\beta}]\Delta r\Delta\dot\beta -$$

$$-[\zeta C^t_{L\dot\alpha}(\gamma_1\varepsilon_\alpha - K_{Ao}C^t_{L\dot\alpha}) - K_{AF}(C^{AF}_{L\dot\alpha})^2](\Delta\dot\alpha)^2 - \gamma_l[C^D_{y\dot\beta}(\gamma_2\varepsilon_\beta - K_{AV}C^D_{y\dot\beta})](\Delta\dot\beta)^2;$$

$$A_{21} = 0,$$

$$A_{22} = C_{y\dot\beta} + \frac{mV}{Q},$$

$$A_{23} = 0,$$

$$A_{24} = 0,$$

$$A_{25} = 0,$$

$$A_{26} = -\beta_0\frac{m}{Q},$$

$$B_{21} = -p_0\frac{mV}{Q},$$

$$B_{22} = C_{y\beta},$$

$$B_{23} = -\alpha_0\frac{mV}{Q}, \qquad (2b)$$

$$B_{24} = 0,$$

$$B_{25} = C_{yr} + \frac{mV}{Q},$$

$$B_{26} = 0,$$

$$C_{21} = C_{y_0} - \frac{mg}{Q} \cos\theta_0 \sin\Phi_0 + \frac{mV}{Q} (r_0 - \alpha_0\beta_0),$$

$$C_{22} = 0,$$

$$C_{23} = 0,$$

$$C_{24} = 0,$$

$$C_{25} = \eta C^{d}_{y\delta},$$

$$C_{26} = 0,$$

$$C_{27} = \frac{m}{Q} \Delta\beta\Delta\dot{V} - \frac{mV}{Q} \Delta\alpha\Delta p - \frac{mg}{Q} F_2(\theta, \Phi);$$

$$A_{31} = -\left(C_{L\dot{\alpha}} + \frac{mV}{Q}\right),$$

$$A_{32} = \alpha_0\beta_0 \frac{mV}{Q},$$

$$A_{33} = 0,$$

$$A_{34} = 0,$$

$$A_{35} = 0,$$

$$A_{36} = -\alpha_0 \frac{m}{Q},$$

$$B_{31} = C_{L\alpha},$$

$$B_{32} = p_0 \frac{mV}{Q},$$

$$B_{33} = \beta_0 \frac{mV}{Q},$$

$$B_{34} = C_{Lq} - \frac{mV}{Q}, \qquad (2c)$$

$$B_{35} = 0,$$

$$B_{36} = 0,$$

$$C_{31} = C_{Lo} + \sum_{i=1}^{n} C_i^T \sin\alpha_i^T + \frac{mV}{Q}(p_0\beta_0 - q_0) - \frac{mg}{Q}\cos\theta_0\cos\Phi_0,$$

$$C_{32} = C_{L\delta}^f,$$

$$C_{33} = 0,$$

$$C_{34} = \zeta C_{L\delta}^e,$$

$$C_{35} = 0,$$

$$C_{36} = 0,$$

$$C_{37} = \frac{m}{Q}\Delta\alpha\Delta\dot{V} - \frac{mg}{Q}F_3(\theta, \Phi) - \beta_0\frac{mV}{Q}\Delta\alpha\Delta\dot{\beta} -$$

$$- \frac{mV}{Q}\Delta\beta\Delta p - \alpha_0\frac{mV}{Q}\Delta\beta\Delta\dot{\beta} - \frac{mV}{Q}\Delta\alpha\Delta\beta\Delta\dot{\beta};$$

$$A_{41} = r_0 l_r C_{L\dot{\alpha}},$$

$$A_{42} = \frac{z^D}{s} C_{y\dot{\beta}}^D,$$

$$A_{43} = -\frac{I_x}{sQ},$$

$$A_{44} = 0,$$

$$A_{45} = \frac{I_{zx}}{sQ},$$

$$A_{46} = 0,$$

$$B_{41} = \beta_0 k_\beta C_{L\alpha}^{AF} + r_0 l_r C_{L\alpha},$$

$$B_{42} = -\frac{1}{s}(z^{AF}C_{y\beta}^{AF} + z^D C_{y\beta}^D) - a_1,$$

$$B_{43} = -q_0\frac{I_{zx}}{sQ} - \frac{s}{V}C_{lp},$$

$$B_{44} = r_0\frac{I_z - I_y}{sQ} - p_0\frac{I_{zx}}{sQ} - \beta_0 k_\beta C_{Lq}^{AF} - r_0 l_r C_{Lq},$$

$$B_{45} = q_0 \frac{I_z - I_y}{sQ} - l_r C_{Lo} - \frac{z^D}{s} C_{yr}, \tag{2d}$$

$$B_{46} = 0,$$

$$C_{41} = \frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i^T y_i^T \sin \alpha_i^T\right) - \frac{z^{AF}}{s} C_{y_0}^{AF} - \frac{z^D}{s} C_{y_0}^D - \frac{z^d}{s} C_{y_0}^d - C_{l_0}^a - C_{l_0}^p -$$

$$- \beta_0 l_\beta - r_0 l_r C_{L0} - p_0 q_0 \frac{I_{zx}}{sQ} - q_0 r_0 \frac{I_y - I_z}{sQ},$$

$$C_{42} - (r_0 l_r + \beta_0 k_\beta) C_{L\delta}^f,$$

$$C_{43} = - C_{l\delta}^a,$$

$$C_{44} = - r_0 l_r C_{L\delta}^e,$$

$$C_{45} = - \frac{z^d}{s} C_{y\delta}^d,$$

$$C_{46} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{m} C_{Ni}^b y_i^b \cos \delta_i^b,$$

$$C_{47} = \left(\frac{I_z - I_y}{sQ} - l_r C_{Lq}\right) \Delta q \Delta r - \frac{I_{zx}}{sQ} \Delta p \Delta q - k_\beta C_{L\alpha}^{AF} \Delta\alpha\Delta\beta - l_r C_{L\alpha} \Delta\alpha\Delta r +$$

$$- k_\beta C_{Lq}^{AF} \Delta\beta\Delta q - l_r C_{L\dot{\alpha}} \Delta\dot{\alpha}\, \Delta r - k_\beta C_{L\delta}^f \Delta\beta\Delta\delta_f - l_r C_{L\delta}^f \Delta r \Delta\delta_f - l_r C_{L\delta}^e \Delta r \Delta\delta_e;$$

$$A_{51} = - C_{m\dot{\alpha}},$$

$$A_{52} = - \eta \frac{z^D}{\bar{c}} C_{y\dot{\beta}}^D [\beta_0(1-\varepsilon_\beta) - r_0\gamma_2 + C_{y_0}^D(\gamma_2\varepsilon_\beta - 2K_{AF})],$$

$$A_{53} = 0,$$

$$A_{54} = \frac{I_y}{\bar{c}Q},$$

$$A_{55} = 0,$$

$$A_{56} = 0,$$

$$B_{51} = C_{m\alpha},$$

$$B_{52} = \frac{z^{AF}}{\bar{c}} (\beta_0 C^{AF}_{y\beta} + C_{y_0}) + \eta(1-\varepsilon_\beta) \frac{z^D}{\bar{c}} C^D_{y_0} + \eta \frac{z^D}{\bar{c}} C_{y\beta}[\beta_0(1-\varepsilon_\beta) - r_0\gamma_2 -$$

$$- 2K_{AV} C^D_{y_0}],$$

$$B_{53} = \frac{1}{\bar{c}Q} [r_0(I_z - I_x) - 2p_0 I_{zx}],$$

$$B_{54} = C_{mq},$$

$$B_{55} = -\eta \frac{z^D}{\bar{c}} \{\gamma_2 C^D_{y_0} - C^D_{yr}[\beta_0(1-\varepsilon_\beta) - 2K_{AV} C^D_{y_0}]\} + \frac{1}{\bar{c}Q}[p_0(I_z - I_x) + 2r_0 I_{zx}],$$

$$B_{56} = 0,$$

$$C_{51} = C_{m_0} + C^T_m - \frac{1}{\bar{c}Q} [(p_0^2 - r_0^2) I_{zx} - r_0 p_0 (I_z - I_x)],$$

$$C_{52} = C^f_{m\delta}, \tag{2e}$$

$$C_{53} = 0,$$

$$C_{54} = C^e_{m\delta},$$

$$C_{55} = \frac{z^d}{\bar{c}} C^d_{y\delta}[\beta_0 (1-\varepsilon_\beta) - r_0\gamma_2],$$

$$C_{56} = C^b_m - K_{AF} \frac{z^f}{\bar{c}} (C^f_{L\delta})^2 (\Delta\delta_f)^2 - \zeta K_{AO} \frac{z^e}{\bar{c}} (C^e_{L\delta})^2 (\Delta\delta_e)^2 - \eta K_{AV} \frac{z^d}{\bar{c}} (C^d_{y\delta})^2 (\Delta\delta_d)^2,$$

$$C_{57} = \left[C^{AF}_{L\alpha} \frac{z^{AF}}{\bar{c}} (1 - K_{AF} C^{AF}_{L\alpha}) + \zeta C^t_{L\dot{\alpha}} \frac{z^t}{\bar{c}} (1 - \varepsilon_\alpha - K_{AO} C^t_{L\alpha}) \right] (\Delta\alpha)^2 +$$

$$+ \left[a_1 \frac{z^{AF}}{\bar{c}} C^{AF}_{L\dot{\alpha}} + \zeta \frac{z^t}{\bar{c}} (\gamma_1 \varepsilon_\alpha C^t_{L\alpha} + b_1 C^t_{L\dot{\alpha}}) \right] \Delta\alpha\Delta\dot{\alpha} + \left[\zeta C^t_{L\dot{\alpha}} \frac{z^t}{\bar{c}} (\varepsilon_2 \varepsilon_\alpha - K_{AO} C^t_{L\dot{\alpha}}) - \right.$$

$$\left. - K_{AF} \frac{z^{AF}}{\bar{c}} (C^{AF}_{L\dot{\alpha}})^2 \right] (\Delta\dot{\alpha})^2 + \left[\zeta C^t_{Lq} \frac{z^t}{\bar{c}} (\gamma_1 - K_{AO} C^t_{Lq}) - K_{AF} \frac{z^{AF}}{\bar{c}} (C^{AF}_{Lq})^2 \right] (\Delta q)^2 +$$

$$+ \left[a_1 \frac{z^{AF}}{\bar{c}} C^{AF}_{Lq} + \zeta \frac{z^t}{\bar{c}} (\gamma_1 C^t_{L\alpha} + b_1 C^t_{Lq}) \right] \Delta\alpha\Delta q + \left[\zeta\gamma_1 \varepsilon_\alpha \frac{z^t}{\bar{c}} C^t_{Lq} + \right.$$

$$\left. + \zeta \frac{z^t}{\bar{c}} C^t_{L\dot{\alpha}} (\gamma_1 - 2K_{AO} C^t_{Lq}) - 2K_{AF} \frac{z^{AF}}{\bar{c}} C^{AF}_{Lq} C^{AF}_{L\dot{\alpha}} \right] \Delta q\Delta\dot{\alpha} - \left[\frac{z^{AF}}{\bar{c}} C^{AF}_{y\beta} + \right.$$

$$+\eta\frac{z^D}{\bar{c}}C^D_{y\beta}(1-\varepsilon_\beta-K_{AV}C^D_{y\beta})\Big](\Delta\beta)^2+\eta\frac{z^D}{\bar{c}}C^D_{y\dot{\beta}}(\gamma_2\varepsilon_\beta-K_{AV}C^D_{y\dot{\beta}})(\Delta\dot{\beta})^2+$$

$$+\eta\frac{z^D}{\bar{c}}(\gamma_2\varepsilon_\beta C^D_{y\beta}+b_2C^D_{y\dot{\beta}})\Delta\beta\Delta\dot{\beta}+\eta\frac{z^D}{\bar{c}}(b_2C^D_{yr}-\gamma_2C^D_{y\beta})\Delta\beta\Delta r+$$

$$+\eta\frac{z^D}{\bar{c}}[\gamma_2\varepsilon_\beta C^D_{yr}-C^D_{y\dot{\beta}}(\gamma_2+2K_{AV}C^D_{yr})]\Delta r\Delta\dot{\beta}-\eta\frac{z^D}{\bar{c}}C^D_{yr}(\gamma_2+K_{AV}C^D_{yr})(\Delta r)^2+$$

$$+\frac{C^f_{L\delta}}{\bar{c}}(z^f-2K_{AF}z^{AF}C^{AF}_{L\alpha})\Delta\alpha\Delta\delta_f+\zeta\frac{C^e_{L\delta}}{\bar{c}}(z^e-2K_{AO}z^tC^t_{L\alpha})\Delta\alpha\Delta\delta_e+$$

$$+\eta(1-\varepsilon_\beta)\frac{z^d}{\bar{c}}C^d_{y\delta}\Delta\beta\Delta\delta_d-2K_{AF}\frac{z^{AF}}{\bar{c}}C^{AF}_{L\dot{\alpha}}C^f_{L\delta}\Delta\dot{\alpha}\Delta\delta_f-2K_{AF}\frac{z^{AF}}{\bar{c}}C^{AF}_{Lq}C^f_{L\delta}\Delta q\Delta\delta_f+$$

$$+\zeta C^e_{L\delta}\frac{z^t}{\bar{c}}(\gamma_1\varepsilon_\alpha-2K_{AO}C^t_{L\dot{\alpha}})\Delta\dot{\alpha}\Delta\delta_e+\zeta C^e_{L\delta}\frac{z^t}{\bar{c}}(\gamma_1-2K_{AO}C^t_{Lq})\Delta q\Delta\delta_e+$$

$$+\varepsilon_\beta\gamma_2\frac{z^d}{\bar{c}}C^d_{y\delta}\Delta\dot{\beta}\Delta\delta_d-\gamma_2\frac{z^d}{\bar{c}}C^d_{y\delta}\Delta r\Delta\delta_d-\frac{I_{zx}}{\bar{c}Q}(\Delta p)^2+\frac{I_{zx}}{\bar{c}Q}(\Delta r)^2+$$

$$+\frac{I_z-I_x}{\bar{c}Q}\Delta p\Delta r;$$

$$A_{61}=-p_0n_pC_{L\dot{\alpha}},$$

$$A_{62}=\frac{x^D}{s}C^D_{y\dot{\beta}},$$

$$A_{63}=-\frac{I_{zx}}{sQ},$$

$$A_{64}=0,$$

$$A_{65}=\frac{I_z}{sQ},$$

$$A_{66}=0,$$

$$B_{61}=p_0n_pC_{L\alpha},$$

$$B_{62} = - C^F_{n\beta} - \frac{1}{s}\,(x^{AF} C^{AF}_{y\beta} + x^D C^D_{y\beta}),$$

$$B_{63} = C_{Lo} n_p + \frac{q_0}{sQ}\,(I_x - I_y), \tag{2f}$$

$$B_{64} = p_0 n_p C_{Lq} + \frac{1}{sQ}\,[p_0(I_x - I_y) - r_0 I_{zx}],$$

$$B_{65} = - \frac{x^D}{s}\, C^D_{yr} - \frac{q_0}{sQ}\, I_{zx},$$

$$B_{66} = 0,$$

$$C_{61} = p_0 n_p C_{Lo} - \frac{1}{s}\left(x^{AF} C^{AF}_{y_0} + x^D C^D_{y_0} + \sum_{i=1}^{n} C^T_i y^T_i \cos\alpha^T_i \right) +$$

$$+ \frac{q_0}{sQ}\,[p_0(I_x - I_y) - r_0 I_{zx}],$$

$$C_{62} = p_0 n_p C^f_{L\delta},$$

$$C_{63} = K_{AF}\, \frac{y^a}{s}\, C^{AF}_{L_0} C^a_{L\delta},$$

$$C_{64} = p_0 n_p C^e_{L\delta},$$

$$C_{65} = - \frac{x^d}{s}\, C^d_{y\delta},$$

$$C_{66} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{m} y^b_i C^b_{Ni} \sin\delta^b_i + K_{AF}\, \frac{y^a}{s}\, C^f_{L\delta} C^a_{L\delta} \Delta\delta_f \Delta\delta_a,$$

$$C_{67} = n_p C^f_{L\delta} \Delta p \Delta\delta_f + n_p C^e_{L\delta} \Delta p \Delta\delta_e + n_p C_{L\alpha} \Delta p \Delta\alpha + n_p C_{L\dot{\alpha}} \Delta p \Delta\dot{\alpha} +$$

$$+ \left[n_p C_{Lq} + \frac{1}{sQ}(I_x - I_y) \right] \Delta p \Delta q + K_{AF} \frac{y^a}{s}\, C^{AF}_{L\alpha} \Delta\alpha \Delta\delta_a + K_{AF} \frac{f^a}{s}\, C^{AF}_{L\dot{\alpha}} \Delta\dot{\alpha} \Delta\delta_a -$$

$$- \frac{I_{zx}}{sQ} \Delta q \Delta r.$$

3. REPREZENTAREA MATRICIALĂ A SISTEMULUI DE ECUAȚII

Folosind notațiile din relațiile (2), definim matricile pătrate, cu elementele constante, $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{B}$ și $\mathscr{B}_1$ precum și vectorii $\vec{\mathscr{C}}_1$, $\vec{\mathscr{C}}_2$, $\vec{\mathscr{C}}_3$, $\vec{\mathscr{C}}_4$, $\vec{\mathscr{C}}_5$, $\vec{\mathscr{C}}_6$, $\vec{\mathscr{C}}_7$, respectiv $\vec{y}$ prin

$$\mathscr{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{16} \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ A_{51} & 0 & 0 & A_{54} & 0 & 0 \\ 0 & A_{62} & 0 & 0 & A_{65} & 0 \end{bmatrix}, \mathscr{A}_1=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{26} \\ 0 & A_{32} & 0 & 0 & 0 & A_{36} \\ A_{41} & 0 & 0 & 0 & A_{45} & 0 \\ 0 & A_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & 0 & A_{63} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{\mathscr{C}}_1=\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \\ C_{41} \\ C_{51} \\ C_{61} \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & 0 & B_{25} & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 & B_{34} & 0 & 0 \\ 0 & B_{42} & B_{43} & 0 & B_{45} & 0 \\ B_{51} & 0 & 0 & B_{54} & 0 & 0 \\ 0 & B_{62} & 0 & 0 & B_{65} & 0 \end{bmatrix}, \mathscr{B}_1=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & B_{14} & B_{15} & 0 \\ B_{21} & 0 & B_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & 0 & 0 & B_{44} & 0 & 0 \\ 0 & B_{52} & B_{53} & 0 & B_{55} & 0 \\ B_{61} & 0 & B_{63} & B_{64} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{\mathscr{C}}_2=\begin{bmatrix} C_{12} \\ 0 \\ C_{32} \\ C_{42} \\ C_{52} \\ C_{62} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\vec{\mathscr{C}}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{43} \\ 0 \\ C_{63} \end{bmatrix}, \vec{\mathscr{C}}_4=\begin{bmatrix} C_{14} \\ 0 \\ C_{34} \\ C_{44} \\ C_{54} \\ C_{64} \end{bmatrix}, \vec{\mathscr{C}}_5=\begin{bmatrix} C_{15} \\ C_{25} \\ 0 \\ C_{45} \\ C_{55} \\ C_{65} \end{bmatrix}, \vec{\mathscr{C}}_6=\begin{bmatrix} C_{16} \\ 0 \\ 0 \\ C_{46} \\ C_{56} \\ C_{66} \end{bmatrix}, \vec{\mathscr{C}}_7=\begin{bmatrix} C_{17} \\ C_{27} \\ C_{37} \\ C_{47} \\ C_{57} \\ C_{67} \end{bmatrix}, \vec{y}=\begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \\ \Delta V \end{bmatrix}.$$

Remarcăm faptul că elementele matricilor constante $\mathscr{A}$ și $\mathscr{A}_1$, respectiv $\mathscr{B}$ și $\mathscr{B}_1$ diferă (aproximativ) printr-un ordin de mărime. Dacă, de exemplu, plecarea în manevră se face din zborul orizontal rectiliniu și uniform, majoritatea elementelor matricilor $\mathscr{A}_1$ și $\mathscr{B}_1$ sînt nule, sau au valori foarte mici (practic neglijabile) în comparație cu cele ale matricilor $\mathscr{A}$ și $\mathscr{B}$. De asemenea, componentele vectorilor $\vec{\mathscr{C}}_1$, $\vec{\mathscr{C}}_2$, $\vec{\mathscr{C}}_3$, $\vec{\mathscr{C}}_4$ și $\vec{\mathscr{C}}_5$ sînt

constante cunoscute, ale vectorului $\vec{\mathscr{C}}_6$ funcții cunoscute de timp, iar cele ale vectorului $\vec{\mathscr{C}}_7$ sînt funcții necunoscute. Vectorul $\vec{y}$ conține o parte dintre funcțiile necunoscute ale problemei.

Folosind notațiile (3), ecuațiile de mișcare (1) capătă forma matricială

$$\mathscr{A}\dot{\vec{y}} = \mathscr{B}\vec{y} + \vec{\mathscr{C}}_1 + \vec{\mathscr{C}}_2\Delta\delta_f + \vec{\mathscr{C}}_3\Delta\delta_a + \vec{\mathscr{C}}_4\Delta\delta_e + \vec{\mathscr{C}}_5\Delta\delta_d + \vec{\mathscr{C}}_6 + \vec{\mathscr{C}}_7 + \\ + \mathscr{B}_1\vec{y} - \mathscr{A}_1\dot{\vec{y}}. \tag{4}$$

Este important de remarcat faptul că elementele vectorului $\vec{\mathscr{C}}_7$, care conține partea neliniară a sistemului de ecuații sînt sume în care intervin termeni de forma ay_iy_j, $by_i\dot{y}_j$, sau $c\dot{y}_i\dot{y}_j$, unde a, b și c sînt constante cunoscute (mărimi geometrice, masice, sau derivate aerodinamice).

Determinarea răspunsului avionului la comenzile flapsului, aripioarei, profundorului, direcției și/sau frînelor aerodinamice revine la rezolvarea problemei Cauchy pentru sistemul constituit din ecuațiile (1) sau (4).

4. FORMA NORMALĂ A SISTEMULUI DE ECUAȚII

Pentru sistemul (4), ale cărui necunoscute sînt componentele vectorului $\vec{y}$, avem de rezolvat problema Cauchy cu condiții inițiale nule, adică

$$\vec{y}(t_0) = \vec{0}. \tag{5}$$

Bracajele suprafețelor de comandă $\Delta\delta_f(t)$, $\Delta\delta_a(t)$, $\Delta\delta_e(t)$, $\Delta\delta_d(t)$ și $\delta_b(t)$ se presupun funcții cunoscute de timpul t pe intervalul $[t_0, T]$, $t_0 \leqslant T < \infty$.

Condiția necesară ca sistemul (4) să poată fi reprezentat sub forma normală este ca matricea $\mathscr{A}$ să fie nesingulară, deci inversabilă. Se poate constata că această condiție este îndeplinită deoarece

$$\det(\mathscr{A}) = A_{16}A_{22}A_{31}A_{43}A_{54}A_{65}, \tag{6a}$$

iar dacă ținem seama de relațiile (2), în care sînt definite elementele matricii $\mathscr{A}$, expresia (6a) a determinantului $\Delta = \det(\mathscr{A})$ devine,

$$\Delta = -\frac{mI_xI_yI_z}{s^2\bar{c}Q^3}\left(\frac{mV}{Q} + C_{L\dot{\alpha}}\right)\left(\frac{mV}{Q} - C_{y\dot{\beta}}\right) \tag{6b}$$

și este diferită de zero. Inversa $\mathscr{A}^{-1}$ a matricii $\mathscr{A}$ este

$$\mathscr{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{A_{31}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_{42}}{A_{22}A_{43}} & 0 & \frac{1}{A_{43}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A_{51}}{A_{31}A_{54}} & 0 & \frac{1}{A_{54}} & 0 \\ 0 & -\frac{A_{62}}{A_{22}A_{65}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_{65}} \\ \frac{1}{A_{16}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{7}$$

Dacă introducem și notațiile

$$A = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{B},$$

$$\vec{B} = \mathscr{A}^{-1}(\vec{\mathscr{C}}_1 + \vec{\mathscr{C}}_2\Delta\delta_f + \vec{\mathscr{C}}_3\Delta\delta_a + \vec{\mathscr{C}}_4\Delta\delta_e + \vec{\mathscr{C}}_5\Delta\delta_d + \vec{\mathscr{C}}_6 + \vec{\mathscr{C}}_7 + \\ + \mathscr{B}_1\vec{y} - \mathscr{A}_1\dot{\vec{y}}), \tag{8}$$

atunci sistemul (4) primește forma normală

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y} + \vec{B}. \tag{9a}$$

Pe componente (9a) se scrie

$$\dot{y}_i = a_{ij}\,y_j + b_i(t), \quad (i = 1,2, \ldots, 6) \tag{9b}$$

unde s-a folosit convenția de sumare după indicii care se repetă.

5. REPREZENTAREA SOLUȚIEI SISTEMULUI (9)

Vom descompune vectorul $\vec{B}$ din (8) în componentele $\vec{L}$ și $\vec{G}$,

$$\vec{B} = \vec{L} + \vec{G}, \tag{10}$$

unde

$$\vec{L} = \mathscr{A}^{-1}(\vec{\mathscr{C}}_1 + \vec{\mathscr{C}}_2\Delta\delta_f + \vec{\mathscr{C}}_3\Delta\delta_a + \vec{\mathscr{C}}_4\Delta\delta_e + \vec{\mathscr{C}}_5\Delta\delta_d + \vec{\mathscr{C}}_6),$$

$$\vec{G} = \mathscr{A}^{-1}(\vec{\mathscr{C}}_7 + \mathscr{B}_1\vec{y} - \mathscr{A}_1\dot{\vec{y}}). \tag{11}$$

Se observă că vectorul $\vec{L}$ este o funcție cunoscută de timpul t, iar vectorul $\vec{G}$ este necunoscut (depinde de $\vec{y}$ și $\dot{\vec{y}}$). În plus, $\vec{G}$ se anulează la momentul inițial t_0, $\vec{G}(t_0) = \vec{0}$.

Pentru reprezentarea soluției sistemului (9) care satisface condițiile inițiale (5) vom presupune, pentru început, că vectorul $\vec{B}$ (care conține și partea neliniară a sistemului de ecuații) este cunoscut. Aceasta poate însemna, spre exemplu, expresia (10) în care considerăm $\vec{G} = \vec{0}$. Pe de altă parte, raționamentele care urmează sînt valabile indiferent dacă $\vec{B}$ (respectiv $\vec{G}$) este cunoscut sau nu.

Fie $\Phi(t) = (\varphi_{ij})$, $(i, j = 1,2, \ldots . 6)$ matricea fundamentală a sistemului omogen (9) care pentru $t = t_0$ coincide cu matricea unitate. Construcția acestei matrice este dată în ANEXĂ. De îndată ce Φ este cunoscută, soluția sistemului neomogen (9) cu condiții inițiale nule se scrie, oricare ar fi vectorul $\vec{B}$, sub forma (vezi [4])

$$\vec{y}(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\xi)\, \vec{B}(\xi)\, d\xi, \tag{12a}$$

unde Φ^{-1} este inversa matricii Φ. Pe componente (12a) se scrie

$$y_i(t) = \varphi_{ik}(t) \left[\int_{t_0}^{t} \varphi_{kj}^{-1}(\xi)\, b_j(\xi)\, d\xi \right], \quad (i = 1,2, \ldots, 6) \tag{12b}$$

folosindu-se, din nou, convenția de sumare după indicii care se repetă, iar $b_j(\xi)$ sînt componentele vectorului $\vec{B}$ din (10).

Deoarece funcțiile $b_j(\xi)$ depind, prin intermediul vectorului $\vec{G}$ din (11), de $y_1, y_2, \ldots, y_6$, precum și de derivatele acestor funcții, reprezentarea (12) a soluției sistemului (9) poate fi privită ca un sistem de ecuații integrale neliniare pentru determinarea necunoscutelor y_i $(i = 1,2, \ldots, 6)$. Dacă, în schimb, considerăm $\vec{G} = \vec{0}$, adică neglijăm termenii neliniari, atunci (13) ne furnizează direct soluția cînd bracajele flapsului, aripoarei, profundorului, direcției și (sau) frînelor aerodinamice sînt funcții cunoscute de timp. Desigur, această soluție corespunde, dacă considerăm în (3) și vectorul $\vec{\mathscr{C}}_6 = \vec{0}$, aproximației liniare a sistemului ecuațiilor de mișcare (vezi [5], [6]).

În concluzie, cu descompunerea (10) a vectorului $\vec{B}$, soluția sistemului (9) cu condiții inițiale nule se poate reprezenta sub forma

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_L(t) + \vec{z}(t), \tag{13}$$

unde

$$\vec{y}_L(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\xi)\, \vec{L}(\xi)\, d\xi, \tag{14}$$

iar

$$\vec{z}(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\xi)\,\vec{G}(\xi)\,d\xi. \tag{15}$$

Aşadar, sistemul de ecuaţii integrale (12) se poate reprezenta sub forma (13), unde funcţiile necunoscute apar numai în vectorul $\vec{z}$.

6. DETERMINAREA RĂSPUNSULUI AVIONULUI

Pentru determinarea răspunsului avionului la comenzi trebuie rezolvat sistemul constituit din ecuaţiile integrale (13) şi ecuaţiile diferenţiale (3) din [1]. Dacă θ_0 şi φ_0 sînt valorile unghiurilor θ şi φ la momentul $t = t_0$, deducem

$$\theta(t) = \theta_0 + \Delta\theta(t), \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi(t), \tag{16}$$

unde

$$\Delta\theta(t) \equiv T_1(q, r, \varphi) = \int_{t_0}^{t} [q(\xi)\cos\varphi(\xi) - r(\xi)\sin\varphi(\xi)]\,d\xi, \tag{17}$$

$$\Delta\varphi(t) \equiv T_2(p, q, r, \theta, \varphi) = \int_{t_0}^{t} p(\xi)d\xi + \int_{t_0}^{t} [q(\xi)\sin\varphi(\xi) +$$

$$+ r(\xi)\cos\varphi(\xi)]\,\mathrm{tg}\,\theta(\xi)d\xi.$$

Se observă că la momentul iniţial funcţiile $\Delta\theta$ şi $\Delta\varphi$ (respectiv T_1 şi T_2) se anulează.

Dacă completăm vectorul $\vec{y}$ din (3) al funcţiilor necunoscute cu componentele $y_7 = \Delta\theta$ şi $y_8 = \Delta\varphi$, atunci relaţiile (12) şi (17) ne permit determinarea răspunsului avionului din

$$\vec{y}(t) \equiv \begin{cases} y_i(t) = \varphi_{ik}(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} \varphi_{kj}^{-1}(\xi)\,b_j(\xi)\,d\xi, \quad (i = 1,2,\ldots,6) \\ y_7(t) = T_1(q, r, \varphi) \\ y_8(t) = T_2(p, q, r, \theta, \varphi). \end{cases} \tag{18}$$

7. APROXIMAREA SOLUŢIEI

Soluţia sistemului de ecuaţii integrale neliniare (18) se poate obţine printr-un şir de aproximaţii succesive. Un astfel de procedeu va fi descris în continuare.

Fie $\vec{y}^{(1)} = \vec{y}_L(t)$ prima aproximație pentru primele 6 componente ale vectorului $\vec{y}$ din (18), $\vec{y}_L(t)$ fiind cunoscut și definit în (14). Prima aproximație pentru componentele y_7 și y_8 ale vectorului $\vec{y}$ se pot lua nule, adică $y_7^{(1)} = 0$ și $y_8^{(1)} = 0$. Prin urmare, $\vec{y}^{(1)}$ corespunde cazului cînd considerăm $\vec{z} = \vec{0}$, adică $\vec{G} = \vec{0}$, în reprezentarea (13), precum și $T_1 = 0$, respectiv $T_2 = 0$ în (18).

Cu ajutorul lui $\vec{y}^{(1)}$ determinat anterior, relațiile (2) permit calculul primei aproximații a componentelor C_{17}, C_{27}, C_{37}, C_{47}, C_{57} și C_{67} ale vectorului $\vec{\mathscr{C}}_7$ din (3), iar a doua relație din (11) permite calculul primei aproximații a vectorului $\vec{G}$. În continuare, cu $\vec{G}$ astfel determinat, din (15) obținem a doua aproximație a vectorului $\vec{z}(t)$ și, în final, din (18) a doua aproximație a soluției sistemului de ecuații integrale. Dacă notăm cu $\vec{G}^{(1)}$ prima aproximație a vectorului $\vec{G}$, $\vec{G}^{(1)} = \vec{G}[\vec{y}^{(1)}, \dot{\vec{y}}^{(1)}, t]$, atunci a doua aproximație a soluției este

$$\vec{y}^{(2)} = \vec{y}^{(1)} + \vec{z}^{(2)}, \tag{19}$$

unde

$$\vec{z}^{(2)} = \begin{cases} \Phi(t) \displaystyle\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\xi)\, \vec{G}^{(1)}(\xi)\, d\xi, & (i = 1,2, \ldots, 6) \\ T_1[\vec{y}^{(1)}], & (i = 7) \\ T_2[\vec{y}^{(1)}], & (i = 8). \end{cases} \tag{20}$$

La pasul următor se reia întregul algoritm descris anterior, considerînd în locul lui $\vec{y}^{(1)}$ noua aproximație $\vec{y}^{(2)}$. În felul acesta se calculează următoarea corecție $\vec{G}^{(2)}$ a vectorului $\vec{G}$, $\vec{G}^{(2)} = \vec{G}[\vec{y}^{(2)}, \dot{\vec{y}}^{(2)}, t]$, iar din (18) noua corecție a soluției.

Procesul de aproximații succesive continuă în acest mod, astfel că la pasul n avem reprezentarea

$$\vec{y}^{(n)} = \vec{y}_L + \vec{z}^{(n)}, \tag{21}$$

unde

$$\vec{z}^{(n)} = \begin{cases} \Phi(t) \displaystyle\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\xi)\, \vec{G}^{(n-1)}(\xi)\, d\xi, & (i = 1,2, \ldots, 6) \\ T_1[\vec{y}^{(n-1)}], & (i = 7) \\ T_2[\vec{y}^{(n-1)}], & (i = 8). \end{cases} \tag{22}$$

Calculul se consideră încheiat atunci cînd, într-o anumită normă, distanța dintre două aproximații succesive este mai mică decît un număr dat a priori.

8. EXISTENȚA ȘI UNICITATEA SOLUȚIEI

Pentru ca problema să se poată considera rezolvată, este necesar să demonstrăm că procesul de aproximații succesive a soluției descris în § 7 converge și că limita șirului respectiv satisface sistemul de ecuații integrale neliniare (18). Dar, pentru a putea descrie convergența, este necesar ca în mulțimea de funcții în care căutăm soluția să definim o normă.

În vederea definirii normei, remarcăm mai întîi faptul că funcțiile cunoscute ale problemei, adică derivatele aerodinamice și bracajele suprafețelor de comandă, sînt mărginite pentru orice $t\in[t_0, T]$. Putem admite că aceste funcții au discontinuități de prima speță într-un număr finit de puncte, așadar că ele sînt integrabile Riemann pe orice interval compact. În plus, matricea fundamentală Φ și inversa sa Φ^{-1} (vezi ANEXA) sînt indefinit derivabile, în particular aceste funcții sînt și mărginite pe intervalele compacte.

Vom studia mișcarea avionului pentru $t\in[t_0, T]$, $T<\infty$. Soluția $\vec{z}$, conform (15), a problemei o căutăm în mulțimea X a funcțiilor derivabile, cu derivata mărginită pe intervalul $[t_0, T]$. În plus, funcțiile din X și derivatele lor de ordinul întîi se anulează pentru $t = t_0$. În X definim norma vectorului $\vec{z}$, care are componentele $z_i (i = 1,2, \ldots, 8)$, prin

$$\|\vec{z}\| = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant 8\\ t\in[t_0,\ T]}} (|z_i|,\ |\dot{z}_i|), \tag{23}$$

maxim care există deoarece funcțiile care intervin sînt mărginite. Cu norma (23) mulțimea X devine un spațiu Banach (vezi [7]).

Pentru orice vector $\vec{z}\in X$ definim operatorul F prin expresiile

$$F\vec{z} = \begin{cases} \Phi(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\xi)\,\vec{G}(\xi)\,d\xi, & \text{pentru } i = 1,2,\ldots, 6\\ T_1(\vec{z}), & \text{pentru } i = 7\\ T_2(\vec{z}), & \text{pentru } i = 8 \end{cases} \tag{24}$$

funcția vectorială $\vec{G}(\vec{z}, \dot{\vec{z}})$ fiind definită în (11), iar funcțiile scalare $T_1(\vec{z})$ și $T_2(\vec{z})$ în (17). Din cele expuse anterior rezultă că definiția (24) a operatorului F are sens și că vectorul imagine aparține mulțimii X, $F\vec{z}\in X$. Deci $F : X \to X$.

Fie $f_i(z_1, z_2, \cdots, z_8, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \ldots, \dot{z}_8)$ componentele vectorului $F\vec{z}$. Din (24) se observă că funcțiile f_i sînt derivabile cel puțin pînă la ordinul 2 în raport cu argumentele de care depind. Deoarece f_i și derivatele lor de ordinul I se anulează în origine, într-o anumită vecinătate a acesteia componentele vectorului imagine $F\vec{z}$ admit o dezvoltare Mac Laurin de forma

$$f_i = \sum_{j,k=1}^{16} \frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial y_j\,\partial y_k} y_j y_k + \ldots\ldots, \quad (i = 1,2,\ldots, 8) \tag{25}$$

unde y_j (respectiv y_k) reprezintă una din variabilele z_i sau $\dot{z}_i$ ($i = 1,2, \ldots, 8$) de care depind funcțiile f_i.

Fie $\vec{z} \in X$ cu proprietatea $\|\vec{z}\| < 1$. Din definiția (24) a lui F, și din (25) rezultă că există $M > 0$ astfel încît

$$\|F\vec{z}\| \leqslant M\|\vec{z}\|^2 \tag{26}$$

și M nu depinde de $\vec{z}$. O modalitate de alegere a lui M este, de exemplu, $M = \sup \|F\vec{z}\|$ pentru $\vec{z}$ parcurgînd sfera unitate, $\|\vec{z}\| = 1$. Dacă ținem seama de (25) putem alege

$$M = \sup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 8 \\ 1 \leqslant j,\, k \leqslant 16}} \left| \frac{\partial^2 f_i(0)}{\partial y_j \, \partial y_k} \right|, \tag{27}$$

unde nu am luat în considerație faptul că o parte din derivatele $\dfrac{\partial^2 f_i(0)}{\partial y_j \, \partial y_k}$ sînt nule, fapt care ar fi condus la determinarea unei valori mai mici a lui M decît cea din (27). Fie $0 < \rho < 1$. Dacă $\rho/M \leqslant 1$ și $\|\vec{z}\| < \rho/M$ atunci din (26) rezultă

$$\|F\vec{z}\| < \rho\|\vec{z}\|. \tag{28}$$

Prin urmare, pe submulțimea $X' \subset X$ a tuturor funcțiilor derivabile și cu derivata mărginită pentru care $\|\vec{z}\| < \rho/M$ operatorul F este o contracție. Aceasta înseamnă (vezi [9]) că ecuația $\vec{z} = F\vec{z}$ are un punct fix cel puțin într-o vecinătate suficient de mică a momentului inițial t_0. Cu alte cuvinte, procesul de aproximații succesive descris în §7 converge către soluția unică $\vec{z}$ a problemei.

Facem remarca importantă că mulțimea X' pe care operatorul F este contracție nu este vidă. Aceasta rezultă din faptul că $\vec{z}(T_0) = \dot{\vec{z}}(t) = \vec{0}$ și în virtutea continuității funcțiilor $\vec{z}$ și $\dot{\vec{z}}$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $T > 0$ astfel încît dacă $t \in [t_0, T]$ să avem $\|\vec{z}\| < \varepsilon$. În particular, această afirmație este valabilă pentru $\varepsilon = \rho/M$.

9. UNELE OBSERVAȚII PRIVIND INTEGRAREA NUMERICĂ

În acest paragraf vom face cîteva considerații privind integrarea numerică a sistemului de ecuații integrale (13) sau (18), rezultate din experiența de calcul a autorului.

Avînd în vedere că soluția problemei este căutată într-o clasă de funcții suficient de netede, în procesul de integrare numerică s-a folosit metoda trapezelor, deoarece aceasta conduce la simplificări importante ale algoritmului de calcul. Așadar, avînd ca bază această metodă de integrare, vom aborda cu prioritate problema determinării pasului de timp optim Δt, cînd mișcarea avionului este studiată pe un interval $[t_0, T]$ dat.

Prin pas de timp „optim" vom înțelege acel pas maxim Δt care asigură o precizie acceptabilă a calculului numeric. Faptul că Δt trebuie să fie cît mai mare rezultă din necesitatea de a urmări evoluția avionului un timp cît mai îndelungat și din faptul că memoria calculatorului electronic este limitată. Pe de altă parte, Δt nu poate fi oricît de mare și anume nu poate depăși acea valoare pentru care eroarea relativă maximă a soluției, în norma (23), depășește anumite limite a priori impuse (de exemplu 1%). Prin urmare, pasul Δt „optim" este un compromis rezonabil între mai multe cerințe contradictorii.

Pentru a ne face o anumită imagine asupra acestor probleme s-a considerat sistemul liniar și neomogen

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 - y_1 + 1, \\ \dot{y}_2 &= y_2 - 2y_1 + 1, \\ \dot{y}_3 &= y_2 + y_3 + 1, \end{aligned} \tag{29}$$

cu condiții inițiale nule și care are soluția

$$\begin{aligned} y_1 &= \sin t, \\ y_2 &= \sin t + \cos t - 1, \\ y_3 &= e^t - \cos t. \end{aligned} \tag{30}$$

Faptul că în soluția fundamentală Φ a sistemului omogen (13) care la momentul inițial t_0 coincide cu matricea unitate (vezi ANEXA) intervin funcțiile $\sin t$, $\cos t$ și e^t justifică alegerea sistemului simplificat (29) drept sistem test pentru determinarea pasului de timp optim.

Soluția (30) a sistemului (29) poate fi reprezentată sub forma (12) și calculată prin metoda de integrare numerică descrisă în §7. Matricea A și vectorul B care corespund acestui sistem, în conformitate cu (9), sînt

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Calculele s-au făcut pentru intervalul de timp $t \in [0, 2]$ secunde. A fost variat pasul Δt, iar rezultatele sînt prezentate în tabelul T—1 la momentul $t = 2$ sec.

Tabelul T—1

MĂRIMEA		y_1	y_2	y_3	$\dot{y}_1$	$\dot{y}_2$	$\dot{y}_3$	*ABATERE MAXIMĂ*
VALOAREA EXACTĂ		0,90930	−0,50685	7,80520	−0,41614	−1,32544	8,29835	0
VALOAREA APROXIMATIVĂ	Δt=0,01	0,90930	−0,50685	7,80524	−0,41613	−1,32542	8,29840	0,002 %
	Δt=0,05	0,90911	−0,50674	7,80624	−0,41585	−1,32496	8,29949	0,07 %
	Δt=0,1	0,90854	−0,50643	7,90934	−0,41496	−1,32235	8,30291	0,3 %
	Δt=0,2	0,90626	−0,50516	7,82176	−0,41142	−1,31768	8,31660	1,13 %
	Δt=0,5	0,89027	−0,49624	7,90813	−0,38652	−1,27679	8,41188	7 %

Comparație între soluția exactă și cea aproximativă la momentul $t = 2$ sec. pentru sistemul (29).

S-a ales momentul $t = 2$ sec. deoarece în acest punct (extremitatea din dreapta a intervalului) se acumulează erorile cele mai mari datorită metodei de integrare.

După cum se observă în T—1, cel mai mic pas de timp care s-a considerat a fost $\Delta t = 0{,}01$ sec., iar cel mai mare $\Delta t = 0{,}5$ sec. Pentru fiecare mărime din coloanele 2—7 s-a calculat abaterea, în norma (23), față de valorile exacte din linia 2. Erorile relative maxime, în procente, au fost numite abateri maxime și sînt trecute în coloana 8 a tabelului.

Analizînd valorile din tabelul T—1 se poate constata că precizia metodei de integrare numerică prin aproximația trapezelor este remarcabilă. În plus, pentru obținerea acestor valori au fost necesare numai două iterații în programul de calcul.

Avînd în vedere forma matricii fundamentale Φ, putem admite că pentru sistemul complet al ecuațiilor de mișcare ale avionului soluția are o comportare similară cu cea a sistemului (29). Din considerente de ordin practic, putem admite că o precizie de ordinul 1% este suficientă pentru calculul răspunsului avionului. Aceasta înseamnă că pentru manevrele uzuale, care au o durată de ordinul a cîteva secunde (vezi [2]), este recomandabil să considerăm ca valoare de referință pentru pasul de timp valoarea $\Delta t = 0{,}1$ sec. Totuși, pentru diferite cazuri din practică este necesar să se studieze convergența soluției pentru valori ale lui Δt apropiate de această valoare de referință, urmînd ca decizia finală asupra alegerii lui Δt, în fiecare caz concret, să fie luată în urma acestei analize.

10. ANEXĂ

Determinarea matricii fundamentale Φ a sistemului liniar și omogen

Ne propunem să determinăm matricea fundamentală Φ a sistemului liniar și omogen corespunzător sistemului neliniar (9), care la momentul inițial $t = t_0$ coincide cu matricea unitate. Prin urmare, considerăm sistemul

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{6} a_{ij}\, x_j, \quad (i = 1,2, \ldots, 6). \tag{A1}$$

matricea constantă $A = (a_{ij})$ fiind definită în (8).

Avînd în vedere forma particulară a matricii A, un sistem fundamental pentru (A1) se poate obține căutînd soluții de forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_4 \\ A_6 \end{bmatrix} e^{\lambda(t-t_0)}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \\ A_5 \end{bmatrix} e^{\mu(t-t_0)}, \tag{A2}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_6$ fiind constante. Dacă înlocuim (A2) în (A1) se obțin două sisteme liniare și omogene în necunoscutele A_1, A_4 și A_6, respectiv A_2, A_3

și A_5. Condiția ca fiecare din aceste sisteme să aibă soluție nebanală revine la anularea determinanților caracteristici Δ_1 și Δ_2. Dacă ținem seama de (8), (7) și (3) aceștia sînt

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{14} & 0 \\ a_{41} & a_{44}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2(\mu) = \begin{vmatrix} a_{22}-\mu & 0 & a_{25} \\ a_{32} & a_{33}-\mu & a_{35} \\ a_{52} & 0 & a_{55}-\mu \end{vmatrix} = 0. \tag{A3}$$

Se observă că prima ecuație caracteristică din (A3) are rădăcina reală $\lambda_3 = 0$, iar celelalte se obțin prin rezolvarea unei ecuații de gradul doi. Presupunem că rădăcinile acestei ecuații sînt complexe, care trebuie să fie și conjugate. În mod similar, a doua ecuație caracteristică din (A3) are rădăcina reală $\mu_3 = a_{33}$, iar celelalte două presupunem, de asemenea, că sînt complexe. Prin urmare, vom avea

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a+bi, \quad \mu_1 = c+di, \\ \lambda_2 &= a-bi, \quad \mu_2 = c-di, \\ \lambda_3 &= 0, \qquad \mu_3 = \mu_3, \end{aligned} \tag{A4}$$

a, b, c, d și μ_3 fiind numere reale.

Presupunem că în locul lui λ, respectiv μ, din (A2) substituim una din valorile date în (A4). Determinanții Δ_1 și Δ_2 vor fi nuli pentru orice λ_i, respectiv μ_i, deci sistemele omogene care se obțin au soluții nebanale A_{1i}, A_{2i}, ..., A_{6i} $(i = 1, 2, 3)$. Deoarece rangul matricilor $A-\lambda E$, respectiv $A-\mu E$, $E = (\delta_{ij})$ fiind matricea unitate, este 2, necunoscutele A_1, A_4 și A_6, respectiv A_2, A_3 și A_5 se determină cu aproximația unui factor arbitrar de proporționalitate. Astfel, putem lua drept A_{1i}, A_{4i}, A_{6i} și A_{2i}, A_{3i}, A_{5i} $(i = 1, 2, 3)$ complemenții algebrici ai oricărei linii a determinanților $\Delta_1(\lambda_i)$, respectiv $\Delta_2(\mu_i)$, pentru care nu toți acești minori sînt nuli. Dacă luăm, spre exemplu, atît în Δ_1 cît și în Δ_2 complemenții algebrici ai primei linii pentru valorile oarecari $\lambda = \lambda_i$ și $\mu = \mu_i$ obținem

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda(\lambda - a_{44}), \quad A_2 = (a_{33} - \mu)(a_{55} - \mu), \\ A_4 &= \lambda a_{41}, \qquad A_3 = a_{52}a_{35} - a_{32}(a_{55} - \mu), \\ A_6 &= 0, \qquad A_5 = a_{52}(\mu - a_{33}). \end{aligned} \tag{A5}$$

Deoarece A_1, A_4 și A_6 sînt proporționali cu λ și cum aceste constante sînt determinate cu aproximația unui factor arbitrar de proporționalitate, rezultă că putem lua

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda - a_{44}, \\ A_2 &= a_{41}, \\ A_6 &= 0 \end{aligned} \tag{A5'}$$

Rădăcinilor λ_1, λ_2 și λ_3, respectiv μ_1, μ_2 și μ_3, le corespund șase vectori proprii $\vec{A}'_1$, $\vec{A}'_2$, $\vec{A}'_3$, $\vec{A}'_4$, $\vec{A}'_5$, $\vec{A}'_6$ și șase soluții particulare de forma (A2), care constituie un sistem fundamental de soluții în domeniul $t_0 \leqslant t < \infty$ și

$|x_i| < \infty$. Folosind notația $\tau = t - t_0$, soluția generală a sistemului omogen (A1) este

$$\vec{X}' = C_1'\vec{A}_1'e^{\lambda_1\tau} + C_2'\vec{A}_2'e^{\mu_1\tau} + C_3'\vec{A}_3'e^{\mu_2\tau} + C_4'\vec{A}_4'e^{\lambda_2\tau} + C_5'\vec{A}_5'e^{\mu_3\tau} + C_6'\vec{A}_6', \tag{A6}$$

unde $C_1', C_2', \ldots, C_6'$ sînt constante arbitrare. Vectorii proprii sînt dați de expresiile

$$\vec{A}_1' = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \\ 0 \\ A_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\lambda=\lambda_1}, \quad \vec{A}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ A_2 \\ A_3 \\ 0 \\ A_5 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mu=\mu_1}, \quad \vec{A}_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ A_2 \\ A_3 \\ 0 \\ A_5 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mu=\mu_2}, \quad \vec{A}_4' = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \\ 0 \\ A_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\lambda=\lambda_2},$$

$$\vec{A}_5' = \begin{bmatrix} 0 \\ A_2 \\ A_3 \\ 0 \\ A_5 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mu=\mu_3}, \quad \vec{A}_6' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{A7}$$

Considerînd expresiile (A4) pentru λ_i și μ_i ($i = 1, 2, 3$) obținem

$$\vec{A}_1' = \begin{bmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_4 + i\beta_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{A}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \\ \alpha_3 + i\beta_3 \\ 0 \\ \alpha_5 + i\beta_5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{A}_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 - i\beta_2 \\ \alpha_3 - i\beta_3 \\ 0 \\ \alpha_5 - i\beta_5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{A}_4' = \begin{bmatrix} \alpha_1 - i\beta_1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_4 - i\beta_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{A}_5' = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ 0 \\ \gamma_5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{A}_6' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{A8}$$

unde

$$\alpha_1 = a - a_{44}, \quad \beta_1 = b,$$

$$\alpha_2 = (c - a_{33})\ (c - a_{55}) - d^2, \quad \beta_2 = -d\,(a_{33} + a_{55} - 2c), \quad \gamma_2 = (\mu_3 - a_{33})\ (\mu_3 - a_{55}) = 0,$$

$$\alpha_3 = a_{52}a_{35} - a_{32}\,(a_{55} - c), \quad \beta_3 = da_{32}, \quad \gamma_3 = a_{52}a_{35} - a_{32}\,(a_{55} - \mu_3), \tag{A9}$$

$$\alpha_4 = a_{41}, \quad \beta_4 = 0,$$

$$\alpha_5 = a_{52}\,(c - a_{33}), \quad \beta_5 = da_{52}, \quad \gamma_5 = -a_{52}\,(a_{33} - \mu_3) = 0.$$

Un sistem fundamental de soluţii pentru (A1) este

$$\vec{X}_1' = \vec{A}_1' e^{(a+bi)\tau}, \quad \vec{X}_2' = \vec{A}_2' e^{(c+di)\tau}, \quad \vec{X}_3' = \vec{A}_3' e^{(c-di)\tau},$$

$$\vec{X}_4' = \vec{A}_4' e^{(a-bi)\tau}, \quad \vec{X}_5' = \vec{A}_5' e^{\mu_3 \tau}, \quad \vec{X}_6' = \vec{A}_6', \tag{A10}$$

vectorii $\vec{A}_1', \vec{A}_2', \ldots, \vec{A}_6'$ fiind daţi în (A8). Dacă ţinem seama de (A8), sistemul fundamental (A10) se mai poate scrie sub forma

$$\vec{X}_1' = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cos b\tau - \beta_1 \sin b\tau + \mathrm{i}(\alpha_1 \sin b\tau + \beta_1 \cos b\tau) \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_4 \cos b\tau - \beta_4 \sin b\tau + \mathrm{i}(\alpha_4 \sin b\tau + \beta_4 \cos b\tau) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{a\tau},$$

$$\vec{X}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \cos d\tau - \beta_2 \sin d\tau + \mathrm{i}(\alpha_2 \sin d\tau + \beta_2 \cos d\tau) \\ \alpha_3 \cos d\tau - \beta_3 \sin d\tau + \mathrm{i}(\alpha_3 \sin d\tau + \beta_3 \cos d\tau) \\ 0 \\ \alpha_5 \cos d\tau - \beta_5 \sin d\tau + \mathrm{i}(\alpha_5 \sin d\tau + \beta_5 \cos d\tau) \\ 0 \end{bmatrix} e^{c\tau},$$

$$\vec{X}_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \cos d\tau - \beta_2 \sin d\tau - \mathrm{i}(\alpha_2 \sin d\tau + \beta_2 \cos d\tau) \\ \alpha_3 \cos d\tau - \beta_3 \sin d\tau - \mathrm{i}(\alpha_3 \sin d\tau + \beta_3 \cos d\tau) \\ 0 \\ \alpha_5 \cos d\tau - \beta_5 \sin d\tau - \mathrm{i}(\alpha_5 \sin d\tau + \beta_5 \cos d\tau) \\ 0 \end{bmatrix} e^{\tau}, \tag{A11}$$

$$\vec{X}_4' = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cos b\tau - \beta_1 \sin b\tau - \mathrm{i}(\alpha_1 \sin b\tau + \beta_1 \cos b\tau) \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_4 \cos b\tau - b_4 \sin b\tau - \mathrm{i}(\alpha_4 \sin b\tau + \beta_4 \cos b\tau) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{a\tau},$$

$$\vec{X}_5' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mu_3 \tau}, \quad \vec{X}_6' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Deoarece sistemul de ecuații omogen (A1) este liniar, un alt sistem fundamental de soluții este

$$\vec{X}_1 = \frac{1}{2}(\vec{X}_1' + \vec{X}_4'), \quad \vec{X}_2 = \frac{1}{2}(\vec{X}_2' + \vec{X}_3'), \quad \vec{X}_3 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\vec{X}_2' - \vec{X}_3'),$$

$$\vec{X}_4 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\vec{X}_1' - \vec{X}_4'), \quad \vec{X}_5 = \vec{X}_5' \quad \vec{X}_6 = \vec{X}_6'. \tag{A12}$$

Prin urmare, in (A11) și (A12) obținem

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cos b\tau - \beta_1 \sin b\tau \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_4 \cos b\tau - \beta_4 \sin b\tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{a\tau}, \quad \vec{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \cos d\tau - \beta_2 \sin d\tau \\ \alpha_3 \cos d\tau - \beta_3 \sin d\tau \\ 0 \\ \alpha_5 \cos d\tau - \beta_5 \sin d\tau \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{c\tau},$$

(A13)

$$\vec{X}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \sin d\tau + \beta_2 \cos d\tau \\ \alpha_3 \sin d\tau + \beta_3 \cos d\tau \\ 0 \\ \alpha_5 \sin d\tau + \beta_5 \cos d\tau \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{c\tau}, \quad \vec{X}_4 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \sin b\tau + \beta_1 \cos b\tau \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_4 \sin b\tau + \beta_4 \cos b\tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{a\tau},$$

$$\vec{X}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\mu_3 \tau}, \quad \vec{X}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soluţia generală a sistemului (A1), scrisă cu ajutorul sistemului fundamental (A13), este

$$\vec{X} = b_1\vec{X}_1 + b_2\vec{X}_2 + b_3\vec{X}_3 + b_4\vec{X}_4 + b_5\vec{X}_5 + b_6\vec{X}_6, \tag{A14}$$

$b_1, b_2, \ldots, b_6$ fiind constante arbitrare care, pentru un caz concret, se determină din condiţiile iniţiale. Pe componente, soluţia generală (A14) se scrie

$$x_i = \sum_{j=1}^{6} b_j f_{ij}(\tau), \quad (i = 1,2, \ldots, 6) \tag{A15}$$

în care elementele matricii fundamentale $F = (f_{ij})$ sînt definite prin

$$\begin{aligned}
f_{i1} &= (\alpha_i \cos b\tau - \beta_i \sin b\tau)\, e^{a\tau}, \quad (i = 1, 4) \\
f_{i2} &= (\alpha_i \cos d\tau - \beta_i \sin d\tau)\, e^{c\tau}, \quad (i = 2, 3, 5) \\
f_{i3} &= (\alpha_i \sin d\tau + \beta_i \cos d\tau)\, e^{c\tau}, \quad (i = 2, 3, 5) \\
f_{i4} &= (\alpha_i \sin b\tau + \beta_i \cos b\tau)\, e^{a\tau}, \quad (i = 1, 4) \\
f_{35} &= \gamma_3\, e^{\mu_3\tau}, \quad f_{66} = 1,
\end{aligned} \tag{A16}$$

restul elementelor f_{ij} fiind toate nule.

Matricea fundamentală Φ a sistemului omogen care pentru $t = t_0$ se reduce la matricea unitate se poate obţine din (A16) deoarece fiecare vector coloană al matricii $F = (f_{ij})$ este soluţie. Prin urmare, elementele matricii Φ se exprimă prin

$$\varphi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{6} C_{jk} f_{ik}(t), \quad (i, j = 1,2, \ldots, 6). \tag{A17}$$

Constantele C_{jk} se determină din condiţia

$$\varphi_{ij}(t_0) = \delta_{ij}, \tag{A18}$$

care revine la rezolvarea sistemului de ecuaţii algebrice

$$\sum_{k=1}^{6} C_{ij} f_{ik}(0) = \delta_{ij}. \tag{A19}$$

Dacă ţinem seama de (A16), sistemul (A19) devine

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 C_{11} + \beta_1 C_{14} = 1,\\
&\alpha_2 C_{12} + \beta_2 C_{13} = 0,\\
&\alpha_3 C_{12} + \beta_3 C_{13} + \gamma_3 C_{15} = 0,\\
&\alpha_4 C_{11} + \beta_4 C_{14} = 0,\\
&\alpha_5 C_{12} + \beta_5 C_{13} = 0,\\
&C_{16} = 0\,;
\end{aligned} \qquad \text{(A20 a)}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 C_{21} + \beta_1 C_{24} = 0,\\
&\alpha_2 C_{22} + \beta_2 C_{23} = 1,\\
&\alpha_3 C_{22} + \beta_3 C_{23} + \gamma_3 C_{25} = 0,\\
&\alpha_4 C_{21} + \beta_4 C_{24} = 0,\\
&\alpha_5 C_{22} + \beta_5 C_{23} = 0,\\
&C_{26} = 0\,;
\end{aligned} \qquad \text{(A20 b)}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 C_{31} + \beta_1 C_{34} = 0,\\
&\alpha_2 C_{32} + \beta_2 C_{33} = 0,\\
&\alpha_3 C_{32} + \beta_3 C_{33} + \gamma_3 C_{35} = 1,\\
&\alpha_4 C_{31} + \beta_4 C_{34} = 0,\\
&\alpha_5 C_{32} + \beta_5 C_{33} = 0,\\
&C_{36} = 0\,;
\end{aligned} \qquad \text{(A20 c)}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 C_{41} + \beta_1 C_{44} = 0,\\
&\alpha_2 C_{42} + \beta_2 C_{43} = 0,\\
&\alpha_3 C_{42} + \beta_3 C_{43} + \gamma_3 C_{45} = 0,\\
&\alpha_4 C_{41} + \beta_4 C_{44} = 1,\\
&\alpha_5 C_{42} + \beta_5 C_{43} = 0,\\
&C_{46} = 0\,;
\end{aligned} \qquad \text{(A20 d)}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 C_{51} + \beta_1 C_{54} = 0,\\
&\alpha_2 C_{52} + \beta_2 C_{53} = 0,\\
&\alpha_3 C_{52} + \beta_3 C_{53} + \gamma_3 C_{55} = 0,\\
&\alpha_4 C_{51} + \beta_4 C_{54} = 0,\\
&\alpha_5 c_{52} + \beta_5 C_{53} = 1,\\
&C_{56} = 0\,;
\end{aligned} \qquad \text{(A20 e)}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 C_{61} + \beta_1 C_{64} = 0,\\
&\alpha_2 C_{62} + \beta_2 C_{63} = 0,\\
&\alpha_3 C_{62} + \beta_3 C_{63} + \gamma_3 C_{65} = 0,\\
&\alpha_4 C_{61} + \beta_4 C_{64} = 0\\
&\alpha_5 C_{62} + \beta_5 C_{63} = 0\\
&C_{66} = 1.
\end{aligned} \qquad \text{(A20 f)}$$

Se observă că în sistemul de ecuații algebrice (A20) necunoscutele C_{ij} sînt grupate în cîte 5 ecuații. În (A20a) sînt grupate necunoscutele C_{1j} ($j = 1,2, \ldots, 5$), în (A20 b) sînt C_{2j} etc. În plus, ecuațiile 1 și 4 din fiecare grup conțin necunoscutele C_{j1} și C_{j4}, iar ecuațiile 2,3 și 5 necunoscutele C_{j2}, C_{j3} și C_{j5} ($j = 1,2, \ldots, 5$). Aceste particularități ușurează modul de rezolvare pentru C_{ij}.

Fie determinanții

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_5 & \beta_5 & 0 \end{vmatrix} \tag{A21}$$

care sînt diferiți de zero deoarece matricea $F = (f_{ij})$, ale cărei elemente sînt definite în (A16), constituie un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen (A1). Avînd în vedere această remarcă, rezultă că fiecare dintre sistemele (A20) are soluție unică. În particular, sistemul omogen (A20f) admite numai soluția banală. Prin urmare, $C_{61} = C_{62} = C_{63} = C_{64} = C_{65} = 0$ și $C_{66} = 1$.

Constantele C_{ij} diferite de zero care se obțin după rezolvarea sistemului (A20) au expresiile

$$\begin{aligned}
C_{14} &= -\alpha_4/D_1, \\
C_{41} &= -\beta_1/D_1, \\
C_{44} &= \alpha_1/D_1, \\
C_{22} &= -\gamma_3\beta_5/D_2, \\
C_{23} &= \gamma_3\alpha_5/D_2, \\
C_{25} &= (\alpha_3\beta_5 - \beta_3\alpha_5)/D_2, \\
C_{35} &= (\beta_2\alpha_5 - \alpha_2\beta_5/D_2, \\
C_{52} &= \beta_2\gamma_3/D_2, \\
C_{53} &= -\alpha_2\gamma_3/D_2, \\
C_{55} &= (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)/D_2.
\end{aligned} \tag{A22}$$

Prin urmare, dacă ținem seama și de (A17), elementele nenule ale matricii fundamentale $\Phi = (\varphi_{ij})$ sînt

$$\varphi_{11}(\tau) = (\cos b\tau + \alpha_1 C_{14} \sin b\tau)\, e^{a\tau},$$

$$\varphi_{14}(\tau) = \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{D_1} e^{a\tau} \sin b\tau,$$

$$\varphi_{22}(\tau) = [(\alpha_2 C_{22} + \beta_2 C_{23}) \cos d\tau + (\alpha_2 C_{23} - \beta_2 C_{22}) \sin d\tau]\, e^{c\tau},$$

$$\varphi_{25}(\tau) = [(\alpha_2 C_{52} + \beta_2 C_{53}) \cos d\tau + (\alpha_2 C_{53} - \beta_2 C_{52}) \sin d\tau]\, e^{c\tau},$$

$$\varphi_{32}(\tau) = \gamma_3 C_{25}\, e^{\mu_3\tau} + [(\alpha_3 C_{22} + \beta_3 C_{23}) \cos d\tau + (\alpha_3 C_{23} - \beta_3 C_{22}) \sin d\tau]\, e^{c\tau},$$

$$\varphi_{33}(\tau) = \gamma_3 C_{35} e^{\mu_3 \tau},$$
$$\varphi_{35}(\tau) = \gamma_3 C_{55} e^{\mu_3 \tau} + [(\alpha_3 C_{52} + \beta_3 C_{53}) \cos d\tau + (\alpha_3 C_{53} - \beta_3 C_{52}) \sin d\tau]\ e^{c\tau}, \tag{A23}$$
$$\varphi_{41}(\tau) = -\frac{\alpha_4^2}{D_1} e^{a\tau} \sin b\tau,$$
$$\varphi_{44}(\tau) = (\cos b\tau + \alpha_4 C_{44} \sin b\tau)\ e^{a\tau},$$
$$\varphi_{52}(\tau) = [(\alpha_5 C_{22} + \beta_5 C_{23}) \cos d\tau + (\alpha_5 C_{23} - \beta_5 C_{22}) \sin d\tau]\ e^{c\tau},$$
$$\varphi_{55}(\tau) = [(\alpha_5 C_{52} + \beta_5 C_{53}) \cos d\tau + (\alpha_5 C_{53} - \beta_5 C_{52}) \sin d\tau]\ e^{c\tau},$$
$$\varphi_{66}(\tau) = 1.$$

Deci, matricea fundamentală Φ este

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & 0 & 0 & \varphi_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{22} & 0 & 0 & \varphi_{25} & 0 \\ 0 & \varphi_{32} & \varphi_{33} & 0 & \varphi_{35} & 0 \\ \varphi_{41} & 0 & 0 & \varphi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{52} & 0 & 0 & \varphi_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{A24}$$

cu elementele nenule φ_{ij} definite în (A23).

Primit în redacţie la 15 februarie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. I. ŢĂPOSU, *Determinarea componentelor sarcinilor aerodinamice pe organele avionului în cazul manevrelor neliniare arbitrare cu variaţii mici de altitudine şi viteză.* St. cerc. mec. apl., **48**, *1* (1989).
2. I. ŢĂPOSU, *Sarcinile aerodinamice pe organele avionului în cazul manevrelor longitudinale neliniare cu variaţii mici de altitudine şi viteză. I.*, St. cerc. mec. apl., **45**, *5* (1986).
3. I. ŢĂPOSU, *Sarcinile aerodinamice pe organele avionului în cazul manevrelor longitudinale neliniare cu variaţii mici de altitudine şi viteză. II.*, St. cerc., mec. apl., **46**, *1* (1987).
4. L. PONTRIAGUINE, *Équations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou, 1969.
5. T. CZAYKOWSKI, *Loading Conditions of Tailed Aircraft in Longitudinal Manœuvres*, Report & Memoranda, 3001 (1956).
6. T. CZAYKOWSKI, *Dynamic Fin and Rudder Loads in Yawing Manœuvres*, RAE, Report no. 76, June 1950.
7. L. TH. SAATY, *Nonlinear Mathematics*. Mc Graw Hill Book Company, New York, 1964.
8. T. HACKER, *Stabilitate şi comandă în teoria zborului*. Edit. Academiei Române, Bucureşti, 1968.
9. A. HALANAY, *Ecuaţii diferenţiale*, Edit. didactică şi pedagogică Bucureşti, 1962.

STABILIREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE PENTRU RIGIDUL CU LEGĂTURI ELASTICE. VIBRAȚII LIBERE

P. BRATU
INCERC, București

În lucrare se prezintă metoda de determinare a deplasărilor și deformațiilor fie în cazul unui solid rigid rezemat elastic, fie al unui sistem de rigide cu legături elastice capabile să modeleze cît mai fidel mașini și utilaje tehnologice. Prin aceasta, se formulează fără dificultate expresia energiei potențiale de deformație a elementelor elastice și implicit forțele generalizate corespunzătoare coordonatelor generalizate ale sistemului elastic.
Cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange de speța a doua se stabilește sistemul de ecuații diferențiale de mișcare.
Pentru exemplificare s-au prezentat trei cazuri distincte de mașini modelate ca sisteme complexe, ale căror modele sînt capabile să reproducă cît mai fidel modurile semnificative ale mișcării de vibrare.

1. INTRODUCERE

Modelarea solidului rigid cu legături elastice este procedura primară în analiza comportării dinamice, a structurilor și subansamblelor vitale din componența mașinilor și utilajelor tehnologice.

Soluțiile constructive ce materializează legăturile permit adoptarea ipotezei că elementele elastice sînt amplasate într-o anumită configurație geometrică, au comportare liniară și acționează fie după o singură direcție, fie simultan după două sau trei direcții rectangulare.

În prezenta lucrare se prezintă metoda de determinare a deformațiilor elementelor elastice necesare pentru stabilirea energiei potențiale, în special pentru sistemele cu foarte multe legături elastice.

Cu ajutorul expresiei energiei potențiale se determină forțele generalizate corespunzătoare coordonatelor generalizate, pe baza cărora se stabilesc ecuațiile diferențiale de mișcare.

2. DEPLASĂRI ȘI DEFORMAȚII

2.1. Deplasarea unui punct al unui rigid aflat în mișcare de vibrare. Fie rigidul din figura 1, raportat la un sistem de referință inerțial $OXYZ$, considerat fix. Se consideră un punct A al rigidului și un sistem de referință legat de rigid a cărei origine se află în centrul de masă al acestuia, fiind notat cu $Cxyz$.

Mișcările de translație ale centrului de masă C sînt determinate prin coordonatele X, Y și Z (față de sistemul fix $OXYZ$), iar mișcările de rotație sînt descrise prin deplasările unghiulare φ_x, φ_y și φ_z ale sistemului $Oxyz$ atașat rigidului în raport cu axele X, Y și respectiv Z.

Se va considera numai cazul micilor oscilații adică atît deplasările liniare (la translații instantanee) cît și deplasările unghiulare (la rotații

instantanee) cu amplitudini mici. Aceasta permite ca să adoptăm următoarele ipoteze :

— rotaţiile sînt comutative ceea ce înseamnă că poziţia rezultată este independentă de ordinea rotaţiilor componente ;

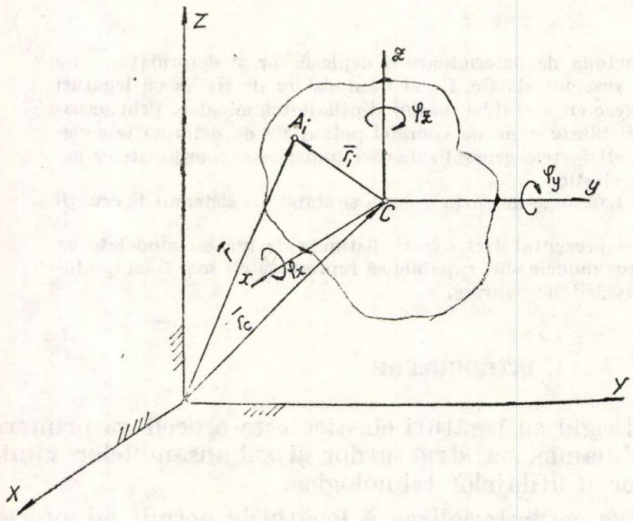


Fig. 1. — Modelul solidului rigid în mişcare generală.

— deplasările unghiulare instantanee măsurate în jurul axelor ataşate rigidului ($Cxyz$) sînt egale cu unghiurile instantanee măsurate în jurul axelor fixe $OXYZ$;

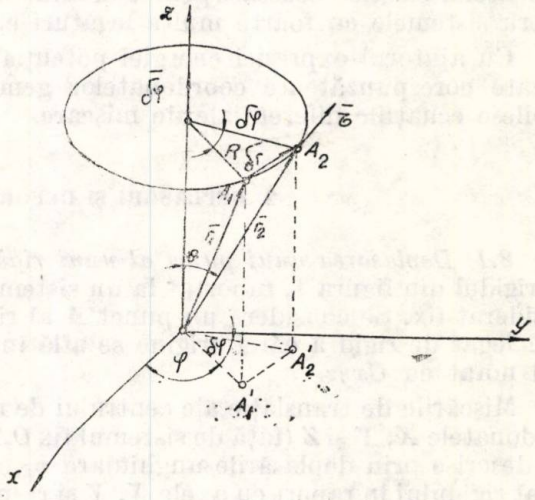


Fig. 2. — Schema pentru determinarea vectorului deplasare $\bar{r}$ funcţie de vectorul rotaţiei.

Pentru a determina poziţia unui punct oarecare A faţă de sistemul de referinţă triortogonal $Cxyz$, considerat fix, atunci cînd rigidul efectuează o mişcare instantanee de rotaţie în jurul axei Cz ; Considerăm că o

rotație de unghi finit poate fi rezultatul unei succesiuni de rotații infinitezimale [6, 11].

Se definește vectorul rotației infinitezimală $\delta\bar{\varphi}$ ca fiind vectorul caracterizat prin următoarele elemente : mărimea este egală cu valoarea $\delta\varphi$ a unghiului de rotație φ, direcția se materializează prin axa de rotație Cz și sensul este dat de regula burghiului drept [10].

Creșterea $\delta\bar{r}$ a vectorului de poziție $\bar{r}$ al punctului A de la $\bar{r}_1$ la $\bar{r}_2$, corespunzătoare rotației infinitezimale $\delta\varphi$, va avea mărimea dată de relația :

$$\delta r = R\ \delta\varphi = r\ \sin\ \theta \cdot \delta\varphi \tag{1}$$

Se observă că direcția vectorului deplasare $\delta\bar{r}$ a extremității vectorului de poziție a punctului A este perpendiculară pe planul definit de vectorii $\bar{r}$ și $\delta\bar{\varphi}$, ceea ce înseamnă că vectorul $\delta\bar{r}$ poate fi scris sub forma :

$$\delta\bar{r} = \delta\bar{\varphi} \times \bar{r} \tag{2}$$

Considerăm că rigidul din figura 1 se mișcă în raport cu sistemul triaxial $OXYZ$, considerat fix, Cz în care punctul C este mobil împreună cu sistemul de axe $Cxyz$ atașat invariabil de rigid.

Ca urmare a suprapunerii efectelor date de rotația și translația instantanee a rigidului, punctul A va avea deplasarea totală dată de relația

$$\delta\bar{u} = \delta\bar{r}_c + \delta\bar{\varphi} \times \bar{r} \tag{3}$$

Ținînd seama de faptul că deplasarea corpului, este foarte mică, caracterizînd mișcarea de vibrare, rezultă că pentru un punct oarecare A_i, $i = 1,2 \ldots n$, al rigidului relația (3) poate fi scrisă astfel :

$$\bar{u}_i = \bar{r}_c + \bar{\varphi} \times \bar{r}_i \tag{4}$$

sau :

$$\bar{u}_i = X\bar{\imath} + Y\bar{\jmath} + Z\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} \tag{5}$$

Relația (5) mai poate fi scrisă sub forma :

$$\bar{u}_i = u_{ix}\,\bar{\imath} + u_{iy}\,\bar{\jmath} + u_{iz}\,\bar{k} \tag{6}$$

în care :

$$\begin{aligned} u_{ix} &= X + z_i\,\varphi_y - y_i\,\varphi_z \\ u_{iy} &= Y + x_i\,\varphi_z - z_i\,\varphi_x \\ u_{iz} &= Z + y_i\,\varphi_x - x_i\,\varphi_y \end{aligned} \tag{7}$$

unde X, Y, Z sînt coordonatele centrului de masă C față de sistemul triortogonal $OXYZ$, considerat fix;

x_i, y_i, z_i — coordonatele punctului A_i față de sistemul triortogonal $Cxyz$ legat invariabil de rigid.

În formulare matricială avem:

$$\{u_i\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \tag{8}$$

sau

$$\{u_i\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\varphi_z y_i & +\varphi_y z_i \\ \varphi_z y_i & -\varphi_x z_i \\ -\varphi_y x_i & +\varphi_x y_i \end{Bmatrix} \tag{9}$$

unde:

$\{u_i\}$ este vectorul deplasare al punctului A_i, $i = 1, 2 \ldots n$, față de sistemul de referință inerțial considerat fix.

$\{r_c\}$ — vectorul centrului de masă față de sistemul de referință inerțial, considerat fix, definit prin $\{r_c\}^T = [X \ Y \ Z]$ asociat vectorului $\bar{r}_c$.

$[\varphi]$ — matricea pătratică antisimetrică asociată vectorului.

$\{r_i\}$ — vectorul punctului A_i, $i = 1,2 \ldots n$, față de sistemul de referință neinerțial, atașat rigidului, definit prin $\{r_i\}^T = [x_i \ y_i \ z_i]$, asociat vectorului de poziție $\bar{r}_i$.

2.2. *Deformații elastice.* În vederea exprimării energiei potențiale de deformare este necesară determinarea deformației fiecărui element elastic din structura legăturilor elastice. Astfel, cu ajutorul relației (9) se determină deplasarea capetelor elementului elastic, care permite stabilirea deformației, sub forma:

$$\{\Delta u_l\} = \{u_i\} - \{u_j\} \tag{9.1}$$

în care u_l este vectorul deformațiilor după cele trei direcții pentru elementul elastic l, cu $l = 1,2 \ldots n$;

$\{u_i\}$ — vectorul deplasare, după cele trei direcții, pentru capătul i, cu $i = 1,2 \ldots n$, al elementului elastic l;

$\{u_j\}$ — vectorul deplasare, după cele trei direcții, pentru capătul j, cu $j = 1,2, \ldots n$, al elementului elastic l.

3. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE MIȘCARE PENTRU VIBRAȚIILE LIBERE NEAMORTIZATE

Se folosesc ecuațiile lui Lagrange de speța a doua, în ipoteza legăturilor olonome, pentru un sistem material cu s grade de libertate sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} = Q_j, \ (j = 1,2 \ldots s) \tag{10}$$

în care E este energia cinetică a sistemului exprimată funcţie de vitezele generalizate $\dot{q}_j$;

q_j — coordonata generalizată corespunzătoare gradului de libertate j;

Q_j — forţa generalizată corespunzătoare coordonatei generalizate q_j.

Deoarece rigidul este supus la legături elastice, fără amortizare, se admite ipoteza modelării sub forma unui sistem conservativ, situaţie în care forţele generalizate pot fi determinate astfel :

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2 \ldots s) \tag{11}$$

unde V este energia potenţială de deformaţie a sistemului elastic, considerată faţă de poziţia de echilibru static stabilă.

4. APLICAŢII

Se prezintă exemple de calcul pentru trei maşini la care se impune, într-o primă etapă, analiza regimului dinamic la vibraţii libere.

4.1. *Ciur vibrator inerţial.* În figura 3a se prezintă un ciur vibrator inerţial 1 rezemat elastic 2 pe cîte 4 grupuri elastice identice. Fiecare grup elastic se caracterizează prin rigiditate după două direcţii rectangulare. Modelul dinamic este ilustrat în figura 3b. reprezentînd un rigid cu două plane de simetrie xCz şi yCz. Sistemul de referinţă inerţial $OXYZ$ este considerat fix, iar sistemul de referinţă neinerţial $Cxyz$ este legat invariabil de rigid, unde C reprezintă centrul de masă al ciurului.

Rigidul rezemat elastic are trei grade de libertate corespunzătoare deplasărilor liniare după axele X, Z şi deplasării unghiulare φ_y în jurul axei Cy, mişcarea fiind raportată la sistemul de axe $OXYZ$, considerat fix.

Punctele A_i, $i = 1, 2 \ldots 4$, au coordonatele stabilite faţă de sistemul de axe $Cxyz$, sub forma :

$$A_1\,(-a_x, a_y, -a_z),\ A_2\,(a_x, a_y, -a_z)$$

$$A_3\,(a_x, -a_y, -a_z),\ A_4\,(-a_x, -a_y, -a_z)$$

În acest caz deplasările punctelor A_i, $i = 1,2 \ldots 4$, sînt egale cu deformaţiile elementelor elastice care se determină aplicînd relaţia (8), obţinîndu-se :

$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} X \\ 0 \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -a_x \\ a_y \\ -a_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\varphi_y\, a_z \\ 0 \\ \varphi_y\, a_x \end{Bmatrix}$$

$$\{u_2\} = \begin{Bmatrix} X \\ 0 \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ -a_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\varphi_y\, a_z \\ 0 \\ -\varphi_y\, a_x \end{Bmatrix}$$

$$\{u_3\} = \begin{Bmatrix} X \\ 0 \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\varphi_y a_z \\ 0 \\ -\varphi_y a_x \end{Bmatrix}$$

$$\{u_4\} = \begin{Bmatrix} X \\ 0 \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\varphi_y a_z \\ 0 \\ \varphi_y a_x \end{Bmatrix}$$

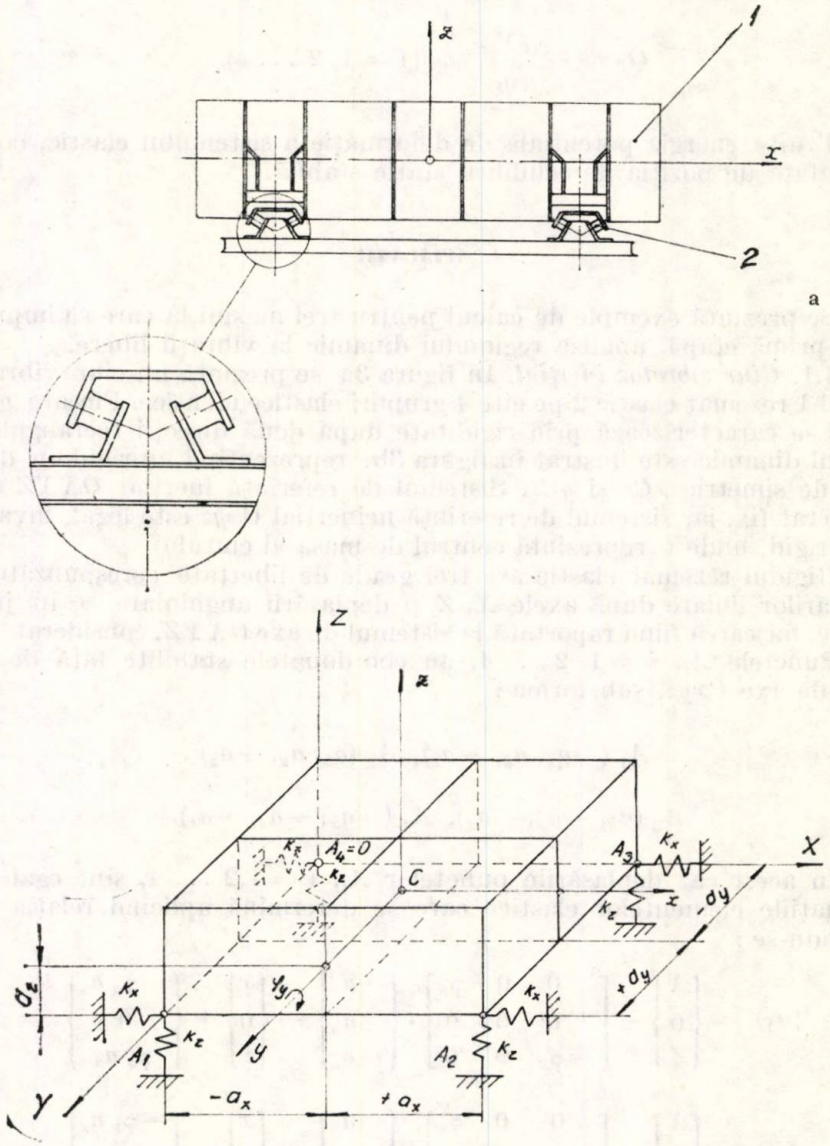


Fig. 3. — Schematizarea unui ciur vibrator inerțial. a) model fizic, b) schematizarea modelului elastic.

Energia potențială totală a sistemului elastic este dată de relația :

$$V = \frac{1}{2}[k_x(u_{1x}^2 + u_{2x}^2 + u_{3x}^2 + u_{4x}^2) +$$

$$+ k_z(u_{1z}^2 + u_{2z}^2 + u_{3z}^2 + u_{4z}^2)]$$

sau :

$$V = \frac{1}{2}[4k_x(X - \varphi_y a_z)^2 + 2k_z(Z + a_x\varphi_y)^2 + 2k_z(Z - a_x\varphi_y)^2$$

Forțele generalizate corespunzătoare coordonatelor generalizate $q_1 = X$, $q_2 = \varphi_y$ și $q_3 = Z$, pentru sistemul conservativ, sînt de forma :

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial X} \quad Q_1 = -[4k_x(X - \varphi_y a_z)]$$

$$Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad Q_2 = -[4\varphi_y(k_x a_z^2 + k_z a_x^2) - 4k_x a_z X]$$

$$Q_3 = -\frac{\partial V}{\partial Z} \quad Q_3 = -4k_z Z$$

Energia cinetică a sistemului $E = \frac{1}{2}[m\dot{X}^2 + J_y \dot{\varphi}_y^2 + m\dot{Z}^2]$

Ecuațiile diferențiale de mișcare ale sistemului la vibrații libere folosind relațiile (10), sînt :

$$m\ddot{X} + 4k_x(X - \varphi_y a_z) = 0$$

$$J_y \ddot{\varphi}_y + [4\varphi_y(k_x a_z^2 + k_z a_x^2) - 4k_x a_z X] = 0$$

$$m\ddot{Z} + 4k_z Z = 0$$

unde m este masa ciurului

J_y — momentul de inerție masic față de axa C_y.

4.2. *Mașină de frezat.* În figura 4 se prezintă mașina de frezat orizontală, compusă din masa orizontală 1, pe care se află prinsă piesa de prelucrat 3, și scula 2. Masa poate fi pusă în mișcare pe verticală de șurubul 5 și menținută pe această direcție, prin ghidajele 4 și coloana de rigidizare 6.

Mașina de frezat orizontală este modelată printr-un rigid 1 de masă m și moment de inerție J_y față de axa Cy. Sistemul de axe rectangulare $Cxyz$ are originea în centrul de masă al sistemului material care se caracterizează prin două plane de simetrie xCz și yCz. Rigiditățile echivalente

caracterizează interacțiunea de contact dintre masa orizontală a frezei și elementele de legătură, astfel :
k_1 este coeficientul de rigiditate echivalent al ansamblului format din sculă 2 și piesa 3 ;

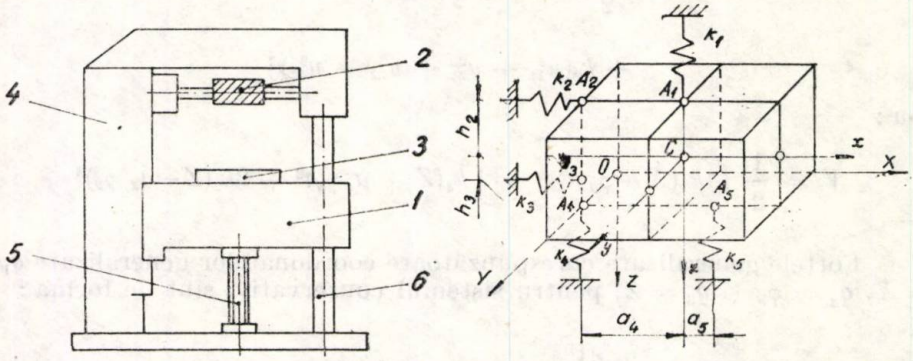


Fig. 4. — Schematizarea unei freze orizontale. a) model fizic, b) schematizarea modelului elastic.

$k_2 k_3$ — coeficienții de rigiditate al ansamblului de prindere a mesei de lucru față de ghidajele verticale 4 ale mașinii.
k_4 — coeficientul de rigiditate al șurubului conducător 5 ;
k_5 — coeficientul de rigiditate al montantului de rigidizare 6 a mașinii.

Punctele de prindere a capetelor elementelor elastice față de sistemul de axe $Cxyz$ sînt caracterizate prin următoarele coordonate :

$$A_1(0, 0, -h_2), \qquad A_2(-a_4, 0, -h_2), \; A_3(-a_4, 0, +h_3)$$
$$A_4(-a_4, 0, +h_3), \; A_5(a_5, 0, +h_3)$$

$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -h_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\varphi_y h_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{u_2\} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -a_4 \\ 0 \\ -h_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\varphi_y h_2 \\ 0 \\ \varphi_y a_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{u_3\} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -a_4 \\ 0 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varphi_y h_3 \\ 0 \\ \varphi_y a_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{u_4\} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ \varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -a_4 \\ 0 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varphi_y h_3 \\ 0 \\ \varphi_y a_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{u_5\} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_5 \\ 0 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varphi_y h_3 \\ 0 \\ -\varphi_y a_5 \end{Bmatrix}$$

Energia potențială de deformație este :

$$V = \frac{1}{2} [k_1 u_{1z}^2 + k_2 u_{2x}^2 + k_3 u_{3x}^2 + k_4 u_{4z}^2 + k_5 u_{5z}^2]$$

sau :

$$V = \frac{1}{2} [k_1 Z^2 + k_2 (X - \varphi_y h_2)^2 + k_3 (X + \varphi_y h_3)^2 +$$

$$+ k_4 (Z + \varphi_y a_4)^2 + k_5 (Z - \varphi_y a_5)^2]$$

Forțele generalizate corespunzătoare coordonatelor generalizate $q_1 = X$, $q_2 = Z$ și $q_3 = \varphi_y$

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial X}, \quad Q_1 = -[k_2 (X - \varphi_y h_2) + k_3 (X + \varphi_y h_3)]$$

$$Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial Z}, \quad Q_2 = -[k_1 Z + k_4 (Z + \varphi_y a_4) + k_5 (Z - \varphi_5 a_5)]$$

$$Q_3 = -\frac{\partial V}{\partial Y}, \quad Q_3 = -[-k_2 h_2 (X - \varphi_y h_2) + k_3 h_3 (X + \varphi_y h_3) +$$

$$+ k_4 a_4 (Z + \varphi_y a_4) - k_5 a_5 (Z - \varphi_y a_5)]$$

Energia cinetică a sistemului este de forma :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m \dot{Z}^2 + \frac{1}{2} J_y \dot{\varphi}_y^2$$

Ecuațiile diferențiale de mișcare pentru vibrațiile libere se obțin sub forma :

$$m\ddot{X} + (k_2 + k_3) X + (k_3 h_3 - k_2 h_2) \varphi_y = 0$$

$$m\ddot{Z} + (k_1 + k_4 + k_5) Z + (k_4 a_4 - k_5 a_5) \varphi_y = 0$$

$$J_y \ddot{\varphi}_y + (k_2 h_2^2 + k_3 h_3^2 + k_4 a_4^2 + k_5 a_5^2) \varphi_y +$$

$$+ (k_3 h_3 - k_2 h_2) X + (k_4 a_4 - k_5 a_5) Z = 0$$

4.3. *Mașină de compactat prin vibrare.* Mașina de compactat prin vibrare autopropulsată este ilustrată schematic în figura 5.a., fiind structurată astfel : ruloul vibrator 1, șasiul anterior 2, sistemul elastic 3, legă-

tura elastică 4, şasiul posterior 5 şi ruloul de tracţiune 6. Datorită simetriei construcţiei faţă de planul longitudinal median, maşina poate fi modelată ca un sistem de solide rigide legate elastic, toate cuprinse într-un singur plan (fig. 5.b.). Astfel, masa m_1 modelează ruloul vibrator, masa m_2 modelează şasiul anterior, iar elementele inerţiale m, J modelează şasiul posterior împreună cu ruloul de tracţiune.

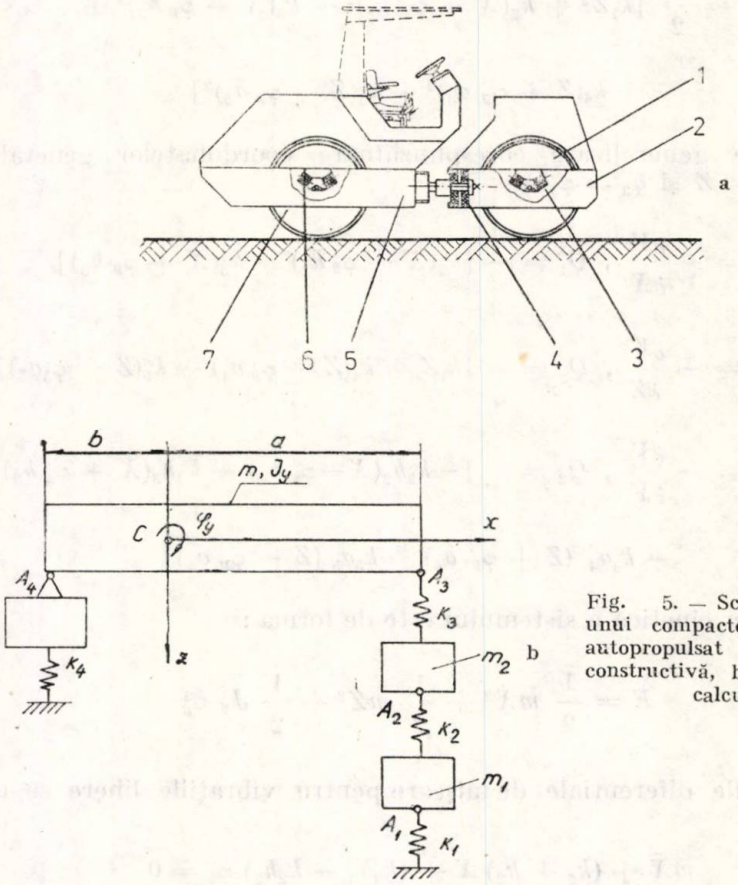


Fig. 5. — Schematizarea unui compactor vibrator autopropulsat a) soluţie constructivă, b) model de calcul.

Deplasările punctelor A_i, $i = 1,2, \ldots 4$, sînt date astfel :

$$u_{1z} = Z_1$$

$$u_{2z} = Z_2$$

$$\{u_3\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a\varphi_y \end{Bmatrix}$$

de unde avem :

$$u_{3z} = Z - a\varphi_y$$

$$\{u_4\} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ b\varphi_y \end{Bmatrix}$$

de unde se obține :

$$u_{4z} = Z + b\varphi_y$$

E nergia potențială a sistemului elastic este de forma :

$$V = \frac{1}{2}\,[k_1 Z_1^2 + k_2(Z_1 - Z_2)^2 + k_3(u_{3z} - Z_2)^2 + k_4 u_{4z}^2]$$

sau :

$$V = \frac{1}{2}\,[k_1 Z_1^2 + k_2(Z_1 - Z_2)^2 + k_3(Z - a\varphi_y - Z_2)^2 + k_4\,(Z + b\varphi_y)^2]$$

Forțele generalizate corespunzătoare coordonatelor generalizate $q_1 = Z_1$, $q_2 = Z_2$, $q_3 = Z$ și $q_4 = \varphi$, sînt :

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial Z_1}, \quad Q_1 = -\,[k_1 Z_1 + k_2(Z_1 - Z_2)]$$

$$Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial Z_2}, \quad Q_2 = -\,[-k_2(Z_1 - Z_2) - k_3(Z - a\varphi_y - Z_2)]$$

$$Q_3 = -\frac{\partial V}{\partial Z}, \quad Q_3 = -\,[k_3(Z - a\varphi_y - Z_2) + k_4(Z + b\varphi_y)]$$

$$Q_4 = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad Q_4 = -\,[-k_3 a(Z - a\varphi_y - Z_2) + k_4 b(Z + b\varphi_y)]$$

Energia cinetică a sistemului material este dată de relația :

$$E \quad \frac{1}{2}\,[m_1 \dot{Z}_1^2 + m_2 \dot{Z}_2^2 + m\dot{Z}^2 + J\dot{\varphi}_y^2]$$

Ecuațiile diferențiale de mișcare pentru vibrațiile libere se obțin sub forma :

$$m_1 \ddot{Z}_1 + k_1 Z_1 + k_2(Z_1 - Z_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{Z}_2 - k_2(Z_1 - Z_2) - k_3(Z - a\varphi_y - Z_2) = 0$$

$$m\ddot{Z} + k_3(Z - a\varphi_y - Z_2) + k_4(Z + b\varphi_y) = 0$$

$$J\ddot{\varphi}_y - k_3a(Z - a\varphi_y - Z_2) + k_4b(Z + b\varphi_y) = 0$$

5. CONCLUZII

Stabilirea ecuațiilor diferențiale de mișcare pentru un rigid sau mai multe rigide legate elastic constituie o dificultate deosebită, mai ales în cazul sistemelor cu mai multe grade de libertate. Din acest motiv s-a recurs la modalitatea de a determina deplasările instantanee ale punctelor rigidelor, în care se află prinse capetele elementelor elastice, cu ajutorul cărora se determină deformațiile acestora.

Pentru exemplificare au fost prezentate cîteva cazuri concrete de mașină la care s-au scris ecuațiile diferențiale pe baza exprimării, fără dificultate, a energiei potențiale și energiei cinetice. Deși, fiecare caz în parte prezintă particularități constructive și de modelare, se remarcă faptul că modalitatea de abordare este unitară conferindu-i un avantaj deosebit în aplicațiile curente din activitatea de proiectare a mașinilor complexe.

Pe baza relațiilor (8) sau (9) din lucrare se poate stabili deplasarea oricărui punct al unui rigid aflat în mișcare de vibrare.

În același mod se determină deplasările punctelor capetelor de prindere a elementelor elastice la rigid. Deasemenea, pot fi stabilite și deformațiile elementelor elastice care sînt elemente de legătură între două sau mai multe rigide ce alcătuiesc un ansamblu aflat în mișcare de vibrare.

Ca urmare a stabilirii deformațiilor elementelor elastice se determină expresia energiei potențiale și forțele generalizate corespunzătoare coordonatelor generalizate ale sistemului.

În finalul lucrării se prezintă, pentru exemplificare, trei aplicații cu particularități diferite ale modelelor de calcul.

Primit în redacție la 10 ianuarie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. P. BRATU, *Dinamica mașinilor vibratoare autopropulsate*, St. cerc. mec. apl., **38**, *3* (1979)
2. P. BRATU, *Influența sistemului elastic de amortizare asupra parametrilor dinamici ai cilindrilor compactori vibratori*, Teză de doctorat, Institutul de Construcții, București, 1980.
3. P. BRATU, *Izolarea și amortizarea vibrațiilor la utilaje de construcții*, Editor INCERC — Redacția publicațiilor pentru construcții, București, 1982.
4. P. BRATU, ST. ȚAȚOMIR, *Determination des paramètres fonctionnels aux cribles vibrateurs inertiaux*, Conferința de vibrații mecanice, Timișoara, 1988.
5. T. CREȚU, *Fizică generală*, vol. **I**, Edit. tehnică, București, 1984.
6. I. CONSTANTINESCU, C. BOLOG, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1978.
7. C. HARRIS, C. CREDE, *Șocuri și vibrații* (traducere din limba engleză), vol. **I**, Edit. tehnică, București, 1968.
8. C. ISPAS, F.P. SIMION, *Vibrațiile mașinilor-unelte. Teorie și aplicații*, Edit. Academiei, București, 1986.
9. A. JULIEN, *Dynamique de la voiture automobile*, tome **I**, Paris, 1968.

10. L. LANDAU, E. LIFSIT, *Mecanica* (traducere din limba rusă), Edit. tehnică, Bucureşti, 1966.
11. E. LUCA, C. CIUBOTARIU, GH. ZET, A. VASILIU, *Fizică*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.
12. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicaţii in inginerie*, vol. **I**, Edit. tehnică, Bucureşti, 1978.
13. M. MUNTEANU, *Asupra echilibrului solidului rigid cu legături elastice triaxiale*, St. cerc. mec. apl., **48**, *2*, (1989).
14. N. PANDREA, *Vibraţiile rigidului cu legături elastice*, St. cerc. mec. apl., **46**, *6* (1987).
15. GH. SILAŞ, M. RĂDOI, L. BRÎNDEU, H. KLEPP, A. HEGEDUŞ, *Culegere de probleme de vibraţii mecanice*, vol. **I**, Edit. tehnică, Bucureşti, 1967.
16. ŞT. STAICU, *Aplicaţii ale calculului matriceal in mecanica solidelor*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1986.
17. C. STANCIU, *Vibraţii mecanice. Note de curs*, ICB, 1989.

PREDICȚIA EFECTULUI MODIFICĂRILOR STRUCTURALE PRIN ANALIZĂ MODALĂ

I. PĂRĂUȘANU

Institutul Politehnic, București

În lucrare se prezintă o metodă de analiză modală pentru identificarea și modelarea structurilor vibratoare slab amortizate în vederea predicției efectului modificărilor structurale. Datele obținute din măsurări experimentale sînt folosite mai întîi pentru obținerea unui model modal și apoi pentru obținerea modelului fizic incomplet. Se folosește Factorul Modal de Scară și Criteriul de Confidență Modală pentru a aprecia consistența identificării formei modurilor proprii de vibrație în raport cu un model de element finit. Lucrarea prezintă unele rezultate obținute de autor într-un experiment realizat în cadrul laboratorului catedrei de Rezistența materialelor din Institutul Politehnic București.

1. INTRODUCERE

Deși capacitatea noilor calculatoare numerice a crescut considerabil, se continuă eforturile de cercetare pentru simplificarea procedeelor de testare în analiza modală și a algoritmilor de identificare [1]. Pe baza unei tehnici dezvoltate de Stahle [2], Ewins și Gleeson au propus o metodă simplificată pentru identificarea modală a structurilor slab amortizate [3]. Această metodă s-a dovedit a fi un instrument robust în determinarea experimentală a caracteristicilor modale ale structurilor, fiind folosită în multe aplicații industriale și de laborator. În această lucrare se prezintă o variantă modificată a acestei metode (fig. 1).

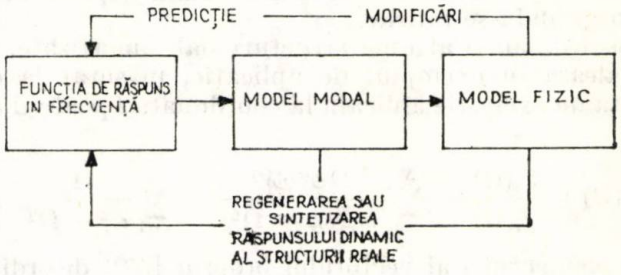


Fig. 1

2. STRUCTURA FOLOSITĂ ȘI APARATURA UTILIZATĂ

Pentru a compara cu ușurință rezultatele experimentale cu cele calculate teoretic, s-a ales un sistem simplu, format dintr-o bară liberă la un capăt și încastrată la celălalt, pe care s-au atașat trei mase avînd greutățile de 4,09 kg, 2,8 kg și respectiv 1,89 kg (fig. 2).

Pentru excitarea barei s-a folosit un generator de semnal GF—22 legat la un vibrator electromagnetic ESE—201 prin intermediul unui

amplificator de putere LV—103. Forța s-a măsurat cu un traductor de forță 8200 B&K, montat pe tija de excitație a vibratorului, semnalul fiind amplificat de amplificatorul de sarcină tip 2626 B&K și citită pe un voltmetru electronic. Viteza a fost măsurată cu un accelerometru piezoelectric tip 4370 B&K și un vibrometru 2511 B&K legat la un filtru trece bandă acordabil tip 1621 B&K.

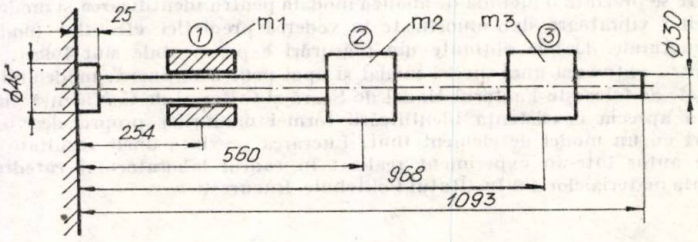


Fig. 2

3. OBȚINEREA MODELULUI MODAL DIN DATELE EXPERIMENTALE

În lucrarea de față s-au folosit, în mod intenționat, date experimentale modificate aleator, pentru a demonstra că, pornind de la aceste date, metoda propusă permite obținerea de modele care pot descrie corect comportarea dinamică a structurilor.

Poziția maselor m_2 și m_3 a fost aleasă în vecinătatea nodurilor celui de al treilea mod de vibrație, rezultînd valori relativ mici pentru mobilitatea măsurată. S-au luat în considerare numai deplasările transversale ale maselor, neglijîndu-se rotirile.

Răspunsul dinamic al unei structuri slab amortizate, așa cum este și structura aleasă în exemplul de aplicație, măsurat la coordonata j, produs de forța de excitație aplicată la coordonata l poate fi exprimat prin mobilitatea

$$\mathcal{M}_{jl}(\Omega) = \frac{\dot{x}_j(\Omega)}{f_l(\Omega)} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\Omega \psi_j^{(r)} \psi_l^{(r)}}{m_r(\omega_r^2 - \Omega^2)} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\Omega}{\omega_r^2 - \Omega^2} \cdot A_{jl}^{(r)} \tag{1}$$

unde $\psi_j^{(r)}$ este elementul j al vectorului propriu $\{\psi^{(r)}\}$ de ordinul r, ω_r este pulsația proprie de ordinul r, $m_r = \{\psi^{(r)}\}^T [M] \{\psi^{(r)}\}$ este masa modală corespunzătoare, iar $A_{jl}^{(r)}$ este o constantă modală definită astfel :

$$A_{jl}^{(r)} = \frac{\psi_j^{(r)} \psi_l^{(r)}}{m_r} \tag{2}$$

Măsurînd mobilitatea la P valori distincte ale frecvenței de excitație $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_P$, poate fi scrisă următoarea ecuație matriceală :

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{M}_{jl}(\Omega_1) \\ \mathcal{M}_{jl}(\Omega_2) \\ \ldots \\ \mathcal{M}_{jl}(\Omega_P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1/(\omega_1^2 - \Omega_1^2) & \Omega_1/(\omega_2^2 - \Omega_1^2) & \ldots & \Omega_1/(\omega_N^2 - \Omega_1^2) \\ \Omega_2/(\omega_1^2 - \Omega_2^2) & \Omega_2/(\omega_2^2 - \Omega_2^2) & \ldots & \Omega_2/(\omega_N^2 - \Omega_2^2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Omega_P/(\omega_1^2 - \Omega_P^2) & \Omega_P/(\omega_2^2 - \Omega_P^2) & \ldots & \Omega_P/(\omega_N^2 - \Omega_P^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{jl}^{(1)} \\ A_{jl}^{(2)} \\ \ldots \\ A_{jl}^{(N)} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

sau

$$\{\mathcal{M}_{jl}\} = [\Omega]\ \{A_{jl}\} \tag{4}$$

unde $\{\mathcal{M}_{jl}\}$ este un vector coloană de ordinul p, $[\Omega]$ este o matrice dreptunghiulară de ordinul $P \times N$, iar $\{A_{jl}\}$ este un vector coloană de ordinul N care conține necunoscutele din ecuația matriceală (4). Valorile ω_1, ω_2, ..., ω_N sînt frecvențele corespunzătoare maximelor curbelor de răspuns în frecvență, trasate pe baza datelor experimentale.

Constantele modale pot fi ușor determinate în funcție de valorile măsurate, astfel :

$$\{A_{jl}\} = [\Omega]^{+}\{\mathcal{M}_{jl}\} \tag{5}$$

unde $[\Omega]^{+}$ este pseudoinversa matricei $[\Omega]$.

Prin extinderea ecuației (2), incluzînd toți termenii j și l, poate fi construită matricea constantelor modale pentru fiecare mod :

$$[A^{(r)}] = \begin{bmatrix} A_{11}^{(r)} A_{12}^{(r)} \dots A_{1N}^{(r)} \\ A_{21}^{(r)} A_{22}^{(r)} \dots A_{2N}^{(r)} \\ \dots\dots\dots \\ A_{N1}^{(r)} A_{N2}^{(r)} \dots A_{NN}^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\psi_1^{(r)}}{m_r}\psi_1^{(r)} \frac{\psi_2^{(r)}}{m_r}\psi_1^{(r)} \dots \frac{\psi_N^{(r)}}{m_r}\psi_1^{(r)} \\ \frac{\psi_1^{(r)}}{m_r}\psi_2^{(r)} \frac{\psi_2^{(r)}}{m_r}\psi_2^{(r)} \dots \frac{\psi_N^{(r)}}{m_r}\psi_2^{(r)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\psi_1^{(r)}}{m_r}\psi_N^{(r)} \frac{\psi_2^{(r)}}{m_r}\psi_N^{(r)} \dots \frac{\psi_N^{(r)}}{m_r}\psi_N^{(r)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Grupul de matrici $[A^{(1)}]$, $[A^{(2)}]$, ..., $[A^{(N)}]$, unde N este numărul gradelor de libertate ale sistemului, caracterizează complet modelul modal. Deși obținerea lor se face prelucrînd date experimentale, nu este necesară excitarea structurii și măsurarea într-un număr atît de mare de puncte ; mai întîi pentru că matricele $[A^{(r)}]$ sînt simetrice, $A_{jl} = A_{lj}$ și în al doilea rînd pentru că excitînd structura numai într-un singur punct l și măsurînd răspunsul în k puncte ($k \geqslant N$) se pot calcula constantele modale $A_{jl}^{(r)}$ (unde l este fixat, $j = 1, \dots, k$, $r = 1, \dots, N$). Cu ajutorul acestora se pot sintetiza acum toate celelalte constante modale, fiind utilizată următoarea relație :

$$A_{ji}^{(r)} = A_{jl}^{(r)} \cdot A_{il}^{(r)} / A_{ll}^{(r)} \tag{7}$$

care arată că răspunsul în punctul j produs de o forță aplicată în punctul i poate fi calculat din constantele modale ale răspunsului în punctele i, j și l, produs de o forță aplicată în punctul l.

Spre deosebire de metodele propuse în alte lucrări [3], în care se consideră masele modale egale cu unitatea ($m_r = 1$), în această lucrare s-a considerat lungimea vectorului propriu din modul r egal cu unitatea, putîndu-se determina, în acest caz, masele modale m_r. Astfel, avînd în vedere proporționalitatea din relația (6), elementele vectorului modal ortonormat au fost obținute din relația :

$$\psi_j^{(r)} = A_{jl}^{(r)} \Big/ \left(\sum_{j=1}^{N} (A_{jl}^{(r)})^2 \right)^{1/2} \tag{8}$$

Se poate deci forma matricea modală $[\psi]=[\{\psi^{(1)}\}\{\psi^{(2)}\}\ldots\{\psi^{(N)}\}]$, unde $\{\psi^{(r)}\}$ reprezintă vectorul modal ortonormat corespunzător modului r. Folosind relațiile (9) și (10) se pot determina masele modale

$$m_r = \psi_j^{(r)}\psi_l^{(r)}/A_{jl}^{(r)} \tag{9}$$

respectiv constantele elastice modale :

$$k_r = m_r \cdot \omega_r^2 \tag{10}$$

și se pot construi matricele diagonale $[m_r] = \text{diag}\,(m_r)$ și $[k_r] = \text{diag}\,(k_r)$.

Structura, prezentată în figura 2, a fost excitată armonic în punctul 1, iar răspunsul a fost măsurat în punctele 1,2 și 3. S-au obținut curbele de răspuns în frecvență, exprimate sub forma mobilității și notate cu M11, M21 și M31, fiind reprezentate cu linie punctată în figurile 3, 4 și 5. S-au luat în considerare numai primele trei moduri de vibrație ($N = 3$). Frecvențele de rezonanță s-au determinat în dreptul maximelor de pe curbele mobilității, obținîndu-se : $f_1 = 13{,}5$ Hz, $f_2 = 73$ Hz și $f_3 = 218$ Hz. În continuare, pentru determinarea modelului modal sînt necesare un număr de P perechi de valori frecvență-mobilitate măsurate experimental. Alegerea lor, precum și modul în care s-au făcut măsurările sînt hotărîtoare pentru obținerea unui bun model modal. Pentru a exemplifica acest lucru, să considerăm două seturi de date de intrare (tabelul 1).

Tabelul 1

Mobilitatea măsurată	Frecvența, Hz		Mobilitatea, x10^{-3} m/Ns	
	Exemplul 1	Exemplul 2	Exemplul 1	Exemplul 2
M11	20	20	−0,001	−0,001
	125	130	−0,01	0,005
	250	160	−0,174	0,059
M21	30	30	−0,003	−0,003
	150	50	−0,152	0,121
	250	110	0,052	−0,176
M31	40	40	−0,154	−0,154
	160	90	0,056	0,163
	250	250	−0,054	−0,054

Implementarea calculelor s-a făcut pe un microcalculator HC—85 și în urma aplicării relațiilor (2) — (10) s-a obținut :

MATRICEA MODALĂ

$$\text{Exemplul 1 } [\psi] = \begin{bmatrix} 0{,}057 & 0{,}275 & 0{,}773 \\ 0{,}485 & 0{,}851 & -0{,}540 \\ 0{,}872 & -0{,}445 & 0{,}330 \end{bmatrix}$$

$$\text{Exemplul 2 } [\psi] = \begin{bmatrix} 0{,}071 & 0{,}368 & 0{,}883 \\ 0{,}390 & 0{,}770 & -0{,}382 \\ 0{,}916 & -0{,}510 & 0{,}270 \end{bmatrix}$$

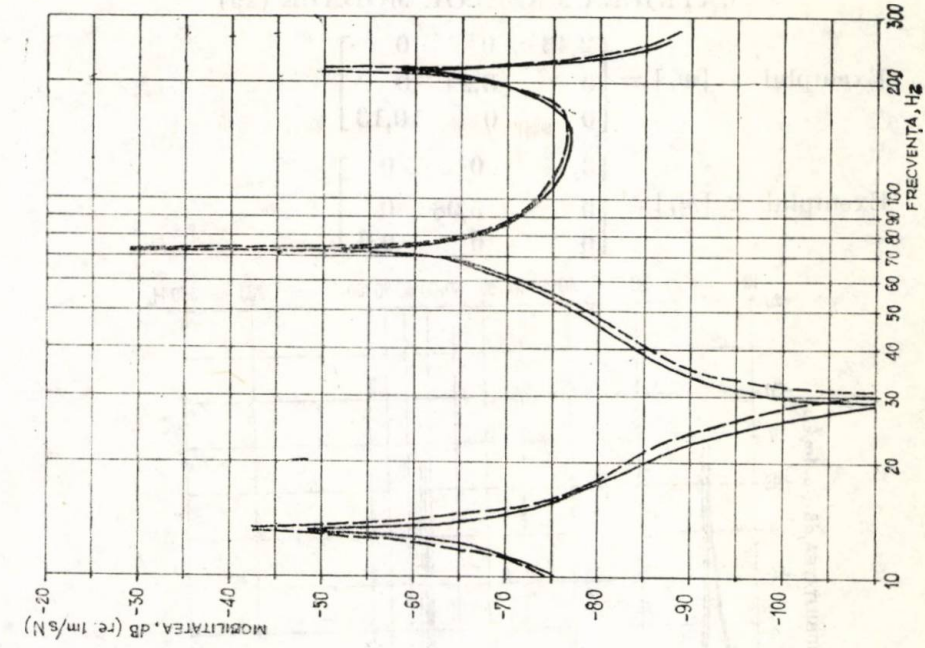

MOBILITATEA, dB (re. 1m/sN)
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
FRECVENȚA, Hz
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
200
300

Fig. 4

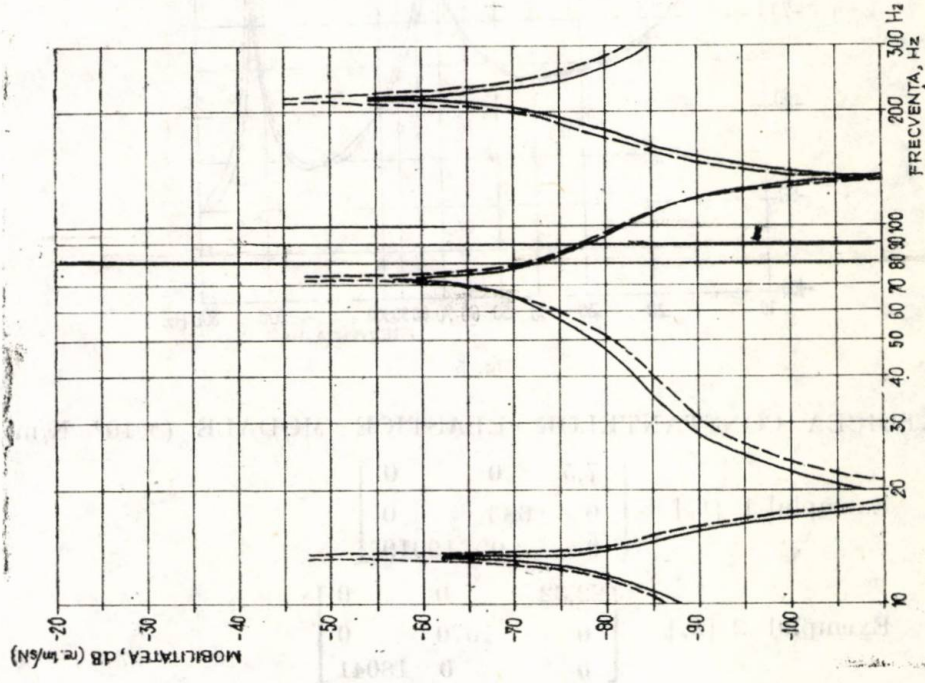

MOBILITATEA, dB (re. 1m/sN)
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
FRECVENȚA, Hz
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
200
300 Hz

Fig. 3

MATRICEA MASELOR MODALE (kg)

$$\text{Exemplul 1 } [m_r] = \begin{bmatrix} 2{,}43 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}24 & 0 \\ 0 & 0 & 10{,}13 \end{bmatrix}$$

$$\text{Exemplul 2 } [m_r] = \begin{bmatrix} 3{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}08 & 0 \\ 0 & 0 & 9{,}6 \end{bmatrix}$$

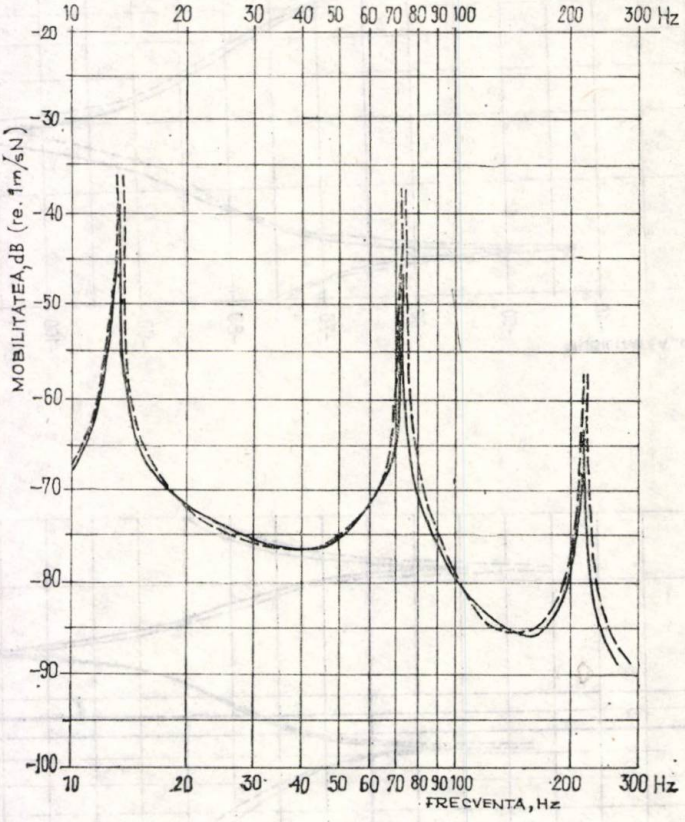


Fig. 5

MATRICEA CONSTANTELOR ELASTICE MODALE ($\times 10^3$ N/m)

$$\text{Exemplul 1 } [k_r] = \begin{bmatrix} 17{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 683 & 0 \\ 0 & 0 & 19019 \end{bmatrix}$$

$$\text{Exemplul 2 } [k_r] = \begin{bmatrix} 22{,}32 & 0 & 0 \\ 0 & 1070 & 0 \\ 0 & 0 & 18041 \end{bmatrix}$$

Pentru a afla care dintre seturile de date de intrare corespunzătoare Exemplului 1, respectiv 2, sînt cele care au condus la obținerea unui model care să descrie cît mai corect structura reală, este necesară utilizarea unor metode de comparare.

4.1. COMPARAREA RĂSPUNSURILOR DINAMICE

Prima și cea mai directă metodă de comparare o constituie suprapunerea curbelor de răspuns în frecvență (în cazul exemplelor considerate — curbele mobilității) calculate cu ajutorul relației :

$$\mathcal{M}_{jl}(\Omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\Omega \psi_j^{(r)} \psi_l^{(r)}}{m_r(\omega_r^2 - \Omega^2)} \tag{11}$$

peste cele determinate experimental.

Așa cum se observă din figurile 3, 4 și 5, ambele exemple conduc la o suprapunere bună a curbelor mobilității, necoincidența din dreptul frecvențelor de antirezonanță datorîndu-se faptului că s-au neglijat rotirile, ținîndu-se cont numai de deplasările liniare transversale [4].

4.2. COMPARAREA PROPRIETĂȚILOR MODALE

Modelele modale obținute sînt incomplete ($N = 3$). În relațiile (1), respectiv (11), nu s-a ținut cont de influența modurilor superioare nici prin adăugarea unor termeni reziduali. Cu toate acestea, dintre modelele modale obținute din mai multe seturi de date experimentale, trebuie ales cel care se apropie cel mai mult de un model obținut prin aplicarea metodei elementelor finite (MEF). Astfel, pentru determinarea primelor trei modu I de vibrație ale sistemului s-a făcut o analiză teoretică preliminară, folosind un model de element finit format din 12 elemente de tip bară, nodurile avînd două grade de libertate, de translație și de rotație. Au rezultat următoarele frecvențe proprii : $f_1 = 12{,}92$ Hz, $f_2 = 73{,}92$ Hz, $f_3 = 210{,}4$ Hz și următoarea matrice modală :

$$[\psi]_p = \begin{bmatrix} 0{,}084 & 0{,}392 & 0{,}889 \\ 0{,}377 & 0{,}765 & -0{,}419 \\ 0{,}922 & -0{,}510 & 0{,}183 \end{bmatrix}$$

4.2.1. *Compararea frecvențelor proprii.* Frecvențele proprii măsurate, egale cu frecvențele proprii ale modelului modal, sînt comparate cu cele prezise de modelul obținut prin aplicarea MEF.

Compararea poate consta în simpla observare a celor două șiruri de valori ale frecvențelor pentru fiecare mod, dar se recomandă marcarea lor pe un grafic ca cel din figura 6. În acest fel este posibil să se observe nu numai gradul de corelare dintre cele două seturi de rezultate dar și natura diferențelor (posibilele cauze) ce apar. Punctele desenate trebuie să se înscrie cît mai aproape de o linie dreaptă de pantă egală cu unitatea. Dacă, de exemplu, ele se înșiră de-a lungul unei linii ce are panta diferită de unitate, eroarea apare datorită folosirii unor valori greșite pentru pro-

prietățile materialului în modelul analitic. Dacă punctele se împrăștie aleator de-a lungul dreptei înclinate la 45°, rezultă că modelul ce reprezintă structura este defectuos și este necesară o reevaluare fundamentală. Dacă împrăștierea este mică, aleator distribuită dea lungul primei bisectoare, se poate considera modelarea ca fiind normală, trecîndu-se la etapele următoare.

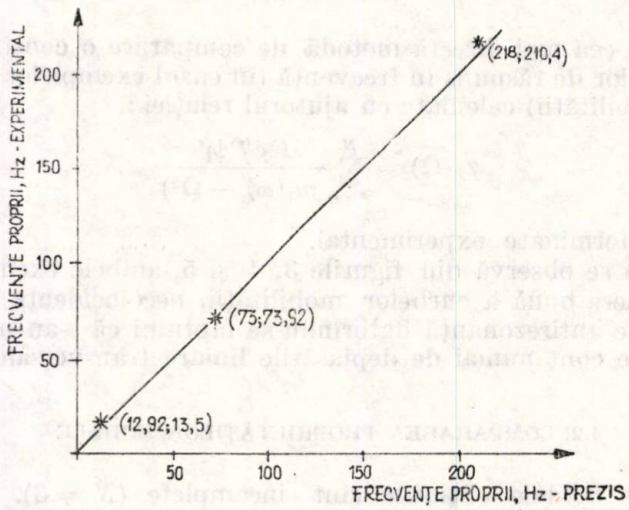


Fig. 6

4.2.2. *Compararea grafică a formei modurilor proprii.* Din cele arătate în paragraful anterior reiese clar că punctele reprezentate în grafic corespund frecvențelor proprii, asociate aceluiași mod de vibrație, una determinată experimental și alta calculată cu MEF. În cazul structurilor complexe, cu frecvențe proprii relativ apropiate, compararea devine dificilă, fiind necesară și compararea formei modurilor proprii de vibrație.

O metodă directă de comparare este reprezentarea, prin suprapunere, a formei modurilor proprii pentru fiecare model — experimental și prezis — de-a lungul liniilor ce caracterizează structura. Aceasta prezintă dezavantajul unei interpretări dificile a diferențelor ce apar și a suprapunerii confuze, datorată bogatei informații ce o includ. De aceea, se recomandă folosirea unor grafice asemănătoare cu cele de la compararea frecvențelor proprii. Dacă modul de normalizare a vectorilor s-a făcut considerînd masa modală egală cu unitatea, punctele trasate trebuie să se înscrie cît mai aproape de prima bisectoare, orice deviație indicînd cauza diferenței. Dacă, de exemplu, punctele se înscriu de-a lungul unei drepte cu panta diferită de unitate rezultă că în unul dintre cele două modele comparate s-a folosit o altă metodă de normalizare a vectorilor decît în celălalt. Dacă există o oarecare împrăștiere de-a lungul primei bisectoare, rezultă că există inexactități considerabile în datele unuia dintre modele, iar dacă împrăștierea este prea mare, reisese clar că cei doi vectori, ai căror elemente se compară, nu se referă la același mod.

Așa cum se observă din figurile 7 și 8, formele modurilor proprii coincid mult mai bine în Exemplul 2 decît în Exemplul 1. Deci modelul modal corespunzător Exemplului 2 va descrie mai exact proprietățile dinamice ale structurii reale.

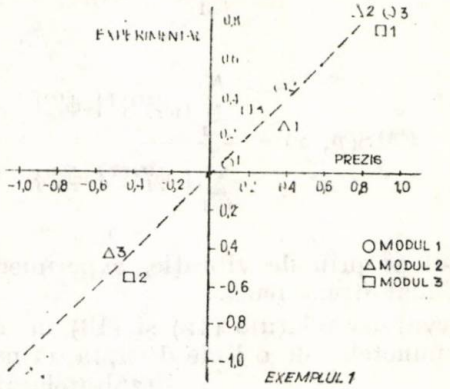


Fig. 7

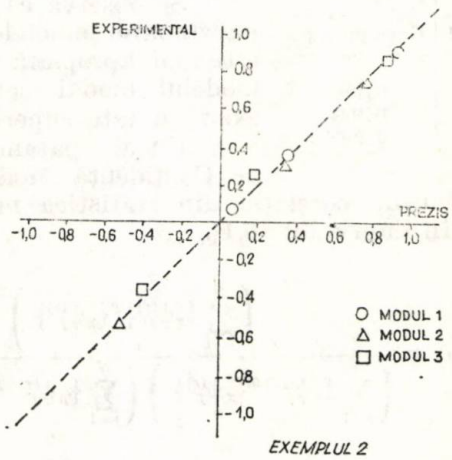


Fig. 8

Dacă forma modurilor de vibrație este complexă și nu reală, așa cum a fost considerată mai sus, este necesară folosirea unei a treia axe pentru a se putea reprezenta și partea imaginară corespunzătoare fiecărui mod.

4.2.3. *Compararea numerică a formei modurilor proprii.* O alternativă a comparării grafice prezentată anterior o constituie calculul unor proprietăți statistice simple ale fiecărei perechi de moduri, care de această dată pot fi și complexe.

Factorul Modal de Scară (FMS) reprezintă panta liniei drepte ce trece cît mai aproape de punctele reprezentate în figurile 7 și 8 și este

definit astfel :

$$\mathrm{FMS}(x,\ p) = \frac{\sum_{j=1}^{N} \{{}_x\psi_j^{(r)}\}^T \{{}_p\psi_j^{(r)}\}}{\sum_{j=1}^{N} \{{}_p\psi_j^{(r)}\}^T \{{}_p\psi_j^{(r)}\}} \tag{12}$$

sau

$$\mathrm{FMS}(p,\ x) = \frac{\sum_{j=1}^{N} \{{}_p\psi_j^{(r)}\}^T \{{}_x\psi_j^{(r)}\}}{\sum_{j=1}^{N} \{{}_x\psi_j^{(r)}\}^T \{{}_x\psi_j^{(r)}\}} \tag{13}$$

în funcție de modul propriu de vibrație, experimental $\{{}_x\psi^{(r)}\}$ sau prezis $\{{}_p\psi^{(r)}\}$, care a fost luat drept bază.

Trebuie observat că relațiile (12) și (13) nu dau indicații asupra calității apropierii punctelor de o linie dreaptă, ci numai panta acesteia.

Rezultatele aplicării relației (12) pentru cele două exemple considerate sînt trecute în tabelul 2.

Tabelul 2

Modul de vibrație	FMS $(x,\ p)$	
	Exemplul 1	Exemplul 2
1	0,992	0,998
2	0,986	0,994
3	0,974	0,995

Se observă că panta dreptei corespunzătoare punctelor din Exemplul 2 este mai apropiată de unitate și deci modelul modal corespunzător acestui exemplu este superior celuilalt.

Un alt parametru este Criteriul de Confidență Modală (CCM) [5], ce corespunde pătratului de corelație din statistica matematică și poate lua valori cuprinse în intervalul [0,1].

$$\mathrm{CCM}(x,\ p) = \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} \{{}_x\psi_j^{(r)}\}^T \{{}_p\psi_j^{(r)}\}\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{N} \{{}_x\psi_j^{(r)}\}^T \{{}_x\psi_j^{(r)}\}\right)\left(\sum_{j=1}^{N} \{{}_p\psi_j^{(r)}\}^T \{{}_p\psi_j^{(r)}\}\right)} \tag{14}$$

În cazul ideal, dacă $\mathrm{CCM}(x,\ p) = 1$ rezultă că există o corelare perfectă între moduri, respectiv dacă $\mathrm{CCM}(x,\ p) = 0$ nici o relație între ele. Practic însă, dacă vectorul propriu determinat experimental $\{{}_x\psi^{(r)}\}$ se referă la același mod ca și cel prezis $\{{}_p\psi^{(r)}\}$, se pot admite satisfăcătoare rezultatele în care CCM $(x,\ p) \geqslant 0{,}9$ și respectiv CCM $(x, p) \leqslant 0{,}05$ pentru modurile necorelate. Valorile ce nu se înscriu în aceste limite se pot datora neliniarității structurii, datelor experimentale eronate sau neluării în considerare a influenței modurilor superioare.

Deși acest parametru este folosit în cuantificarea comparării dintre cele două seturi de date ale formei modurilor proprii, el nu dă o imagine completă și se recomandă a fi folosit alături de reprezentări grafice asemănătoare celor din figurile 7 și 8.

Aplicarea CCM asupra datelor celor două exemple a condus la obținerea rezultatelor ce sînt prezentate în tabelul 3.

Tabelul 3

	Exemplul 1			Exemplul 2		
CCM(x,p)	0,985	0,002	5×10^{-5}	0,999	0,019	0,004
	0,004	0,974	0,037	0,022	0,999	0,008
	0,027	0,077	0,950	0,032	0,007	0,991

Si acest criteriu oferă prioritate Exemplului 2.

Metodele de comparare prezentate anterior sînt aplicate cu scopul de a furniza informații asupra modului în care se poate face corectarea unuia sau a altuia dintre modele.

5. CORECTAREA MODELELOR

Corectarea sau ajustarea modelelor este următorul pas în obținerea de modele care să descrie cît mai corect structura reală.

Se hotărăște mai întîi care dintre cele două modele (experimental — teoretic) se consideră drept referință. Astfel, o primă etapă constă în verificarea ortogonalității folosind matricea de masă notată $[M_p]$, obținută teoretic. Se folosește în continuare o metodă de corectare a formei modurilor proprii și apoi a matricei de rigiditate, utilizînd tot matricea $[M_p]$, după care se pot aplica metode de localizare a regiunilor ce prezintă eroarea cea mai mare în matricele de masă și rigiditate, respectiv folosirea Matricelor Sistematice de Eroare [5].

Verificarea ortogonalității modurilor proprii de vibrație se face cu ajutorul relației :

$$\{{}_x\psi^{(r)}\}^T[M_p]\,\{{}_x\psi^{(r)}\} = [\delta] \tag{15}$$

în care $\{{}_x\psi^{(r)}\}$ este vectorul propriu determinat în urma măsurărilor experimentale, corespunzător modului r, iar $[M_p]$ este matricea condensată (redusă) a maselor, calculată teoretic folosind MEF.

Dacă normalizarea vectorilor s-a făcut considerînd masele modale egale cu unitatea ($m_r = 1$), atunci, se consideră o verificare cu atît mai bună a ortogonalității acestora cu cît matricea $[\delta]$ este mai apropiată de matricea unitate (valori mai mari de 0,9 pe diagonala principală și mai mici de 0,05 în rest).

Folosind un model de element finit format din cinci elemente și realizînd condensarea matricelor de masă și rigiditate, respectiv păstrînd din cele 10 grade de libertate ale structurii modelate (cinci rotiri și cinci deplasări), doar pe cele de interes (cele trei deplasări corespunzătoare celor trei mase), a rezultat următoarea matrice a maselor, exprimate în kg :

$$[M_p] = \begin{bmatrix} 5{,}45 & -0{,}0201 & -0{,}105 \\ -0{,}0201 & 4{,}82 & 0{,}225 \\ -0{,}105 & 0{,}225 & 3{,}44 \end{bmatrix}$$

În cazul celor două exemple alese, normalizarea vectorilor s-a făcut considerînd lungimea lor egală cu unitatea, în scopul de a putea determina masele modale și deci, în acest caz, diagonala principală a matricei $[\delta]$ trebuie să fie cît mai apropiată de cea a matricei maselor modale $[m_r]$, iar în rest să conțină termeni de valoare cît mai mică. A rezultat astfel:

$$\text{Exemplul 1} \qquad [\delta] = \begin{bmatrix} 3{,}940 & 0{,}830 & -0{,}170 \\ 0{,}830 & 4{,}430 & -1{,}400 \\ -0{,}170 & -1{,}400 & 4{,}970 \end{bmatrix}$$

$$\text{Exemplul 2} \qquad [\delta] = \begin{bmatrix} 3{,}790 & 0{,}063 & 0{,}330 \\ 0{,}063 & 4{,}350 & 0{,}025 \\ 0{,}330 & 0{,}025 & 5{,}190 \end{bmatrix}$$

Comparînd cele două matrici $[\delta]$ cu matricele modale corespunzătoare se observă diferențe destul de mari ce se datoresc în primul rînd neluării în considerare a modurilor superioare de vibrație prin adăugarea unor termeni reziduali. Totuși, eroarea înregistrată în cazul Exemplului 1 este mai mare comparativ cu Exemplul 2, care va descrie mai bine comportarea dinamică a sistemului în urma modificărilor structurale efectuate.

6. MODELUL FIZIC

Pe baza modelului modal, se poate obține un model fizic incomplet caracterizat, în cazul sistemelor slab amortizate, de matricele $[M]$ și $[K]$.

$$[M] = [\psi]^{-T}[m_r]\ [\psi]^{-1}$$

$$[K] = [\psi]^{-T}[k_r]\ [\psi]^{-1} \tag{18}$$

Utilizarea matricelor $[M]$ și $[K]$ de mai sus în problema de valori proprii

$$([K] - \omega_r^2[M])\{\psi^{(r)}\} = \{0\} \tag{19}$$

conduce la frecvențele proprii ω_r și vectorii proprii $\{\psi^{(r)}\}$ identificați.

Pentru cele două exemple considerate s-au obținut astfel rezultatele prezentate în tabelul 4.

Tabelul 4

Matricea	Exemplul 1			Exemplul 2		
[M] Kg	12,73	−1,53	−0,11	9,57	−1,53	−0,12
		3,08	−0,28		5,76	−0,44
	simetrică		2,62	simetrică		3,07
[K] $\times 10^6$ N/m	21,28	−5,47	1,63	16,09	−6,09	1,30
		1,96	−0,72		3,37	−0,96
	simetrică		0,31	simetrică		0,33

7. MODIFICĂRI STRUCTURALE

Efectele modificărilor structurale din sistemul real pot fi prezise prin modificări corespunzătoare efectuate în matricele $[M]$ și $[K]$ ale modelului fizic.

Astfel, în cazul structurii simple alese, s-a renunțat la masa m_2 de valuare 2,8 kg și s-au reluat măsurările experimentale obținîndu-se mobilitățile, trasate punctat, din figurile 9, 10 și 11 (curba 1). Se observă noile frecvențe proprii : $f_1 = 13{,}7$ Hz, $f_2 = 92$ Hz, $f_3 = 233$ Hz.

S-a înlocuit apoi termenul corespunzător din matricea $[M]$ a modelului fizic cu noua valoare de 0,28 în loc de 3,08 pentru Exemplul 1 și de 2,96 în loc de 5,76 pentru Exemplul 2.

S-a făcut o primă verificare folosind un program de valori proprii în care s-au introdus noua matrice $[M]$, obținută prin micșorarea termenului corespunzător masei m_2 cu valuarea de 2,8 kg, și matricea $[K]$, corespunzător fiecărui exemplu, rezultînd pentru frecvențele proprii următoarele valori : pentru Exemplul 1 — $f_1 = 15{,}72$ Hz, $f_2 = 154$ Hz, $f_3 = 580$ Hz, iar pentru Exemplul 2 — $f_1 = 14{,}05$ Hz, $f_2 = 92{,}66$ Hz, $f_3 = 228{,}4$ Hz. Comparîndu-le cu cele măsurate experimental, se observă eroarea mare înregistrată în cazul Exemplului 1. Pentru Exemplul 2 au fost obținuți vectorii proprii următori :

$$[\psi] = \begin{bmatrix} 0{,}068 & 0{,}408 & 0{,}667 \\ 0{,}389 & 0{,}888 & -0{,}720 \\ 0{,}918 & -0{,}207 & 0{,}189 \end{bmatrix}$$

Aplicînd relația (11), în care masa modală corespunzătoare modului doi este 2,28 kg în loc de 5,08 Kg și folosind vectorii proprii de mai sus, au rezultat curbele de răspuns în frecvență reprezentate cu linie continuă în figurile 9, 10 și 11 (curba 2), prin suprapunere cu cele determinate experimental (curba 1). Erorile mari obținute se datoresc neglijării influenței modurilor superioare. Astfel, dacă se reiau calculele dar în relația (1) se mai introduce un termen $\Omega\ R_{jl}$, care ține cont de influența modurilor superioare asupra celor trei moduri analizate, se obțin curbele notate cu 3 din figurile 9, 10 și 11.

8. CONCLUZII

Așa cum se observă din compararea celor două exemple prezentate anterior, de o mare însemnătate în obținerea de modele, care să descrie corect comportarea sistemelor în urma modificărilor structurale efectuate, sînt alegerea datelor inițiale dintre valorile măsurate experimental (vezi tabelul 1), metoda fiind deosebit de sensibilă la variații relativ mici ale acestora. Nu se pot da *rețete* în alegerea acestor perechi de date (frecvență--mobilitate), dar se recomandă ca ele să fie alese cît mai aproape de antirezonanțe și mai ales în zonele în care există certitudinea că valorile deter-

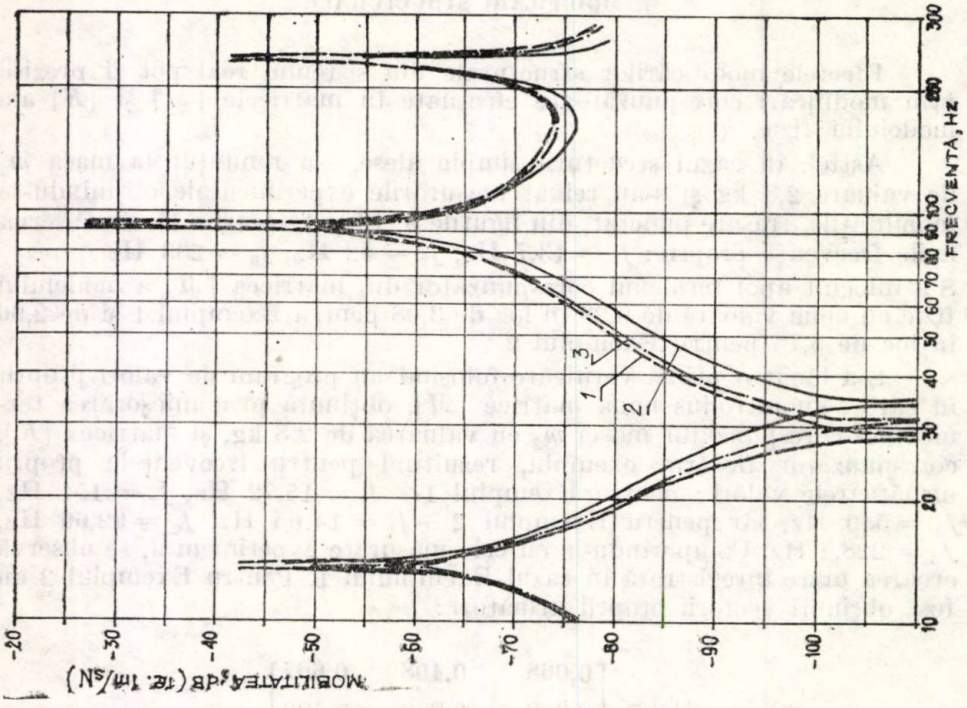

MOBILITATEA,dB (re. 1m/sN)
FRECVENȚA, Hz
1
2
3

Fig. 10

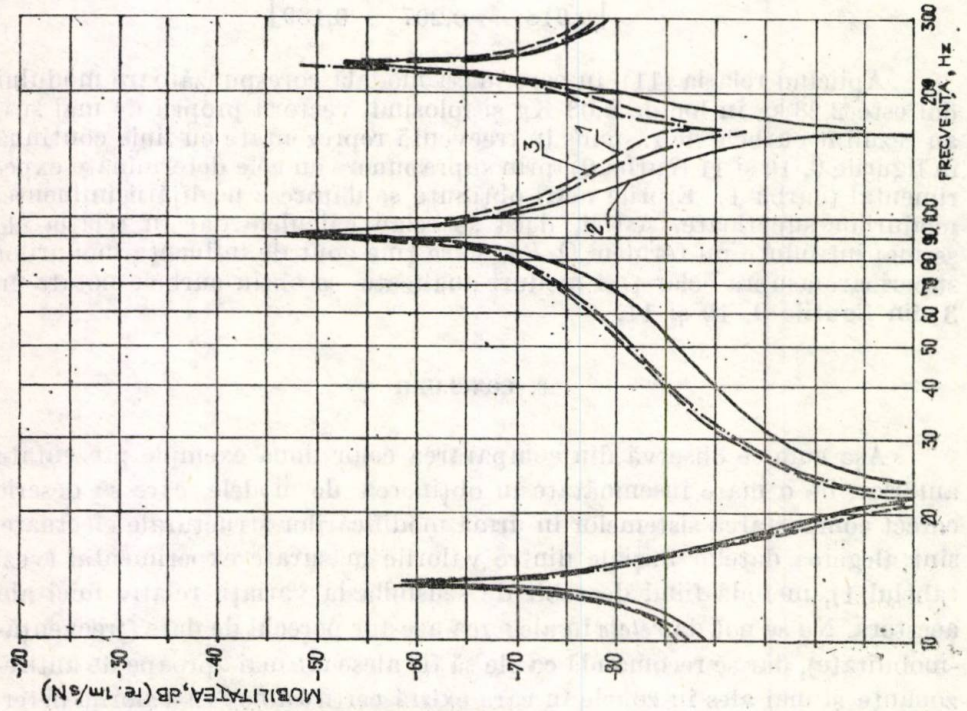

MOBILITATEA,dB (re. 1m/sN)
FRECVENȚA, Hz
1
2
3

Fig. 9

minate experimental sînt corecte, curbele de răspuns în frecvență prezentînd continuitate. Totodată, este necesară folosirea mai multor seturi de date și compararea lor, cu ajutorul metodelor prezentate în această lucrare, pentru a-l putea alege pe cel ce conduce la un cît mai bun model modal.

Așa cum se observă din analiza curbelor din figurile 9, 10 și 11, se vor obține rezultate corecte numai dacă se va ține cont și de influența modurilor de vibrație ale căror rezonanțe nu sînt cuprinse în domeniul de frecvență studiat.

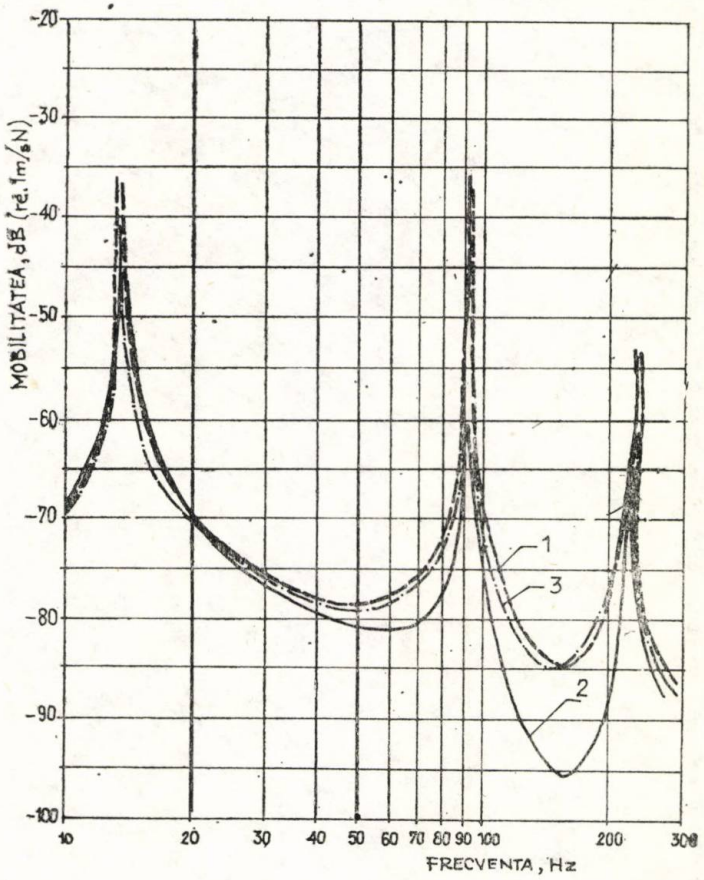


Fig. 11

Cîmpul de aplicație al metodei prezentate este deosebit de larg: de la stîlpi de înaltă tensiune la macarale și poduri rulante, de la mașini unelte, mașini și utilaje agricole la aeronave.

Primit în redacție la 15 iulie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. RADEȘ, M., *Modal Analysis Using Frequency Response Measurement Data*, Shock and Vibration Digest, **20**(*1*), Pp 13—21, Jan. (1988).
2. STAHLE, C.V. Jr., *Phase Separation Technique for Ground Vibration Testing*, Aerospace Engineering, **21** (1962)
3. EWINS, D.J., GLEESON, P.T., *A Method for Modal Indentification of Lightly Damped Structures*, Journal of Sound and Vibration, **84**(*1*), pp. 57—59 (1982).
4. EWINS, D.J., SAINSBURY, M.G., *Mobility Measurement of the Vibration Analysis of Connected Structures*, Shock and Vibration Buletin, **42**, *1*, (1972)
5. EWINS, D.J., *Modal Testing : Theory and Practice*, Research Studies Press LTD, Letchworth, 1986.

DETERMINAREA PUTERII NECESARE ACȚIONĂRII MORILOR PENDULARE

GH. I. ENE și GH. IORDACHE
Institutul Politehnic București

S-a stabilit o relație de calcul pentru determinarea puterii necesare acționării morilor pendulare care ține seama atît de energia consumată prin frecare de alunecare și de rostogolire dintre role și inel cît și de energia consumată prin frecarea în lagărele rolelor. Exemplul de calcul arată că puterea obținută cu această relație este foarte apropiată de puterea de catalog a unor mori similare existente.

1. GENERALITĂȚI

Morile pendulare fac parte din categoria mai largă a mașinilor de mărunțire cu corpuri de rostogolire [1].

În figura 1 este reprezentată schematic construcția unei astfel de mori.

Mărunțirea materialului (alimentat în moară de către un dozator)

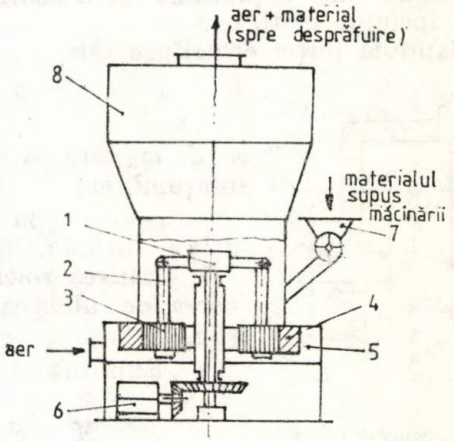


Fig. 1. — Moară pendulară (schemă); 1 — rotor; 2 — tijele rolelor; 3 — role; 4 — inel; 5 — canal pentru aer; 6 — grup de acționare; 7 — alimentator; 8 — separator.

este realizată, prin strivire între role și inel, la care se adaugă forfecarea datorită mișcării relative dintre role și inel.

Rolele (în număr de 2 ... 8) rotesc liber pe tije, ele fiind apăsate, în timpul funcționării, pe inel, datorită forței centrifuge.

Materialul măcinat este antrenat de un curent de aer ascendent și trecut prin separatorul prevăzut la partea superioară a morii. Aici materialul grob (care nu a atins finețea de măcinare dorită) este separat și revine în moară fiind supus în continuare măcinării.

Materialul fin (care corespunde fineții de măcinare cerute) este antrenat în continuare de către curentul de aer și este reținut într-o baterie

de cicloane. Aerul evacuat din cicloane este supus desprăfuirii, înainte de a ieşi în atmosferă, într-o instalaţie de desprăfuire (filtre cu saci, de exemplu).

Finețea de măcinare poate fi reglată, în principal, prin modificarea vitezei curentului de aer care se introduce în moară.

De obicei măcinarea se realizează uscat. În cazul în care materialul supus măcinării necesită uscare, în moară se introduc, pentru antrenarea materialului, aer sau gaze calde.

Asemenea mori se utilizează pentru măcinarea materialelor moi şi de duritate mijlocie (avînd duritatea mai mică decît 4, după scara Mohs) cum sînt : calcar, marnă, cărbuni, argilă etc.[2].

2. STABILIREA RELAŢIILOR PENTRU DETERMINAREA PUTERII NECESARE ACŢIONĂRII

Schema de calcul este prezentată în figura 2.

Momentul necesar acţionării se calculează faţă de arborele rotorului, a cărui turaţie este cunoscută. Se procedează la determinarea momentelor rezistente pentru o singură rolă, urmînd ca rezultatul să fie multiplicat cu numărul de role pe care îl are moara.

Asupra rolei acţionează forţa centrifugă care o apasă pe aceasta asupra inelului morii.

Expresia forţei centrifuge este

$$F_c = m_R \cdot R_b \cdot \omega^2 \qquad (1)$$

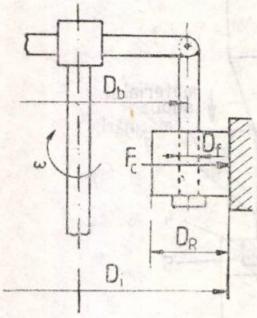


Fig. 2.— Schema de calcul.

unde m_R este masa rolei, kg ; $R_b = D_d/2$ — raza braţului, m ;

$\omega = \pi\ n/30$ — viteza unghiulară a rotorului, s^{-1} (n, rot/min, fiind turaţia rotorului).

Rotirea rolei este împiedicată de către frecarea de alunecare şi frecarea de rostogolire (fig. 3).

Expresia momentului rezistent este :

$$M = F_a \cdot R_i + F_c \cdot f_r \quad [\text{N.m}] \qquad (2)$$

unde F_a este forţa de frecare de alunecare, N, $R_i = D_i/2$ — raza interioară a inelului, m ; F_c — forţa centrifugă, N ; f_r — coeficientul frecării de rostogolire, m.

Dacă se scrie ecuaţia de momente faţă de centrul rolei (fig. 4), rezultă

$$F_a \cdot R_R = M_r = F_c \cdot f_r. \qquad (3)$$

Se obţine pentru forţa de frecare de alunecare expresia

$$F_a = \frac{F_c \cdot f_r}{R_R} \qquad (4)$$

unde, în afara notaţiilor utilizate anterior, $R_R = D_R/2$ este raza rolei.

Ținînd seama de relația (4) expresia (2) devine :

$$M = \frac{F_c \cdot f_r}{R_R} \cdot R_i + F_c \cdot f_r = \frac{R_i + R_R}{R_R} \cdot F_c \cdot f_r \text{.} \quad (5)$$

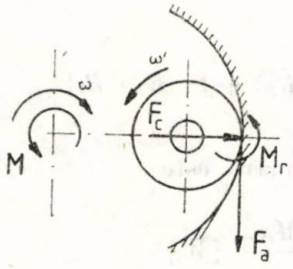
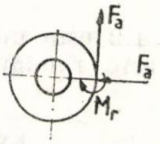


Fig. 3. — La determinarea momentului rezistent datorită frecărilor de alunecare și de rostogolire dintre rolă și inel.

Fig. 4. — La determinarea dependenței dintre F_a și M_r.



Momentul forței de frecare dintre fusul tijei și rolă (fig. 5) este :

$$M_f = F_f \cdot R_f = F_c \cdot f \cdot R_f \quad [\text{N.m}] \quad (6)$$

unde, în afara notațiilor utilizate mai sus, f este coeficientul de frecare dintre fusul tijei și rolă ; $R_f = D_{f/2}$ — raza fusului, m.

Forța rezistentă aplicată la rolă este (fig. 5)

$$F = \frac{M_f}{R_R} = \frac{F_c \cdot f \cdot R_f}{R_R} \cdot [\text{N}] \quad (7)$$

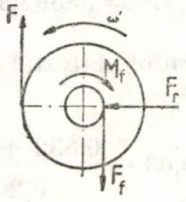


Fig. 5. — La determinarea momentului rezistent datorită frecării dintre fusul tijei și rolă.

Ținînd seama de relația (7) momentul rezistent datorită frecării dintre fusul tijei și rolă, raportat la arborele rotorului, are expresia

$$M' = F \cdot R_i = F_c \cdot f \cdot \frac{R_f \cdot R_i}{R_R} \text{.} \quad (8)$$

Momentul rezistent total, raportat la arborele rotorului este :

$$M_t = M + M' = F_c \cdot f_r \cdot \frac{R_i + R_R}{R_R} + F_c \cdot f \cdot \frac{R_f \cdot R_i}{R_R} \tag{9}$$

şi poate fi pus sub forma

$$M_t = \frac{F_c}{R_R} [f_r(R_i + R_R) + f \cdot R_f \cdot R_i]. \tag{10}$$

Puterea motorului necesar acţionării este

$$N_{mot} = k \frac{z M_t \omega}{\eta} \quad [W] \tag{11}$$

unde $k = 1{,}1 \cdot \ldots 1{,}2$ este un coeficient de rezervă de putere, iar $\eta = 0{,}80 \ldots 0{,}85$ este randamentul transmisiei ; z — numărul de role.

3. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră o moară pendulară care se caracterizează prin (fig. 2) $D_b = 1130$ mm ($R_b = 565$ mm); $D_R = 534$ mm ($R_R = 267$ mm); $D_i = 1664$ mm ($R_i = 832$ mm); $D_f = 100$ mm ($R_f = 50$ mm); $m_R = 975$ kg; $n = 80$ rot/min ($\omega = \pi n/30 = 8{,}37$ s^{-1}).

Moara are $z = 4$ role şi este utilizată pentru măcinarea marnei. Se apreciază coeficientul frecării de rostogolire $f_r = 0{,}03$ m [3].

Forţa centrifugă care apasă rola pe inel este

$$F_c = m_R R_b \omega^2 = 975 \cdot 0{,}565 \cdot 8{,}37^2 = 38592{,}59 \text{ N}.$$

Momentul rezistent la arborele rotorului datorită frecării de alunecare şi de rostogolire a rolei pe inel este

$$M = F_c \cdot f_r \frac{R_i + R_R}{R_R} = 38592{,}58 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{0{,}832 + 0{,}267}{0{,}267} =$$

$$= 4765{,}53 \text{ N.m.}$$

Momentul rezistent la arborele rotorului datorită frecării dintre fusul tijei şi rolă este :

$$M' = F_c \cdot f \cdot \frac{R_f \cdot R_i}{R_R} = 38592{,}59 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{0{,}050 \cdot 0{,}832}{0{,}267} = 601{,}29 \text{ N.m.}$$

Momentul rezistent total este

$$M_t = 4765{,}53 + 601{,}27 = 5366{,}82 \text{ N.m.}$$

Considerînd $k = 1{,}1$ și $\eta = 0{,}85$ rezultă puterea motorului de acționare :

$$N_{mot} = k \cdot \frac{z \cdot M_t \cdot \omega}{\eta} = 1{,}1 \cdot \frac{4 \cdot 5366{,}82 \cdot 8{,}37}{0{,}85} = 232528 \text{ W.}$$

Se adoptă un motor cu puterea $N = 240$ kw.

Valoarea rezultată este comparabilă cu puterea de catalog a unor mori similare existente.

4. CONCLUZII

Relația obținută pentru calculul puterii de acționare necesare morilor pendulare ține seama de toate încărcările care acționează asupra rolei. Frecarea din articulația tijei de braț nu consumă din puterea de acționare a morii.

Pentru obținerea unei valori cît mai exacte este necesar să se cunoască cu precizie valorile coeficienților de frecare (de alunecare și de rostogolire), cu pondere importantă în rezultatul final.

În literatură nu există nici-o relație de calcul pentru puterea de acționare a morilor pendulare, de aceea considerăm că relația obținută în lucrare este un instrument util pentru proiectarea acestui tip de utilaj.

Primit în redacție la 7 aprilie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. V. CHIRIAC, GH. ENE, *Utilaje mecanice din industria materialelor de construcție*, I.P.B., 1979.
2. E. BEILICH, D. BECHERESCU, M. THALER, *Cuptoare și utilaje în industria silicaților*, vol. II, *Mașini și aparate*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1973.
3. A.P. ILIEVICI, *Maşini i oborudovanie dlia zavodov po proizvodstvu keramiki i ognonpovov vîşşaia şkola*, Moskva, 1979.

STUDIUL GEOMETRIC AL ANGRENAJULUI MELCAT GLOBOIDAL

V. HANDRA-LUCA, T.L. TIUCĂ

Institutul Politehnic Cluj-Napoca

În lucrare se face un studiu teoretic al geometriei angrenajului melcat globoidal pornind de la o curbă generatoare dată sub formă parametrică. Prin particularizări ale curbei generatoare se obțin geometriile angrenajelor melcate globoidale riglate și neriglate. Metoda propusă evită unele complicații ale altor metode legate de necesitatea determinării vitezei relative dintre flancurile melcului și roții melcate.

În scopul măririi capacității portante a angrenajelor melcate cilindrice se folosesc angrenaje melcate globoidale. La aceste angrenaje tot timpul se află în angrenare un număr mai mare de dinți ai roții melcate datorită formei toroidale (globoidale) a melcului. Se va prezenta în continuare o metodă geometrică de studiu a acestui angrenaj.

1. SUPRAFEȚELE SPIRELOR MELCULUI GLOBOIDAL

Se consideră că spira unui melc globoidal se prelucrează cu o sculă a cărei muchie așchietoare Γ este o curbă plană ce se află într-un plan axial al semifabricatului melcului. În vederea studiului geometric al angrenajului melcat globoidal se adoptă (fig. 1) următoarele sisteme de axe de coordonate :

— sistemul mobil $o_1x_1y_1z_1$ legat rigid de corpul melcului globoidal ales astfel, încît axa melcului să fie o_1z_1 iar planul $z_1 = 0$ să conțină normala comună la axa melcului și a sculei ;

— sistemul mobil $O_2x_2y_2z_2$ legat rigid de corpul sculei s, ales astfel, încît axa de rotație a sculei să fie O_2y_2 iar planul $y_2 = 0$ să conțină normala comună la axa melcului și a sculei ;

— sistemul fix O_1xyz ales astfel, încît planul $z = 0$ să conțină normala comună la axa melcului și a sculei.

Spira melcului globoidal se obține imprimînd sculei s o mișcare de rotație în jurul axei O_2y_2 cu viteza unghiulară $\omega_2' = \dfrac{d\varphi_2}{dt}$, unde φ_2 este unghiul de rotație al sculei, iar semifabricatului melcului imprimîndu-i o mișcare de rotație în jurul axei O_1z_1 cu viteza unghiulară $\omega_1' = d\varphi_1/dt$, unde φ_1 este unghiul de rotație al melcului. În acest caz muchia Γ a sculei prelucrează spira melcului iar $i_{12} = \omega_1'/\omega_2'$ este raportul de transmitere al angrenajului de prelucrare.

Ecuaţiile parametrice ale curbei generatoare Γ a spirei melcului în sistemul $O_2x_2y_2z_2$ au forma generală :

$$x_2 = x_2(p),$$

$$y_2 = 0, \tag{1}$$

$$z_2 = z_2(p),$$

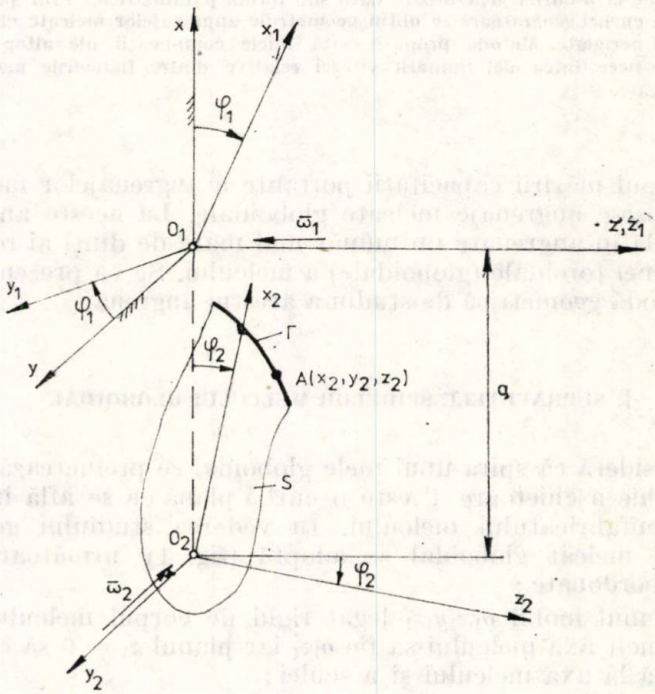


Fig. 1

unde p este parametrul adoptat.

Ecuaţia spirei melcului se va obţine în sistemul $O_1x_1y_1z_1$ legat de melc.

Introducînd coordonatele omogene, în vederea facilităţii folosirii calculului matriceal, relaţiile de trecere din sistemul fix O_1xyz în sistemul mobil $O_1x_1y_1z_1$ sînt :

$$x_1 = x\cos\varphi_1 - y\sin\varphi_1,$$

$$y_1 = x\sin\varphi_1 + y\cos\varphi_1, \tag{2}$$

$$z_1 = z,$$

$$t_1 = t = 1$$

iar relaţiile de trecere din sistemul mobil $O_2x_2y_2z_2$ în sistemul fix O_1xyz sînt :

$$\begin{aligned} x &= x_2 \cos \varphi_2 - z_2 \sin \varphi_2 - a, \\ y &= y_2, \\ z &= x_2 \sin \varphi_2 + z_2 \cos \varphi_2, \\ t &= t_2 = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Matriceal, relaţiile (2) şi (3) îmbracă forma :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$(\rho_1) = M_1 \cdot (\rho)$,
respectiv

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$(\rho) = M_2 \cdot (\rho_2)$,
unde (ρ), (ρ_1), (ρ_2) sînt vectorii de poziţie, sub formă matriceală, ai unui punct de pe suprafaţa spirei melcului în cele trei sisteme de coordonate.

Din (4) şi (5) se obţine :

$$(\rho_1) = M(\rho_2), \tag{6}$$

unde

$$M = M_1 \cdot M_2, \tag{7}$$

este matricea obţinută prin înmulţirea matricelor M_1 şi M_2 şi care, după înlocuire, are expresia :

$$M = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 & -a\cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 & a\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Introducînd (8) în (6) rezultă :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 & -a\cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 & -a\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

adică

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - y_2 \sin\varphi_1 - z_2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - a\cos\varphi_1, \\ y_1 &= x_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + y_2\cos\varphi_1 - z_2\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - a\sin\varphi_1, \\ z_1 &= x_2 \sin\varphi_2 + z_2 \cos\varphi_2, \\ t_1 &= t_2 = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Luînd în considerare (1) sistemul (10) ia forma :

$$\begin{aligned} &x_1 = \cos\varphi_1[x_2(p) \cos\varphi_2 - z_2(p) \sin\varphi_2 - a], \; x_1 = x_1(\varphi_1, p), \\ &y_1 = \sin\varphi_1[x_2(p) \cos\varphi_2 - z_2(p) \sin\varphi_2 - a], \; y_1 = y_1(\varphi_1, p), \\ &z_1 = x_2(p) \sin\varphi_2 + z_2(p) \cos\varphi_2, \qquad z_1 = z_1(\varphi_1, p). \end{aligned} \quad (11)$$

Sistemul (11) reprezintă suprafaţa flancului spirei melcului globoidal scrisă sub formă parametrică, parametrii fiind p şi unghiul φ_1 ($\varphi_2 = \varphi_1/i_{12}$). Parametrii p şi φ_1 ai suprafeţei (11) reprezintă o reţea de coordonate curbilinii. Făcînd p = const. se obţine pe suprafaţa (flancul) spirei melcului o curbă elicoidală pe un globoid, determinată de intersecţia suprafeţei spirei melcului cu suprafaţa torului generat de un cerc avînd raza :

$$R = \sqrt{x_2^2(p_0) + z_2^2(p_0)} \quad (12)$$

şi centrul în O_2, unde p_0 este o valoare discretă dată parametrului p. Făcînd φ_1 = const. se obţine pe suprafaţa spirei melcului curba Γ.

2. SUPRAFAŢA DE ANGRENARE

Suprafaţa de angrenare (locul geometric al liniilor de contact) se determină uzual [1], [2], [3], [4], pornind de la observaţia că în punctele de contact ale celor două suprafeţe conjugate (suprafeţele spirelor melcului globoidal şi ale flancurilor dinţilor roţii melcate) viteza relativă se află în planul tangent la cele două suprafeţe conjugate, adică produsul scalar dintre vectorul $\bar{n}$ al normalei şi vectorul $\bar{v}$ al vitezei relative să fie nul.

Liniile de contact se pot obține și pe o altă cale după cum urmează. Un punct $P(x_2, y_2, z_2)$ legat de sistemul mobil $O_2x_2y_2z_2$ descrie, în sistemul legat de melc $O_1x_1y_1z_1$, o curbă elicoidală ce se află pe un globoid (tor) a cărei ecuație, conform (10), este :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \cos\psi_1 \cos\psi_2 - y_2 \sin\psi_1 - z_2 \cos\psi_1 \sin\psi_2 - a \cos\psi_1, \\ y_1 &= x_2 \sin\psi_1 \cos\psi_2 + y_2 \cos\psi_1 - z_2 \sin\psi_1 \sin\psi_2 - a \sin\Psi_1, \\ z_1 &= x_2 \sin\psi_2 + z_2 \cos\psi_2, \end{aligned} \tag{13}$$

unde ψ_1, ψ_2 reprezintă unghiurile de rotație a melcului respectiv a roții melcate în angrenare.

Punctul P este un punct de pe profilul roții melcate dacă se află în contact cu suprafața spirei melcului (11) și tangenta la curba (13) se află în planul tangent la suprafața (11).

Ecuația tangentei [5] la curba (13) într-un punct de coordonate x_1, y_1, z_1 are forma :

$$\frac{X_1 - x_1}{\frac{dx_1}{d\psi_1}} = \frac{Y_1 - y_1}{\frac{dy_1}{d\psi_1}} = \frac{Z_1 - z_1}{\frac{dz_1}{d\psi_1}} \tag{14}$$

unde : $dx_1/d\psi_1$, $dy_1/d\psi_1$: $dz_1/d\psi_1$ reprezintă componentele vectorului $d\rho_1$ tangent la curba (13) sau valorile derivatelor coordonatelor date de (13) în raport cu ψ_1 și evaluate în punctul x_1, y_1, z_1.

X_1, Y_1, Z_1 — coordonatele curente ale unui punct de pe tangentă.

Calculînd aceste derivate se obține :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\psi_1} &= -x_2 \sin\psi_1 \cos\psi_2 - x_2 i_{21} \cos\psi_1 \sin\psi_2 - y_2 \cos\psi_1 + z_2 \sin\psi_1 \sin\psi_2 - \\ &\quad - z_2 i_{21} \cos\psi_1 \cos\psi_2 + a \sin\psi_1, \\ \frac{dy_1}{d\psi_1} &= x_2 \cos\psi_1 \cos\psi_2 - x_2 i_{21} \sin\psi_1 \sin\psi_2 - y_2 \sin\psi_1 - z_2 \cos\psi_1 \sin\psi_2 - \\ &\quad - z_2 i_{21} \sin\psi_1 \cos\psi_2 - a \cos\psi_1, \\ \frac{dz_1}{d\psi_1} &= x_2 i_{21} \cos\psi_2 - z_2 i_{21} \sin\psi_2 \end{aligned} \tag{15}$$

unde $i_{21} = \frac{1}{i_{12}} = \frac{d\psi_2}{d\psi_1}$.

Ținînd seama de (13) rezultă :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\psi_1} &= -y_1 - z_1 i_{21} \cos\psi_1, \\ \frac{dy_1}{d\psi_1} &= x_1 - z_1 i_{21} \sin\psi_1, \\ \frac{dz_1}{d\psi_1} &= i_{21} (x_1 \cos\psi_1 + y_1 \sin\psi_1 + a). \end{aligned} \tag{16}$$

Normala $\bar{n}$ la suprafaţa (11) se obţine din produsul vectorial al tangentelor în punctul considerat la cele două familii de curbe ale suprafeţei spirei melcului definite de $\varphi_1 = \text{const.}$ şi $p = \text{const.}$, deci :

$$\bar{n} = \left(\bar{i}\frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + \bar{j}\frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + \bar{k}\frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1}\right) \times \left(\bar{i}\frac{\partial x_1}{\partial p} + \bar{j}\frac{\partial y_1}{\partial p} + \bar{k}\frac{\partial z_1}{\partial p}\right)$$

sau

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial p} & \dfrac{\partial y_1}{\partial p} & \dfrac{\partial z_1}{\partial p} \end{vmatrix}, \tag{17}$$

de unde :

$$n_{x1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial p} & \dfrac{\partial z_1}{\partial p} \end{vmatrix}, \quad n_{y1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial p} & \dfrac{\partial x_1}{\partial p} \end{vmatrix}, \quad n_{z1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial p} & \dfrac{\partial y_1}{\partial p} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sînt versorii sistemului de axe de coordonate.

Derivatele parţiale care intervin în (18) se obţin din (11) şi au formele finale

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} &= -y_1 - z_1 i_{21} \cos\varphi_1, \\ \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} &= x_1 - z_1 i_{21} \sin\varphi_1, \\ \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} &= i_{21}(x_1 \cos\varphi_1 + y_1 \sin\varphi_1 + a), \\ \frac{\partial x_1}{\partial p} &= \cos\varphi_1 \left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2 - \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2\right], \\ \frac{\partial y_1}{\partial p} &= \sin\varphi_1 \left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2 - \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2\right], \\ \frac{\partial z_1}{\partial p} &= \frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2 + \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2. \end{aligned} \tag{19}$$

Înlocuind (19) în (18), după calcule, se obține

$$n_{x1} = \sin\varphi_1\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2 - \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2\right] i_{21}(x_1\cos\varphi_1 + y_1\sin\varphi_1 + a) -$$

$$-(x_1 - z_1 i_{21}\sin\varphi_1)\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2 + \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2\right],$$

$$n_{y1} = -\cos\varphi_1\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2 - \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2\right] i_{21}(x_1\cos\varphi_1 + y_1\sin\varphi_1 + a) -$$

$$-(y_1 + z_1 i_{21}\cos\varphi_1)\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2 + \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2\right], \qquad (20)$$

$$n_{z1} = (x_1\cos\varphi_1 + y_1\sin\varphi_1)\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2 - \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2\right].$$

Condiția ca tangenta la curba (13) să se afle în planul tangent la suprafața (11) este ca produsul scalar dintre vectorul normal $\bar{n}$ la suprafața (11) și vectorul $d\bar{\rho}_1$ de pe tangenta la curba, (13) să fie nul, adică :

$$\bar{n}\cdot d\bar{\rho}_1 = 0 \qquad (21)$$

deci :

$$n_{x1}\frac{dx_1}{d\psi_1} + n_{y1}\frac{dy_1}{d\psi_1} + n_{z1}\frac{dz_1}{d\psi_1} = 0. \qquad (22)$$

Înlocuind (15) și (19) în (22), după o serie de calcule și grupări de termeni, se obține :

$$\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2 - \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2\right]\cdot\left[-2q^2\sin^2\frac{\psi_1-\varphi_1}{2} +\right.$$

$$\left. + 2z_1 i_{21}(q+a)\cdot\sin\frac{\psi_1-\varphi_1}{2}\cos\frac{\psi_1-\varphi_1}{2}\right] + \left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2 + \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2\right]\cdot$$

$$\cdot\left[2z_{12}^2 i_{21}\sin\frac{\psi_1-\varphi_1}{2}\cos\frac{\psi_1-\varphi_1}{2} - 2qz_1\sin^2\frac{\psi_1-\varphi_1}{2}\right] = 0, \qquad (23)$$

unde :

$$q = x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a. \qquad (24)$$

Cu notația :

$$\alpha = \psi_1 - \varphi_1 \qquad (25)$$

relaţia (23) devine

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left\{\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2-\frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2\right]\cdot\left[z_1 i_{21}(q+a)\cos\frac{\alpha}{2}-q^2\sin\frac{\alpha}{2}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2+\frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2\right]\cdot\left[z_1^2 i_{21}\cos\frac{\alpha}{2}-z_1 q\sin\frac{\alpha}{2}\right]\right\}=0. \quad (26)$$

Sistemul format din (11) şi condiţia (26) dă ecuaţiile liniilor de contact în sistemul de coordonate mobil $O_1x_1y_1z_1$.

Fixînd parametrul $\psi_1(\alpha=\psi_1-\varphi_1)$, adică unghiul de rotaţie al melcului la funcţionare, relaţia (26) dă legătura între parametrii φ_1 şi p.

Prima familie a liniilor de contact se obţine din (11) şi anularea primului termen din (26), adică :

$$\begin{aligned} x_1&=x_1(\varphi_1,\ p),\\ y_1&=y_1(\varphi_1,\ p),\\ z_1&=z_1(\varphi_1,\ p),\\ \sin\frac{\alpha}{2}&=0\ ;\ \psi_1-\varphi_1=2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (27)$$

unde k reprezintă numărul de rotaţii ale melcului din momentul începerii studiului pînă la momentul considerat.

A doua familie a liniilor de contact se obţine din (11) şi anularea a celui de al doilea termen din (26), adică :

$$\begin{aligned} x_1&=x_1(\varphi_1,\ p),\\ y_1&=y_1(\varphi_1,\ p),\\ z_1&=z_1(\varphi_1,\ p),\\ &\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2-\frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2\right]\cdot\left[z_1 i_{21}(q+a)\cos\frac{\alpha}{2}-q^2\sin\frac{\alpha}{2}\right]+\\ &+\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2+\frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2\right]\cdot\left[z_1^2 i_{21}\cos\frac{\alpha}{2}-z_1 q\sin\frac{\alpha}{2}\right]=0. \end{aligned} \quad (28)$$

Deoarece liniile de contact se studiază în sistemul de coordonate fix O_1xyz se va face trecerea din sistemul $O_1x_1y_1z_1$ în sistemul O_1xyz cu ajutorul relaţiei matriceale

$$(\rho)=M_1^{-1}(\rho_1) \quad (29)$$

unde M_1^{-1} este matricea inversă a matricei M_1 și are, conform (4), expresia :

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\psi_1 & \sin\psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

ceea ce înseamnă că (29) ia forma :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi_1 & \sin\psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

de unde

$$\begin{aligned} x &= x_1\cos\psi_1 + y_1\sin\psi_1, \\ y &= -x_1\sin\psi_1 + y_1\cos\psi_1, \\ z &= z_1, \\ t &= t_1 = 1. \end{aligned} \tag{32}$$

Substituind (11) în (32) și ținînd seama de condiția $\psi_1 - \varphi_1 = 2k\pi$, după ordonare, se obține :

$$\begin{aligned} x &= x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a, \\ y &= 0, \\ z &= x_2(p)\sin\varphi_2 + z_2(p)\cos\varphi_2, \end{aligned} \tag{33}$$

ceea ce reprezintă familia liniilor de contact în planul mediu al roții, adică generatoarele succesive ale spirei melcului în acest plan.

A doua familie a liniilor de contact se obține înlocuind (11) în (32) și ținînd seama de ultima relație din (28), adică :

$$\begin{aligned} x &= [x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a]\cos(\varphi_1 - \psi_1), \\ y &= [x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a]\sin(\varphi_1 - \psi_1), \\ z &= x_2(p)\sin\varphi_2 + z_2(p)\cos\varphi_2, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2 - \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2\right]\cdot\left[[z_1 i_{21}(q+a)\cos\frac{\alpha}{2} - q^2\sin\frac{\alpha}{2}\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2 + \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2\right]\cdot\left[z_1^2 i_{21}\cos\frac{\alpha}{2} - z_1 q\sin\frac{\alpha}{2}\right] = 0.$$

Liniile de contact se determină după cum urmează:

— pentru prima familie a liniilor de contact exprimată prin sistemul (33) se fixează unghiul de rotație ψ_1 la funcționare a melcului ($\psi_2 = i_{21}\psi_1$) după care se dau valori parametrului p cu ajutorul cărora se determină coordonatele x,z ale liniei de contact în planul $y = 0$. Pentru diferite valori date lui ψ_1 rezultă familia de linii de contact.

— pentru a doua familie a liniilor de contact descrisă de sistemul (34) se fixează unghiul de rotație ψ_1 la funcționare al melcului ($\psi_2 = i_{21}\psi_1$). Se dă o valoare pentru unghiul φ_1 (sau $\varphi_2 = i_{21}\varphi_1$). Din ultima relație a sistemului (34) se determină parametrul p. Din primele trei ecuații ale sistemului (34) rezultă liniile de contact care se determină punct cu punct dînd valori discrete lui φ_1. Dînd diferite valori lui ψ_1 se poate calcula familia liniilor de contact.

În planul $y = 0$, din a doua ecuație a sistemului (34) rezultă:

$$\sin(\varphi_1 - \psi_1) = 0 \tag{35}$$

sau

$$x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a = 0. \tag{36}$$

Din (35) se poate scrie că:

$$\varphi_1 - \psi_1 = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}, \tag{37}$$

ceea ce, după înlocuire în primele trei relații ale sistemului (34), conduce la

$$\begin{aligned} x &= x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a, \\ y &= 0, \\ z &= x_2(p)\sin\varphi_2 + z_2(p)\cos\varphi_2. \end{aligned} \tag{38}$$

Soluția (37) care satisface atît prima cît și a doua familie a liniilor de contact arată că cele două familii (cele două cîmpuri de angrenare) se intersectează în planul $y = 0$.

Dacă se înlocuiește (37) în ultima relație din (34) se obține o ecuație în necunoscuta p, a cărui soluție dă valoarea parametrului p pentru care se intersectează cele două familii de linii de contact în planul $y = 0$.

3. FLANCURILE DINȚILOR ROȚII MELCATE

Suprafețele flancurilor dinților roților melcate se pot determina ca locul geometric al liniilor de contact înregistrat în sistemul $O_2x_2y_2z_2$ legat de roata melcată sau ca înfășurătoarea suprafețelor melcului.

Trecerea din sistemul $O_1x_1y_1z_1$ în sistemul $O_2x_2y_2z_2$ se face cu relația matriceală

$$(\rho_2) = M_2^{-1} \cdot M_1^{-1}(\rho_1), \tag{39}$$

unde M_2^{-1}, M_1^{-1} sînt metricele inverse ale matricelor M_2, M_1 de forma (4), (5) în care, însă, unghiurile φ_1, φ_2 se înlocuiesc cu unghiurile ψ_1, ψ_2.

După calculul acestor matrici din (39) se obține

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1\cos\psi_1\cos\psi_2 + y_1\sin\psi_1\cos\psi_2 + z_1\sin\psi_2 + a\cos\psi_2; \\ y_2 &= -x_1\sin\psi_1 + y_1\cos\psi_1, \\ z_2 &= -x_1\cos\psi_1\sin\psi_2 - y_1\sin\psi_1\sin\psi_2 + z_1\cos\psi_2 - a\sin\psi_2, \end{aligned} \tag{40}$$

Înlocuind (40) în (11) rezultă :

$$\begin{aligned} x_2 &= [x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a]\cos(\varphi_1-\psi_1)\cos\psi_2 + \\ &+ [x_2(p)\sin\varphi_2 + z_2(p)\cos\varphi_2]\cdot\sin\psi_2 + a\cos\psi_2, \\ y_2 &= [x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a]\sin(\varphi_1-\psi_1), \\ z_2 &= -[x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a]\sin\psi_2\cos(\varphi_1-\psi_1) + \\ &+ [x_2(p)\sin\varphi_2 + z_2(p)\cos\varphi_2]\cos\psi_2 - a\sin\psi_2. \end{aligned} \tag{41}$$

Atașînd sistemul (41) condiția (26) se obține ecuația suprafeței flancului dintelui roții melcate.

Una din soluțiile ecuației (26), pentru $n = 0$, este $\alpha = \varphi_1 - \psi_1 = 0$ și conduce la o parte a suprafeței flancului dintelui, care se obține din (41) înlocuind $\alpha = \psi_1 - \varphi_1 = 0$ (sau $\psi_2 - \varphi_2 = 0$), adică :

$$\begin{aligned} x_2 &= [x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a]\cos\psi_2 + [x_2(p)\sin\varphi_2 + \\ &+ z_2(p)\cos\varphi_2]\sin\psi_2 + a\cos\psi_2, \\ y_2 &= 0, \\ z_2 &= -[x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a]\sin\psi_2 + [x_2(p)\sin\varphi_2 + \\ &+ z_2(p)\cos\varphi_2]\cos\psi_2 - a\sin\psi_2 \end{aligned} \tag{42}$$

și ia forma :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2(p), \\ y_2 &= 0, \\ z_2 &= z_2(p), \end{aligned} \tag{43}$$

ceea ce reprezintă prima linie de contact a melcului cu roata melcată. Această linie de contact, (43), este chiar curba generatoare a spirei melcului (1).

Cealaltă soluţie a ecuaţiei (26) alături de (41) dă restul suprafeţei flancului dintelui roţii melcate, adică :

$$x_2 = [x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a]\cos(\varphi_1 - \psi_1)\cos\psi_2 +$$

$$+ [x_2(p)\sin\varphi_2 + z_2(p)\cos\varphi_2]\sin\psi_2 + a\cos\psi_2,$$

$$y_2 = [x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a]\sin(\varphi_1 - \psi_1),$$

$$z_2 = -[x_2(p)\cos\varphi_2 - z_2(p)\sin\varphi_2 - a]\sin\psi_2\cos(\varphi_1 - \psi_1) +$$

$$+ [x_2(p)\sin\varphi_2 + z_2(p)\cos\varphi_2]\cos\psi_2 - a\sin\psi_2, \tag{44}$$

$$\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2 - \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2\right]\cdot\left[z_1 i_{21}(q + a)\cos\frac{\alpha}{2} - q^2\sin\frac{\alpha}{2}\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial x_2(p)}{\partial p}\sin\varphi_2 + \frac{\partial z_2(p)}{\partial p}\cos\varphi_2\right]\cdot\left[z_1^2 i_{21}\cos\frac{\alpha}{2} - z_1 q\sin\frac{\alpha}{2}\right] = 0.$$

Se observă că prima parte a suprafeţei flancului dintelui roţii melcate (43) şi cu cea de a doua parte a suprafeţei flancului dintelui roţii melcate (44) se intersectează în planul $y_2 = 0$ al roţii (planul median).

Dacă curba generatoare Γ este o dreaptă în planul $y_2 = 0$ se obţin relaţiile din [1], dacă curba generatoare Γ este un arc de cerc în planul $y_2 = 0$ se obţin relaţiile din lucrarea [3] iar dacă curba generatoare Γ este un arc de cerc în planul $y_2 = -e$ se obţin relaţiile din lucrarea [4].

Se observă că metoda propusă de studiu a geometriei angrenajului melcat globoidal este mai simplă decît celelalte metode [1], [2], [3], [4] în sensul că evită determinarea vitezei relative.

Primit în redacţie la 6 iulie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. F.L. LITVIN, *Teoria zubcialih zaţeplenii*, Izd. Nauka, Moscova, 1968.
2. N.N. KRÎLOV, *Glaboidnoe zaţeplenie s vagnutim profilem cerviaca*, Trudî MIIT, 195 (1964).
3. V. HANDRA-LUCA, *Contribuţii la geometria angrenajului globoidal neriglat*, Bul, şt. al I.P. Cluj, 7 (1963),
4. V. HANDRA-LUCA, *Studiul geometrico-cinematic al angrenajului globoidal neriglat*, Şt. cerc. mec. apl., **46**, 3 (1987).
5. E. MURGULESCU şi alţii, *Geometrie analitică şi diferenţială*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962.

CONCEPTE PROBABILISTE ÎN MECANICA RUPERII MATERIALELOR

D. D. CIOCLOV
ISIM-Institutul de Sudură și Încercări de Materiale, Timișoara

Ruperea unui material este o experiență comună în viața de toate zilele.

Rezultatul acestei experiențe are în conștiința comună o conotație negativă, ruperea implicînd distrugerea obiectelor sau a construcțiilor care ne înconjoară. Conștiința non-realizării acestei experiențe conferă însă încredere, siguranță confort personal.

Operînd cu conceptele fizice cele mai generale fenomenul ruperii reflectă un transfer suficient de intens de energie spre un domeniu material solid unde să fie posibilă depășirea pragului de stabilitate a echilibrului energetic la nivelul constituenților elementari (atomi, molecule cristale, etc.). Destabilizarea echilibrului energetic la nivel microscopic este marcată de desfacerea legăturilor între elementele materiale constitutive, ceea ce generează discontinuități geometrice adică separarea mediului material. Incipiența ruperii prin desfacerea legăturilor elementare declanșează un transfer invers de energie din domeniul în care se produce separarea spre mediul material înconjurător. Ruperea materialelor apare astfel ca un proces de interacțiune energetică cu detalii la nivelul structurii elementare și cu efecte integrate la nivel macroscopic.

Desigur, mediul material în care își au sediul aceste fenomene nu are o alcătuire perfectă atît la nivelul elementar cît și la nivelul consistenței macroscopice. Materialele tehnice de rezistență cele mai uzuale, metalele și aliajele metalice prezintă defecte inerente la nivel elementar, așa cum sînt formațiile de dislocații, vacanțele sau impuritățile atomice, iar la nivel macroscopic defecte de o mare varietate sînt generate în procesele tehnologice de elaborare.

Natura, dispunerea și extinderea micro și macrodefectelor este însă nerepetabilă de la un domeniu material la altul reflectînd imperfecțiunea funciară a oricărui material tehnic.

În aceste circumstanțe orice fenomen de interacțiune energetică la nivelul la care sînt implicate defecte de material, implicit fenomenele de rupere, poartă pecetea aleatorului. Această comportare fundamentală este reflectată la nivel macroscopic de variabilitatea statistică a caracteristicilor de material care cuantifică rezistența materialelor. Faptul că și în cele mai elaborate condiții experimentale caracteristicile de rezistenta prezintă o variabilitate statistică dovedește natura intrinsec aleatoare a fenomenului de rupere a materialelor.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 1–2, 1991, P. 101–113

Pe de altă parte, influxul energetic către locurile în care își au sediul fenomenele de rupere este generat de evoluția sistemelor de forțe exterioare care au, de asemenea, în mod natural o desfășurare aleatoare atît ca intensitate cît și ca secvențare. Ruperea materialelor apare deci ca un rezultat de ansamblu al interacțiunii influxului energetic generat de forțele exterioare, cu natura imperfectă a materialelor tehnice, ceea ce conferă acestui fenomen o dublă condiționare aleatoare.

Recunoașterea acestui aspect în implicațiile lui practice impune mutații în concepțiile inginerești privind rezistența materialelor. Abordarea tradițională se bazează pe interpretarea deterministă atît a acțiunii forțelor exterioare cît și a răspunsului de rezistență a materialelor, cuantificarea fundamentală a siguranței făcîndu-se în această accepțiune prin coeficientul de siguranță definit ca raport între valoarea unei caracteristici minime de rezistență a materialului și intensitatea maximă previzibilă a solicitărilor exterioare.

Interpretarea în acești termeni schematizează însă sever realitatea furnizînd inginerului numai o judecată de valoare exclusivistă de tip da sau nu, ceea ce în practică nu s-a dovedit a fi întotdeauna acoperitoare. Analizele avariilor care au avut la bază cedarea prin rupere a structurilor de rezistență au relevat că este imposibilă evaluarea obiectivă a variabilității tuturor mărimilor implicate în procesul de rupere numai printr-un cuantificator determinist cum este coeficientul de siguranță. Considerarea implicațiilor aleatoare în fenomenologia ruperii materialelor transcede desigur metodele actuale deterministe de evaluare a siguranței, permițînd ca prin cuantificări probabiliste, să nuanțeze informația obținută pentru substanțierea deciziilor inginerești privind siguranța structurilor de rezistență. Ca un corolar al acestei abordări apare aserțiunea potrivit căreia siguranța absolută este un concept teoretic practic nerelizabil în lumea reală. Metodele probabiliste oferă însă inginerului posibilitatea cuantificării siguranței structurilor de rezistență prin indici de probabilitate, suficienți de scăzuți pentru a fi acceptați din punct de vedere economic, social sau ecologic.

Să relevăm în continuare aplicarea conceptelor probabiliste pentru evaluarea siguranței în condițiile în care ruperea materialelor este privită ca un fenomen cu particularități aleatoare.

Fie cazul unui element de structură a cărui rezistență R este descrisă de o variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate f_R (figura 1). Probabilitatea cumulată a evenimentului ca rezistența elementului să aibă valoarea R este

$$P_R(R) = \text{Prob}\,(x \leqslant R) = \int_0^R f_R(x)\,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

Dacă solicitarea, σ, are o apariție aleatoare descrisă de repartiția cu densitatea de probabilitate f_σ, (figura 1), atunci probabilitatea evenimentului ca solicitarea să ia valori cuprinse în intervalul $(\sigma, \sigma + \mathrm{d}\sigma)$ este $f_\sigma(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$. Ruperea elementului de structură este interpretată probabilist prin realizarea simultană a evenimentului ca solicitarea, σ, să se

realizeze în intervalul $(\sigma,\ \sigma + \mathrm{d}\sigma)$ și a evenimentului ca rezistența elementului de structură, R, să ia orice valoare mai mică decît solicitarea aplicată σ, adică $R \leqslant \sigma$. Cele două evenimente fiind independente, probabilitatea realizării lor simultane este

$$\mathrm{d}\mathscr{P} = P_R(\mathrm{R} = \sigma) \cdot f_\sigma(\sigma)\ \mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

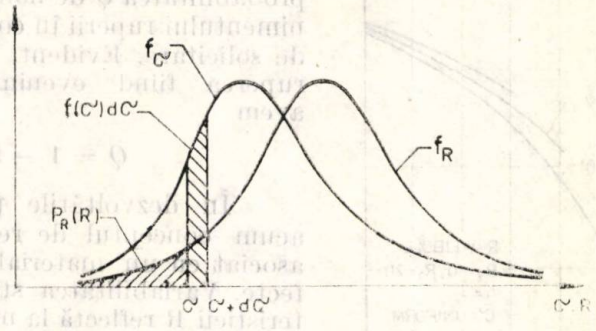


Fig. 1

Probabilitatea cumulată de apariție a ruperii pentru orice solicitare mai mică decît o valoare prestabilită este

$$\mathscr{P}(\sigma) = \int_0^\sigma P_R(R = \sigma) \cdot f_\sigma(\sigma)\ \mathrm{d}\sigma = \int_0^\sigma \int_0^\sigma f_R(R) \cdot f_\sigma(\sigma)\ \mathrm{d}R\ \mathrm{d}\sigma \tag{3}$$

Să exemplificăm această abordare considerînd un caz ilustrativ în care distribuția rezistenței elementului de structură este de tip Weibull așa după cum sugerează numeroase date experimentale. În această ipoteză, probabilitatea cumulată de rupere are forma

$$P_R(R) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{R - R_0}{R_a - R_0}\right)^b\right];\quad R \in (R_0,\ \infty) \tag{4}$$

unde R_0 este valoarea minimă a rezistenței, R_a un parametru de formă al distribuției semnificînd rezistența corespunzătoare probabilității cumulate de rupere $P = 0{,}652$ iar b este un parametru de formă al distribuției.

Să considerăm că solicitarea aleatoare are o distribuție uniformă cu densitatea de probabilitate constantă

$$f_\sigma(\sigma) = \frac{1}{2\delta};\quad \sigma \in (\overline{\sigma} - \delta\,;\ \overline{\sigma} + \delta) \tag{5}$$

unde δ este variația maximă în jurul solicitării medii.

Din conjuncția relațiilor (3), (4) și (5) după aplicarea unei proceduri de integrare numerică rezultă valorile probabilității cumulate de rupere corelate parametric cu intensitatea tensiunii aplicate așa cum se ilus-

trează în figura 2. În această reprezentare corelativă probabilitate de rupere-solicitare este un instrument de interpretare inginerească cu un conținut informațional mult extins față de conceptul clasic al coeficientului de siguranță.

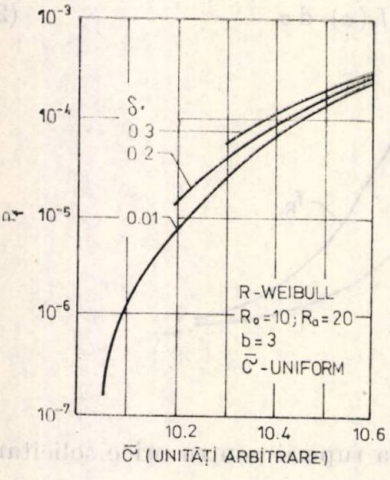


Fig. 2

Siguranța unei structuri de rezistență poate fi cuantificată acum prin probabilitatea Q de non-realizare a evenimentului ruperii în condițiile specifice de solicitare. Evident, ruperea și nonruperea fiind evenimente disjuncte avem

$$Q = 1 - \mathscr{P} \tag{6}$$

În dezvoltările prezentate pînă acum conceptul de rezistența R este asociat cu un material ideal fără defecte. Variabilitatea statistică a caracteristicii R reflectă la nivel macroscopic existența defectelor și neomogenităților la nivel atomic sau structural și implicarea lor în mecanismul de rupere. Defectele de extindere macroscopică dintre care cele mai acute, fisurile ce presupun discontinuități de material, pot fi cuprinse numai în cazul unor ipoteze noi privind rezistența materialelor, ipoteze care au fundamentat o abordare nouă cunoscută sub denumirea de „Mecanica ruperii materialelor".

Potrivit acestor concepții, existența unor discontinuități macroscopice de tip fisură în materialele tehnice de structură este o circumstanță posibilă în condiții tehnice normale. Postulatul fundamental al acestei abordări statuează că intensitatea cîmpului de tensiune și deformație indus de forțele exterioare în zona adiacentă frontului unei fisuri este factorul care guvernează extinderea indefinită a fisurii, adică ruperea materialului prin separare. În materialele cu comportare elastică cîmpul de tensiune prezintă o singularitate a tensiunii pe frontiera care delimitează fisura. Criteriul ruperii, decurgînd din postulatul fundamental al mecanicii ruperii materialelor stabilește că extinderea unei fisuri înglobată într-un mediu material survine atunci cînd partea principală a singularității cîmpului de tensiune asociat prezenței fisurii depășește o anumită valoare critică dependentă de material și eventual de activitatea mediului înconjurător (temperatura, acțiune chimică, iradiație etc.) Această valoare critică poartă denumirea de tenacitate la rupere K_C. Partea principală a singularității cîmpului elastic de tensiune are o exprimare funcțională tipică purtînd denumirea de factor de intensitate al tensiunii. Pentru o placă suficient de extinsă ce prezintă o fisură pătrunsă de lungime $2a$, placa fiind solicitată de forțe exterioare ce induc cîmpul omogen de tensiune σ într-o zonă îndepărtată de locul unde este plasată fisura (figura 3), factorul de intensitate al tensiunii are expresia

$$K = \sigma \sqrt{\pi \beta a} \tag{7}$$

unde β este un factor de corecție apropiat de unitate care ține seama de geometria finită a plăcii și eventual de configurația forțelor care solicită placa.

Ruperea survine cînd $K \geqslant K_C$ sau

$$\sigma \sqrt{\pi \beta a} \geqslant K_c \tag{8}$$

Criteriul exprimat prin relația (8) aduce elemente principial noi față de conceptele clasice ale rezistenței materialelor, prin corelarea a trei mărimi esențiale: un parametru de solicitare σ, o caracteristică de rezistență a materialului, tenacitatea K_C, și o caracteristică dimensională a defectului exprimată prin semilungimea a a fisurii.

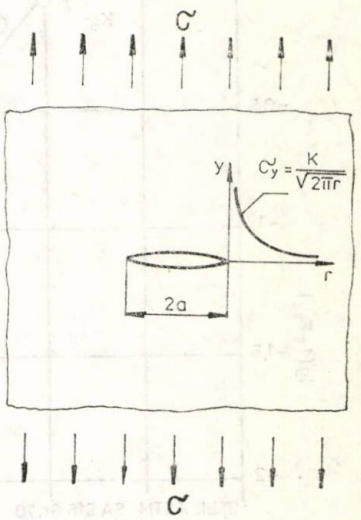


Fig. 3

În această abordare cunoașterea tenacității materialului și a intensității solicitării permite în virtutea egalității (8) determinarea mărimii limită a unui defect acut de tip fisură care poate să subsiste în material, sau la o mărime de defect cunoscută, rezultă univoc intensitatea limită a solicitării.

În aceste noi pontențialități rezidă progresul pe care îl aduce mecanica ruperii materialelor în corpul metodelor inginerești de dimensionare și verificare a structurilor de rezistență.

Dacă natura aleatoare a solicitărilor reale și a caracteristicilor de rezistență a fost relevată, este evident că și mărimea sau distribuția defectelor macroscopice are o natură aleatoare, rezultat implacabil al imperfecțiunii proceselor tehnologice de fabricație. Cuantificarea siguranței în termeni probabiliști pe baza criteriului (8) rezultă din interacțiunea celor trei variabile aleatoare asociate mărimilor σ, a și K_C, a căror distribuție statistică se determină pe baza datelor experimentale obținute din următoatele trei surse:

a) analiza experimentală a tensiunilor sau înregistrarea unor parametrii funcționali (de ex. evoluția presiunii într-un recipient) furnizează distribuția solicitării exterioare cu densitatea de probabilitate $f_\sigma(\sigma)$. Distribuția solicitărilor ia forme variate. Dacă ne referim numai la solicitările aplicate static, singular sau cu o repetitivitate rară care să nu inducă fenomene de oboseală, atunci, ipoteza unei distribuții normale (Gauss-Laplace) apare ca naturală. Distrubuții specifice fenomenelor cu apariție rară de tip Poisson sau de tip extremal (Gumbel, Weibull) sînt justificate în cazul structurilor de rezistență solicitate static cu variații accidentale în intensitatea solicitării. Uneori distribuția uniformă centrată pe intensitatea medie a solicitării reflectă suficient de bine variabilitatea solicitărilor exterioare.

b) Încercarea materialelor de structură furnizează distribuția tenacității K_C (sau eventual a altei caracteristici specifice) cu densitatea

de probabilitate $f_k(K_c)$. În privința distribuției caracteristicii de tenacitate, K_C, aceasta apare în mod natural ca fiind trunchiată la o limită inferioară (tenacitatea minimă) K_0, care poate fi reperată prin proceduri de extrapolare a rezultatelor experimentale. În figura 4 se ilustrează rezultatele obținute în încercrea de încovoiere prin șoc la temperaturi scăzute

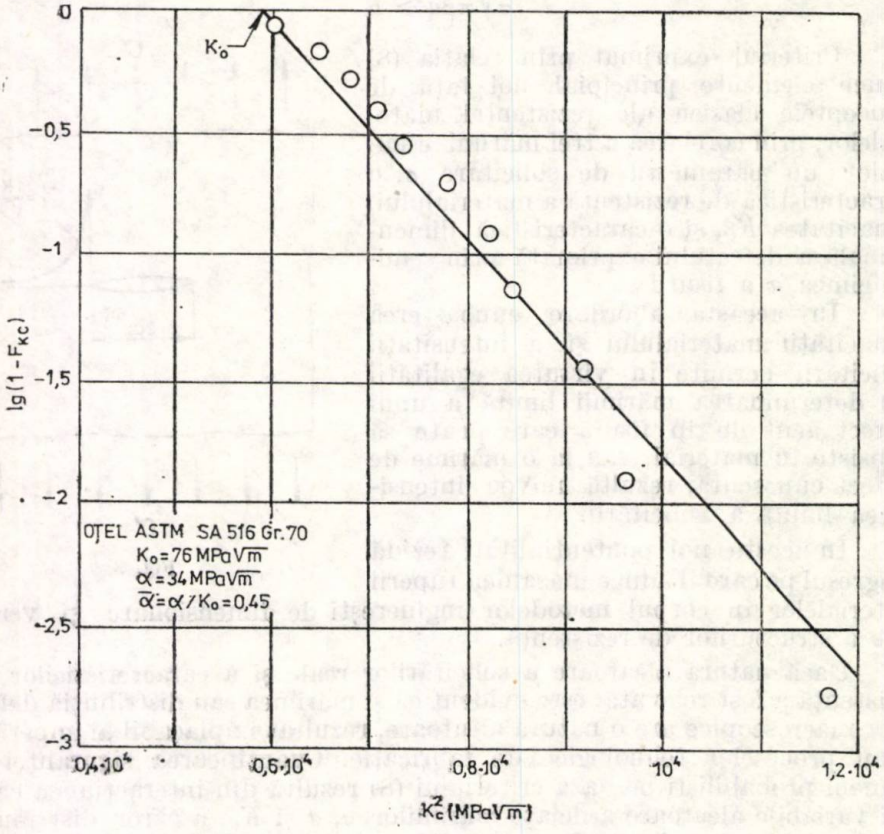


Fig. 4

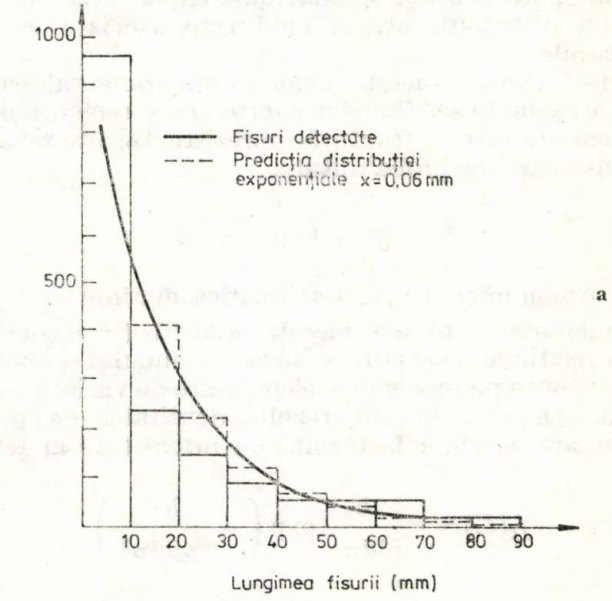
(−30°) cu un oțel ASTM 516, Gr. 70 destinat aplicațiilor criogenice. Reprezentarea este în coordonate funcționale corespunzătoare unei distribuții Rayleigh trunchiate cu funcția de repartiție

$$F_C(K_C) = 1 - \exp\left(-\frac{K_c^2 - K_0^2}{2\alpha^2}\right) \quad K \in (K_0, \infty) \tag{9}$$

unde α este un parametru de ajustare. Densitatea de probabilitate a distribuției tenacității rezultă ca fiind $f_c\ (K_c) = \mathrm{d}F_c/\mathrm{d}K_c$. Probabilitatea cumulată de realizare a fiecărui experiment ilustrat în figura 4, $P_i = F_c(K_{ci})$ s-a determinat prin metodele statisticii ordinei.

Alte distribuții care descriu bine variabilitatea statistică a tenacității K_C sînt cele de tip Weibull sau log-normală specifice caracteristicilor de rezistență a materialelor.

c) Controlul nedistructiv cu metodele actuale cele mai uzuale, cu ultrasunete, radiații X, particule magnetice etc., furnizează distribuția dimensiunilor dominante a defectelor acute de tip fisură cu densitatea de probabilitate $f_a(a)$. Volumul mare de control nedistructiv care se practică în prezent ca urmare a cerințelor din reglementările oficiale de supraveghere tehnică permite un studiu aprofundat al repartiției după dimensiune a defectelor reale din structurile de rezistență. În figurile 5a și b este ilustra-



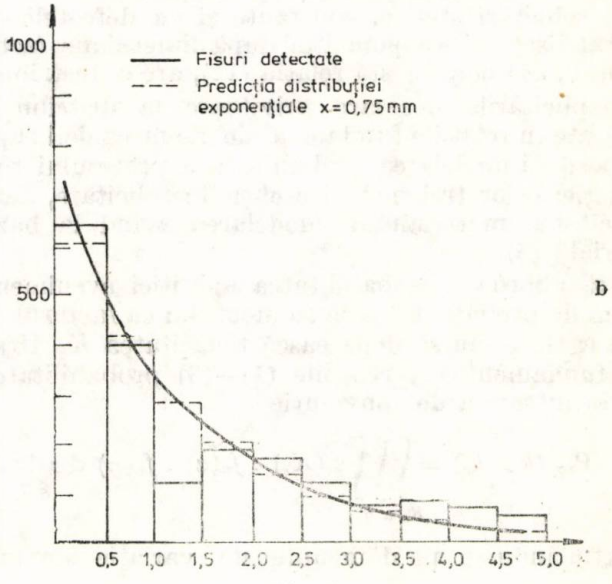


Fig. 5

tă distribuția adîncimii și lungimii fisurilor depistate pe suprafața interioară a recipientelor sferice destinate stocării produselor petroliere lichefiate. Rezultatele ilustrate au fost obținute într-o campanie de control nedistructiv a îmbinărilor sudate din peste o sută de recipiente sferice confecționate și exploatate în Japonia. Aceste rezultate concordă cu rezultatele campaniilor de control nedistructiv efectuate în România, relevînd că dimensiunile ce caracterizează defectele plane de tip fisură, adîncimea și lungimea fisurilor se distribuie exponențial confirmînd generalitatea acestei distribuții atunci cînd este asociată cu dimensiunile defectelor naturale.

Să considerăm pe baza acestor evidențe experimentale că dimensiunea dominantă, spre exemplu semilungimea a (figura 3) reperată pe o populație de fisuri ce preexistă într-o structură de rezistență, este repartizată exponențial cu densitatea de probabilitate.

$$f_a(a) = \lambda \exp(-\lambda a) \tag{10}$$

unde $\lambda = 1/\bar{a}$, $\bar{a}$ semnificînd media aritmetică mărimii a.

Dacă solicitarea este considerată statică (σ = constant), atunci din conjuncția relațiilor (7) și (10) pe baza principiului egalității probabilității totale distribuite pe intervalele elementare de variație ale variabilelor K și a, adică $f_k(K)\mathrm{d}k = f_a(a)\mathrm{d}a$, rezultă densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare asociată factorului de intensitate al tensiunii

$$f_k(K) = \frac{2k}{\pi\beta\bar{a}\sigma^2} \exp\left(-\frac{K^2}{\pi\beta\bar{a}\sigma^2}\right) \tag{11}$$

Acest rezultat are o importanță principială deoarece relevă că în condițiile unei solicitări statice, constante și cu defectele din domeniul material solicitat distribuite exponențial după dimensiune, factorul de intensitate al tensiunii, așa cum atestă relația (11), are o dustribuție Rayleigh.

Avînd explicitările necesare privitoare la distribuția mărimilor care sînt implicate în relațiile fundamentale ale mecanicii ruperii materialelor, devine posibilă modelarea probabilistă a procesului ruperii în contextul interrelației celor trei factori esențiali : solicitare, defecte preexistente și tenacitatea materialului, modelarea avînd la bază relația de legătură criterială (8).

În această abordare probabilitatea apariției evenimentului ruperii $\mathscr{P}_f$ se cuantifică de probabilitatea evenimentului ca factorul de intensitate al tensiunii să egaleze sau să depășească tenacitatea K_c. Urmînd raționamentele care fundamentează relațiile (1)—(3) probabilitatea de rupere se exprimă prin integrala de convoluție

$$\mathscr{P}_f = \mathrm{P}_{ro}(k \geqslant k_c) = \int_{K_c}\int_{a}\int_{\sigma} f_c(K_c) \cdot f_a(a) \cdot f_\sigma(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}K_c \tag{12}$$

integrarea extinzîndu-se pe domeniile de variație ale mărimilor σ, a și K_c.

Evaluarea numerică a integralei de convoluție (12) este o problemă tipică care se rezolvă prin simulare numerică aleatoare de tip Monte-Carlo. Conceptul de simulare numerică aleatoare implică o construcție alogaritmică apriorică menită să previzioneze o comportare reală în contextul în care variabilele sistemului au o variație aleatoare. Prin repetarea alogaritmului de calcul de un număr suficient de mare de ori cu date de intrare avînd de la o execuție la alta o variație aleatoare după o distribuție uniformă, rezultă frecvența realizării evenimentului studiat, ca o aproximație a probabilității teoretice a evenimentului. Adecvarea metodelor de simulare aleatoare este desigur determinată pe de-o parte de legitimarea alogaritmului pe baza legilor fizice generale și a suportului experimental în toate verigile alogaritmului, iar pe de altă parte, de posibilitatea repetării execuției alogaritmului de un număr suficient de mare pentru a da convergență estimărilor.

Capacitatea mare de procesare a datelor oferită de microcomputerele din generația actuală inclusiv posibilitatea procesării paralele pe aceste sisteme individualizate a adus metodele de simulare numerică aleatoare în cîmpul practicii inginerești imediate. În cazul analizei fenomenelor de rupere, baza conceptuală a metodelor de simulare aleatoare de tip Monte-Carlo este în perfectă concordanță cu caracterul intrinsec aleator al fenomenului ruperii materialelor. Apare deci că metodele probabiliste pot aduce progrese substanțiale în nuanțarea interpretărilor inginerești comparativ cu metodele deterministe specifice științei rezistenței materialelor în sensul ei tradițional. Să considerăm în continuare problema determinării probabilității de rupere particularizînd alogaritmul exprimat de relația (12) prin distribuții specifice substanțiate de datele experimentale cunoscute.

Dacă considerăm mărimea defectelor de tip fisură preexistente ca fiind distribuite exponențial potrivit relației (10) iar tenacitatea și solicitarea avînd fiecare o valoare constantă deterministă K_0 și respectiv σ, atunci integrala (12) furnizează probabilitatea cumulată de rupere.

$$\mathscr{P}_f = \exp\left(-\frac{K^2}{\pi\beta\bar{a}\sigma^2}\right) = F(\sigma, K) \tag{13}$$

Funcția $F(\sigma, K)$ reprezintă de fapt funcția de repartiție a variabilei aleatoare asociate fenomenului de rupere. Relația (13) importantă prin forma ei compactă se constituie într-un criteriu probabilist de verificare a siguranței putînd fi însă utilizată și direct în calculele de dimensionare. Spre exemplu, pentru realizarea unei probabilități de cedare mai mică decît o valoare fixată $\mathscr{P}_f$ în condițiile existenței unei populații de defecte tip fisură distribuite exponențial cu media semilungimii fisurii $\bar{a}$, tensiunea aplicată σ trebuie să fie mai mică decît

$$\sigma_{ap} = 0{,}3718\frac{K_0}{\sqrt{\pi\beta\bar{a}\,|\log \mathscr{P}_f|}} \tag{14}$$

Să considerăm mai departe că solicitarea exterioară are o variație aleatoare cu densitatea de probabilitate

$f_\sigma(\sigma)$ cu $\sigma \in (\sigma_m, \sigma_M)$. Din conjuncția relațiilor (12) și (13) rezultă

$$\mathscr{P}_f = \int_{\sigma_m}^{\sigma_M} f_\sigma(\sigma) \cdot F(\sigma, K)\, \mathrm{d}\sigma \tag{15}$$

Dacă și tenacitatea materialului K_C, este distribuită cu densitatea de probabilitate $f_c(K_c)$ cu $K_c \in (K_0, K_M)$ atunci în virtutea relațiilor (12) și (15) rezultă

$$\mathscr{P}_f = \int_{k_0}^{K_M} \int_{\sigma_m}^{\sigma_M} f_c(K_c) \cdot f_\sigma(\sigma) \cdot F(\sigma, K_c)\mathrm{d}\sigma \,.\, \mathrm{d}K_c \tag{16}$$

Să analizăm în cîteva cazuri particulare predicția probabilității de cedare după relația (16). În cazul în care factorul de intensitate al tensiunii K, are o distribuție Rayleigh — relația (11) — ceea ce implică faptul că mărimea fisurilor, a, este distribuită exponențial, solicitarea σ o considerăm distribuită uniform în jurul valorii medii $\bar{\sigma}$ cu densitatea de probabilitate $f(\sigma) = 1/2\,\delta$ (relația 5) iar tenacitatea materialului are o valoare deterministă, constantă K_0, atunci probabilitatea de cedare se poate exprima în două forme echivalente

$$\mathscr{P}_f = \frac{1}{2\delta} \int_{\bar{\sigma}-\delta}^{\bar{\sigma}-\delta} \exp\left(-\frac{K_0^2}{\pi\beta\bar{a}\,\sigma^2}\right) \mathrm{d}\sigma \tag{17}$$

$$\mathscr{P}_f = \frac{1}{\pi\beta\bar{a}\,\delta} \int_{\bar{\sigma}-\delta}^{\sigma+\delta} \int_0^{1/K_0} \frac{\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}x}{\sigma^2 x^3 \exp(1/\pi\beta\bar{a}\,\sigma^2 x^2)} \tag{18}$$

relații care permit o analiză a convergenței rezultatelor simulării de tip Monte-Carlo aplicată în integrarea relației (18), comparativ cu rezultatul integrării după o metodă numerică deterministă oricît de precisă în relația echivalentă (17).

În figura 6 se ilustrează această comparație pentru datele inițiale : $K_0 = 2000$ N. mm$^{-3/2}$; $\sigma = 50$ N/mm^2 ; $\delta = 20$ N/mm^2 ; $\bar{a} = 10$ mm integrarea în relația (17) efectuîndu-se după metoda Simpson. Se remarcă creșterea preciziei simulării Monte-Carlo odată cu creșterea numărului de execuții N (precizia aproximării este proporțională cu $\sqrt{N}$).
Se vede că o precizie și convergență rezonabilă se stabilizează în aplicarea metodei Monte-Carlo pentru un număr mare de execuții în simularea aleatoare a evenimentului ruperii, practic mai mare de 10^5.

Un model general de evaluare a probabilității de rupere este cel care consideră dimensiunea fisurilor distribuită exponențial, tenacitatea materialului distribuită Weibull cu densitatea de probabilitate

$$f_c(K_c) = \frac{b}{K_a - K_0}\left(\frac{K - K_0}{K_a - K_0}\right)^{b-1} \exp\left[-\left(\frac{K - K_0}{K_a - K_0}\right)^b\right] \tag{19}$$

unde K_0 este tenacitatea minimă, K_a și b sînt parametrii de ajustare statistică (vezi și relația (4)) iar solicitarea are intensitate distribuită normal cu densitatea de probabilitate

$$f_\sigma(\sigma) = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\sigma - \bar{\sigma})^2}{2d^2} \right]. \tag{20}$$

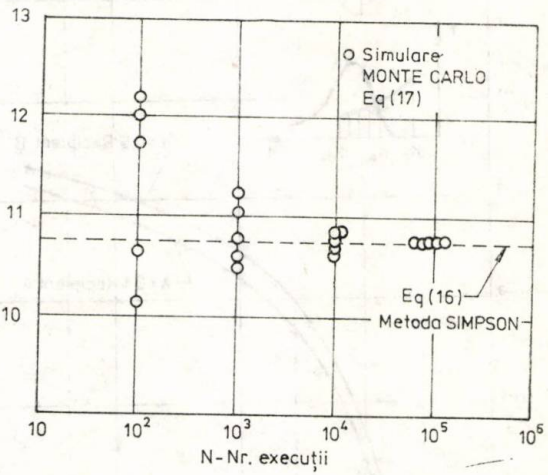


Fig. 6

Probabilitatea de cedare în aceste circumstanțe rezultă din conjuncția relațiilor (13), (16), (19) și (20)

$$\mathscr{P}_f = \frac{b}{d\sqrt{2\pi}(K_a - K_0)^b} \int_0^{1/K_0} \int_{\bar{\sigma}-\lambda d}^{\bar{\sigma}+\lambda d} \frac{(1 - zK_0)^{b-1}}{z^{b+1}} \exp\left[-\left(\frac{1 - zK_0}{z(K_a - K_0)} \right)^b - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi\beta\bar{a}z^2\sigma^2} - \frac{(\sigma - \bar{\sigma})^2}{2d^2} \right] d\sigma dz \tag{21}$$

cu $\sigma \in (-\lambda d, \lambda d)$ și $z \in (0, 1/k_0)$ unde distribuția normală a solicitării a fost trunchiată simetric în jurul tensiunii medii $\bar{\sigma}$ la limita de λ dispersii d.

În continuare să exemplificăm pe baza conceptelor probabiliste dezvoltate în această lucrare, analiza siguranței a două recipiente sferice destinate stocării produselor petroliere lichefiate. În urma controlului nedistructiv integral cu ultrasunete a îmbinărilor sudate și a zonelor adiacente, s-a relevat o distribuție exponențială de tipul celei ilustrate în figura 5a și b. Distribuția tenacității K_c s-a considerat de forma

$$f_c(K_c) = \alpha^2(K_c - K_0) \exp[-\alpha (K_c - K_0)] \tag{22}$$

cu variația factorului de intensitate al tensiunii cuprinsă între limitele K_m și K_M, iar solicitarea exterioară σ s-a admis constantă corespunzătoare presiunii de stocare. În figura 7 se ilustrează rezultatele acestei analize. În acest caz concret se relevă că la încercarea periodică la suprapresiune conform prescripțiilor legale, probabilitatea cumulată de rupere este mai mică decît 10^{-2} fiind evident prea mare pentru a putea fi accep-

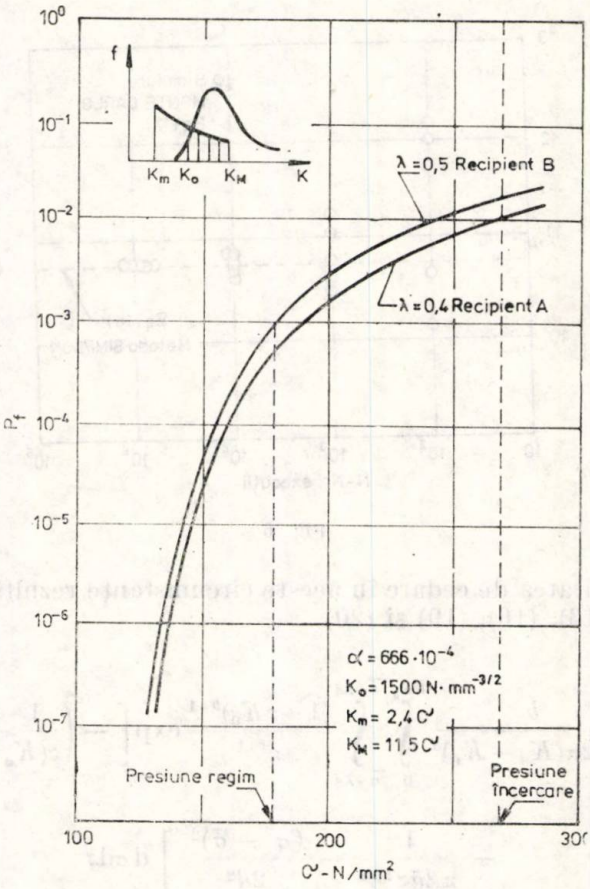


Fig. 7

tată. Deasemenea și probabilitatea cumulată de rupere în serviciu la presiunea de regim este de ordinul 10^{-3}, și această valoare fiind considerată inacceptabilă în contextul urmărilor extrem de grave pe care le implică un accident la o astfel de construcție. Pe aceste baze s-a hotărît sistarea funcționării bateriei de recipiente, remanierea prin polizare și/sau sudare a fisurilor reperate, retestarea distribuției K_C în metalul depus și în zona influențată termic a îmbinărilor remaniate pe probe martor din material extras din recipiente ca și recontrolarea integrală prin metode nedistructive pentru stabilirea noului spectru de defecte. Analiza probabilistă

în aceste circumstanţe a evidenţiat că după reparaţie probabilitatea de cedare este mult sub un prag acceptabil considerat a fi de 10^{-6}.

În final se impune a releva că metodele probabiliste de predicţie în asociaţie cu conceptele mecanicii ruperii materialelor oferă inginerului metode de evaluare a siguranţei structurilor de rezistenţă ce transced metodele clasice ale rezistenţei materialelor. Aceste probleme noi sînt asociate cu deciziile privitoare la stabilirea riscului acceptabil cuantificat prin probabilităţi de rupere, decizii în care sînt implicate considerente economice, sociale şi nu în cel din urmă cele ecologice.

Primit în redacţie la 4 iunie 1990

DINAMICA SISTEMULUI MAȘINĂ-FUNDAȚIE-SOL: O TRECERE ÎN REVISTĂ A STADIULUI ACTUAL AL PROBLEMEI

GH. BUZDUGAN
Institutul Politehnic, București

Mașinile stabile grele — turbine, compresoare, motoare diesel sau cu gaz, pompe — se reazemă pe sol prin intermediul unor fundații făcute, de obicei, din beton armat. În acest caz, solul constituie elementul elastic și amortizor care condiționează răspunsul sistemului la excitațiile produse de mașini. Datorită marii diversități de soluri și neomogenității acestora, rezolvarea problemei dinamice întîmpină dificultăți, fapt care a generat numeroase metode de rezolvare.
Studiul de față face o prezentare actuală a metodelor de calcul pentru dinamica sistemului mașină-fundație-sol. Fiind destinat în primul rînd inginerilor proiectanți, studiul renunță la considerente teoretice complicate și prezintă atît metodele de calcul clasice, consacrate, cît și metodele noi, în măsura în care ele și-au dovedit aplicabilitatea. Expunerea pune accentul pe calcularea constantelor elastice și amortizărilor — mărimi esențiale pentru rezolvarea problemei.

1. INTRODUCERE

Construcțiile de mari dimensiuni sînt supuse unor variate acțiuni dinamice, deterministe sau aleatoare, provenite de la cutremure de pămînt, explozii cu scop industrial, mașini producătoare de sarcini dinamice, vehicule, vînt, valuri.

Limitînd expunerea ce urmează la problema conlucrării dintre mașină, fundație și sol, vom căuta a descrie mersul istoric și stadiul actual al cercetărilor puse în slujba proiectantului. Lăsînd la o parte necunoscutele legate de forțele ce acționează sistemul fundație-sol, problema prezintă numeroase complicații rezultînd din varietatea solurilor, neomogenități, anizotropii, neliniarități. La acestea se adaugă variabile datorite formei tălpii fundației și îngropării fundației în sol.

Aceste motive au făcut ca problema să pasioneze un mare număr de cercetători, studiile respective fiind redate în periodice de geotehnică și mecanica solurilor, în comunicările congreselor și simpozioanelor, în monografii asupra dinamicii solurilor și fundațiilor de mașini.

Printre monografiile care au făcut epocă se numără cartea lui E. Rausch, publicată în prima ediție în 1936 și în ultima în 1959 [30] și cea a lui D.D. Barkan, apărută în limba rusă în 1948 și în engleză în 1962 [1]. La acestea se pot adăuga monografiile publicate de A. Major [23], F.E. Richart ș.a. [31], H. Lorenz [22], J. Lipińsky, sau cele mai recente, publicate de P.J. Moore în 1985 sau de S. Prakash și V.K. Puri în 1988 [29] și altele.

Dacă majoritatea monografiilor au fost publicate în Europa, datorită și faptului că aici se vorbesc mai multe limbi, în schimb se pare că în ultima vreme cele mai numeroase cercetări au loc în țările Americii de Nord.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 1—2, 1991, P. 115—150

În rezolvarea problemei s-au conturat două direcții, care au condus la două metode :

— metoda coeficienților elastici dinamici ai solului, preferată în Europa ;

— metoda semispațiului elastic, dezvoltată mai ales în America, folosită și în restul lumii.

Marea varietate de factori care condiționează problema — unii enumerați mai sus, alții prezentați în cele ce urmează — a făcut ca metodele de calcul să se amelioreze mereu, fapt ce obligă pe inginerul practician să se țină mereu la curent cu noile rezultate. Acest lucru a făcut ca în literatura de specialitate să se publice, la intervale scurte, lucrări de sinteză, unele purtînd denumirea „state-of-the-art". Așa sînt, de exemplu, referatele prezentate la Tokio în 1977 de către D.D. Barkan [2] și F.E. Richart [32], trecerea în revistă a lui G. Gazetas din 1983 [18], cea a lui Miloš Novak din 1987 [27] și altele. Lucrarea de față se înscrie în aceeași categorie, fiind prima prezentare de acest fel pentru cititorul român.

Studiul interacțiunii dinamice dintre fundație și sol comportă, în esență, următoarele calcule : determinarea frecvențelor proprii, determinarea mărimii deplasărilor la rezonanță și la turația de regim, sub acțiunea forțelor perturbatoare date. Acestea vor fi examinate cu prioritate în cadrul lucrării.

Studiul complet al dinamicii fundațiilor de mașini necesită în plus determinarea mărimii forțelor perturbatoare, a proprietăților de elasticitate și amortizare ale elementelor izolatoare (inclusiv solul), aprecierea siguranței în funcționare etc.

Punctul de plecare în expunerea ce urmează îl constituie caracteristicile elastice și fizice ale solului — ce vor fi expuse sumar în paragraful 3 — , care nu depind de fundație. În continuare se va examina problema dinamicii sistemului fundație-sol.

2. VIBRAȚIILE RIGIDULUI REZEMAT ELASTIC

Spre a înțelege mai bine problema dinamicii sistemului fundație-sol, se dau, succint, principalele relații pentru calculul pulsațiilor proprii și amplitudinii deplasărilor unui rigid rezemat elastic, excitat prin forțe sau cupluri variind armonic.

Ansamblul rigid format din mașină și fundație, rezemat pe sol, poate avea șase grade de libertate, translațiile x, y, z și rotațiile φ_x, φ_y, ψ, arătate în figura 1. În cele ce urmează, blocul de fundație va avea dimensiunile indicate în figura 2 ; O este centrul de greutate al blocului, iar C — centrul de greutate al suprafeței de rezemare, aflată în planul $x_c y_c$.

Rigidul din figura 3, aflat în translație verticală pe direcția axei z, are pulsația proprie

$$p_z = \sqrt{k_z/m} \ \text{[rad/s]}. \qquad (1)$$

Dacă mișcarea este întreținută de o forță armonică

$$F(t) = F_0 \sin \omega t,$$

amplitudinea deplasării verticale este

$$A_z = \frac{F_0}{k_z} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} = \frac{F_0}{k_z} A_1, \tag{2}$$

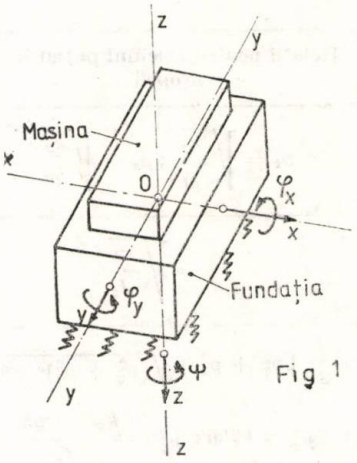


Fig 1

Fig. 1

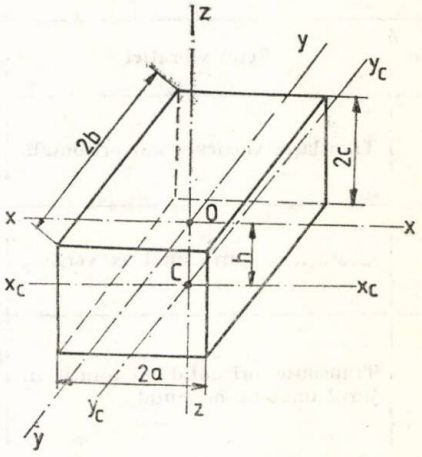


Fig. 2

unde s-a notat

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}, \tag{3}$$

$$\eta = \omega/p_z. \tag{4}$$

În ce privește *raportul de amortizare*, el este

$$\zeta = c/c_c, \tag{5}$$

unde c (N.s/m) este amortizarea efectivă, iar

$$c_c = 2\sqrt{k_z \cdot m} \tag{6}$$

este amortizarea critică.

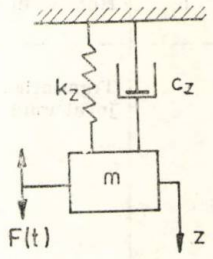


Fig. 3

Dacă excitația se face prin forță de inerție

$$F(t) = m_0 r_0 \ \omega^2 \cdot \sin\omega t,$$

amplitudinea deplasării este

$$A_z = \frac{m_0 r_0}{m + m_0} \cdot \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \approx \frac{m_0 r_0}{m} \cdot A_2, \tag{7}$$

unde factorul de amplificare este

$$A_2 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}. \tag{8}$$

Pentru diferitele feluri de mișcări ale rigidului, expresiile pulsațiilor proprii sînt date în tabelul 1. În relațiile de mai sus, constantele

Tabelul 1

Pulsații proprii ale rigidului rezemat elastic

Cazul	Felul vibrației	Relații pentru calculul pulsațiilor proprii
a	Translație verticală sau orizontală	$p_z = \sqrt{\frac{k_z}{m}}$; $p_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}$
b	Rotație în jurul unui ax vertical	$p_\psi = \sqrt{\frac{k_\psi}{J_z}}$
c	Translație orizontală și rotație în jurul unui ax orizontal	$p^2_{1,2} = \frac{1}{2\gamma}\left[p_\varphi^2 + p_x^2 \mp \sqrt{(p_\varphi^2 + p_x^2)^2 - 4\gamma p_\varphi^2 p_x^2}\right]$ $p_x^2 = k_x/m$; $p_\varphi^2 = \frac{k_\varphi - mgh}{J_e}$

Tabelul 2

Amplitudinile deplasărilor rigidului rezemat elastic, excitat prin forțe armonice

Cazul	Felul vibrației	Relații pentru calculul amplitudinii deplasărilor
a	Translație verticală sau orizontală	$A_z = \frac{F_{z0}}{k_z} A_1$; $A_x = \frac{F_{x0}}{k_x} A_1$
b	Rotație în jurul unui ax vertical	$A_\psi = \frac{M_{\psi 0}}{k_\psi} A_1$
c	Translație orizontală și rotație în jurul unui ax orizontal	$A_x = \frac{(k_\varphi + k_x h^2 - J\omega^2) F_{x0} + k_x h M_0}{\Delta(\omega^2)}$ $A_\varphi = \frac{k_x h F_{x0} + (k_x - m\omega^2) M_0}{\Delta(\omega^2)}$ $\Delta(\omega^2) = mJ(p_1^2 - \omega^2)(p_2^2 - \omega^2)$ Cazuri particulare : $A_x = \frac{F_{x0}}{k_x - m\omega^2}$, cînd $L_x > 3H$; $A_\varphi = \frac{F_{x0}(f+h)}{k_\varphi - J\omega^2}$, cînd $L_x < \frac{1}{2}H$, unde L_x este lungimea rigidului în lungul axei x și H — înălțimea lui.

elastice k_z, k_x se măsoară în N/m, iar k_φ, k_ψ în N.m. În relațiile din tabelul 1 și 2 s-a notat : J — momentul de inerție masic față de axa trecînd prin O, paralelă cu axa de rotație ; J_C — momentul de inerție masic față de axa paralelă cu precedenta, trecînd prin C :

$$\gamma = J/J_C, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1 ; \tag{9}$$

J_z — momentul de inerție masic față de axa verticală z;

Pentru vibrațiile forțate, excitate prin forțe și cupluri armonice de amplitudine constantă ($F_0 \cdot \sin \omega t$, $M_0 \cdot \sin \omega t$), amplitudinile deplasărilor sînt date de relațiile din tabelul 2. Se mai precizează următoarele referitor la tabelul 2 : cotele h și f sînt arătate în figura 4. Dacă cuplul rezultă numai din forța F_{x0}, expresia lui este

$$M_0 = F_{x0} \cdot f \tag{10}$$

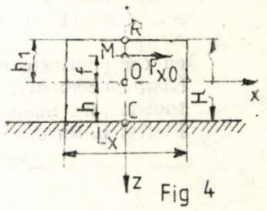


Fig. 4

3. CONSTANTE ELASTICE ȘI CARACTERISTICI FIZICE ALE SOLURILOR

În relațiile ce vor urma intervin o serie de mărimi ce caracterizează solurile, asupra cărora se vor da unele informații numerice. Referitor la metodele experimentale pentru determinarea acestor mărimi, se va consulta literatura de specialitate.

Se reține de la început că solul, ca orice material, trebuie să fie cunoscut, iar această cunoaștere rezultă numai din experiență.

Valorile mărimilor de calcul pot fi cunoscute „statistic", de exemplu, folosind tabele de felul celor redate în continuare. Utilizarea valorilor statistice se va face cu prudență, fiind de preferat determinarea experimentală, în fiecare caz, a acestor constante ale solurilor. Dintre constantele elastice, de primă importanță sînt modulele de elasticitate E și G.

3.1. MODULUL DE ELASTICITATE E

Experiența arată că în relațiile de vibrații introducerea modulului de elasticitate static E_s dă rezultate corecte numai pentru materiale cu frecare internă mică — de exemplu oțeluri. Pentru materiale cu amortizări puternice—soluri, polimeri — este necesară introducerea modulului de elasticitate dinamic E_d, sensibil mai mare decît E_s. În literatură se dau indicații privind relațiile de definiție și metodele de determinare a modulului de elasticitate dinamic. Tabelul 3 dă valorile E_s, E_d pentru o serie de soluri.

Tabelul 3

Module de elasticitate statice și dinamice ale unor soluri

Felul solului	Modulul de elasticitate, MPa	
	Static, E_s	Dinamic, E_d
Necoezive		
Nisip afînat cu boabe rotunde	40 ... 80	150 ... 300
Nisip afînat cu boabe colțuroase	50 ... 80	150 ... 300
Nisip cu compactitate mijlocie, rotund,	80 ... 160	200 ... 500
Nisip cu compactitate mijlocie, colțuros	100 ... 200	200 ... 500
Pietriș fără nisip	100 ... 200	300 ... 800
Pietriș natural, colțuros	150 ... 300	300 ... 800
Coezive		
Argilă tare	8 ... 50	100 ... 500
Argilă moale	6 ... 20	40 ... 150
Argilă greu de frămîntat	3 ... 6	30 ... 80
Lut, lut cu marnă, tare	6 ... 50	100 ... 500
Lut moale, lut cu loess	4 ... 8	50 ... 150
Argilă slabă	3 ... 8	30 ... 100
Nămol, sărac în substanțe organice	2 ... 5	10 ... 30

3.2. MODULUL DE ELASTICITATE TRANSVERSAL G

Cheia succesului în metoda semispațiului elastic este cunoașterea modulului de elasticitate G. După B.O. Hardin și W.L. Black (1968) acest modul este funcție de un număr mare de factori.

O metodă de calcul se bazează pe măsurarea vitezei de propagare a undelor transversale în sol

$$v_T = \sqrt{G/\rho}, \tag{11}$$

relație din care se poate calcula G.

În literatura de specialitate [28, 29, 31, 33, 35] se dau numeroase tabele, relații de calcul și grafice privind modulul de elasticitate G și dependența lui de diverși factori.

Tabelul 4

Module de elasticitate transversale ale unor soluri

Felul solului	G, MPa
Argilă moale	20 ... 35
Argilă tare	70 ... 140
Argilă foarte tare	140
Nisip afînat	35 ... 105
Nisip compact	70 ... 140
Pietriș cu compactitate mijlocie	105 ... 175
Pietriș compact	140 ... 275

Tabelul 5

Coeficienți de contracție transversală pentru soluri

Felul solului	ν
Argilă saturată	0,45 ... 0,50
-„- parțial saturată	0,40 ... 0,45
Nisip sau pietriș compact	0,35 ... 0,40
Terenuri necoezive (nisip)	0,30 ... 0,35
Umplutură	0,30 ... 0,40

În tabelul 4 se dau, informativ, cîteva valori ale modulului de elasticitate G. Marea dispersie pentru un anumit sol pledează pentru determinarea experimentală, prin măsurări de laborator sau in-situ.

3.3. COEFICIENTUL DE CONTRACȚIE TRANSVERSALĂ

Unele valori ale lui ν sînt date în tabelul 5. Multe dintre studiile făcute asupra dinamicii solurilor folosesc valoarea $\nu = 0{,}25$ sau $\nu = 1/3$.

3.4. VITEZE DE PROPAGARE A UNDELOR

Una dintre cele mai comode și sigure metode de determinare a modulului de elasticitate G este măsurarea, in-situ, a vitezei de propagare a undelor transversale, aplicînd apoi relația (11). În tabelul 6 se dau, informativ, după D.D. Barkan [1] cîteva valori ale vitezelor de propagare pentru unele soluri : v_L este viteza undelor longitudinale, iar v_T — a celor transversale.

Tabelul 6

Viteze de propagare a undelor elastice în unele soluri

Felul solului	ρ, kg/m^3	v_L, m/s	v_T, m/s	v_L/v_T
Argilă umedă	$1{,}80 \cdot 10^3$	1500	150	10
Loess cu umiditate naturală	$1{,}67 \cdot 10^3$	800	260	3,08
Sol compact cu pietriș și nisip	$1{,}70 \cdot 10^3$	480	250	1,92
Nisip cu granulație mică	$1{,}65 \cdot 10^3$	300	110	2,73
Nisip cu granulație mijlocie	$1{,}65 \cdot 10^3$	550	160	3,44
Pietriș de mărime mijlocie	$1{,}80 \cdot 10^3$	750	180	4,17

4. METODA COEFICIENȚILOR ELASTICI DINAMICI

4.1. ISTORIC

Este greu de precizat cînd s-a născut metoda coeficienților elastici, descrisă în cele ce urmează, respectiv metoda semispațiului elastic, expusă în paragraful 5 al acestui articol. În primele decenii ale secolului nostru au început să apară, în periodice, unele studii care au stat la baza formulării celor două metode.

În cărțile de specialitate s-a conturat întîi metoda coeficienților elastici dinamici prezentă în monografiile lui E. Rausch [30] și D.D. Barkan [1]. Principial, această metodă definește constantele elastice ale solurilor prin analogie cu cele ale unor izolatori de dimensiuni bine precizate. Dacă avem un izolator de formă cilindrică, cu secțiunea S și înălțimea h, comprimat vertical în lungul axei sale, constanta elastică este

$$k_z = E \cdot S/h \qquad [\mathrm{N/m}], \tag{12}$$

unde E este modulul de elasticitate. Se vor măsura: E în N/m², S în m² și h în m.

Analog, pentru o fundație cu baza S, rezemată pe sol, constanta elastică verticală este

$$k_z = C_z \cdot S, \quad [\mathrm{N/m}], \tag{13}$$

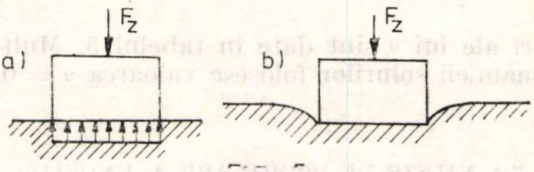


Fig. 5

unde C_z (N/m³) este *coeficientul de compresiune elastică uniformă* al solului.

Metoda a luat o largă răspîndire mai ales în Europa, coeficientul C_z — și cei asociați lui — determinîndu-se pe cale experimentală. În consecință, s-a realizat baza experimentală pentru măsurări in-situ, s-au elaborat relațiile de calcul aferente și s-a strîns o largă documentație statistică pentru valorile acestor coeficienți.

Metoda coeficienților elastici se bazează pe ipoteza lui Winkler (fig. 5a): blocul rigid, aflat în translație verticală, produce deplasări uniforme ale suprafeței solului, cărora le corespunde o distribuție uniformă a tensiunilor verticale σ_z. Conform acestei ipoteze, în exteriorul suprafeței tălpii fundației, tasările, deci și tensiunile ar fi nule. Practica arată că lucrurile nu stau așa (fig. 5b), deci sub blocul rigid tensiunile nu sînt uniform repartizate.

De aici rezultă critica făcută acestui mod de a gîndi de către cei care au elaborat și dezvoltat metoda semispațiului elastic: metoda coeficienților elastici neglijază comportarea visco-elstică a masei de sol a semispațiului, înlocuind solul printr-un element elastic, de grosime nedefinită, limitat la partea de sub talpa fundației. Astfel definită, metoda coeficienților elastici nu are un suport teoretic pentru determinarea amortizărilor. Ca urmare, ea poate servi numai la calculul pulsațiilor proprii, care sînt puțin influențate de amortizări, folosind ecuația de mișcare de forma

$$m \cdot \ddot{z} + k_z \cdot z = 0. \tag{14}$$

Se pot calcula și deplasările în afara zonei de rezonanță, de exemplu pentru $\eta > 2 \ldots 3$, cînd termenul $(2\zeta\eta)^2$ din relația (3) sau relația (8) devine neglijabil. În schimb, nu se poate calcula deplasarea la rezonanță (pentru $\eta = 1$), căci în acest caz $A_1 = A_2 = 1/2\ \zeta$, iar ζ nu este cunoscut. Și această problemă se poate rezolva, dacă se determină ζ pe cale experimentală..

Este clar deci că metoda coeficienților elastici nu tratează problema corect din punct de vedere matematic, dar ea dă soluții rapide, satisfăcătoare din punct de vedere practic.

În unele publicații din literatura americană, M. Novak [27] și G. Gazetas [18] susțin că metoda coeficienților elastici a dispărut, ea neavînd un suport teoretic corect. Din punct de vedere științific ei au dreptate; practic însă, dacă coeficienții elastici sînt determinați experimental,

constantele elastice se află prin relații foarte simple (cum s-a arătat), fapt care face ca în Europa metoda să fie încă larg utilizată. Pledează pentru această afirmație și faptul că recenta monografie publicată de S. Prakash și V. Puri [29] acordă încă o mare atenție metodei coeficienților elastici.

4.2. DEFINIȚII ȘI RELAȚII DE CALCUL

Conform ipotezei lui Winkler, dacă fundația produce o tasare elastică z a solului, presiunea (tensiunea) între fundație și sol se poate scrie

$$p_z = C_z \cdot z \qquad [\mathrm{N/m^2}]. \tag{15}$$

S-a introdus, în acest fel, *coeficientul de contracție elastică uniformă al solului*, C_z, măsurat în $\mathrm{N/m^3}$. În mod analog se definesc :

C_x — coeficientul de lunecare elastică uniformă, sau coeficientul elastic pentru translație orizontală ;

C_φ — coeficientul de contracție elastică neuniformă, sau de rotație în jurul unei axe orizontale ;

C_ψ — coeficientul de lunecare elastică neuniformă sau de rotație în jurul unei axe verticale.

Cu ajutorul acestor coeficienți se calculează cele patru constante elastice :

$$k_z = C_z \cdot S \,;\; k_x = C_x \cdot S \,;\; k_\varphi = C_\varphi \cdot I \,;\; k_\psi = C_\psi \cdot I_z, \tag{16}$$

unde S ($\mathrm{m^2}$) este aria tălpii fundației, I — momentul de inerție al acesteia față de axa orizontală de rotație x sau y, măsurat în $\mathrm{m^4}$, iar I_z — momentul de inerție polar față de punctul unde axa z întîlnește planul tălpii fundației.

Cercetările au stabilit unele relații referitoare la coeficienții elastici. Astfel, pentru o placă circulară

$$C_z = 1{,}13 \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{S}}. \tag{17}$$

Pentru plăci dreptunghiulare

$$C_z = \varkappa_z \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}}, \tag{18}$$

unde coeficientul $\varkappa_z$, funcție de raportul laturilor a/b, variază între 1,14 ... 1,30. Relații analoge se stabilesc și pentru : rotație, cu $\varkappa_\varphi = 2{,}31 \ldots 5{,}45$, respectiv translație, cu $\varkappa_x = 0{,}29 \ldots 0{,}54$.

Dacă se cunoaște C_{z1} pentru o suprafață S_1, se află C_{z2} pentru suprafața S_2

$$C_{z2} = C_{z1} \sqrt{S_1/S_2}. \tag{19}$$

De asemenea, pe cale statistică s-au stabilit corelațiile :

$$C_\varphi = 2C_z\,;\; C_x = 0{,}5C_z\,;\; C_\psi = 0{,}75\; C_z = 1{,}5\; C_x. \qquad (20)$$

4.3. MĂSURĂRI

Coeficienții elastici pot fi determinați in-situ cu o instalație de felul celei realizată la Institutul Politehnic București (fig. 6), compusă din : un vibrator cu mase excentrice alimentat de o sursă de curent con-

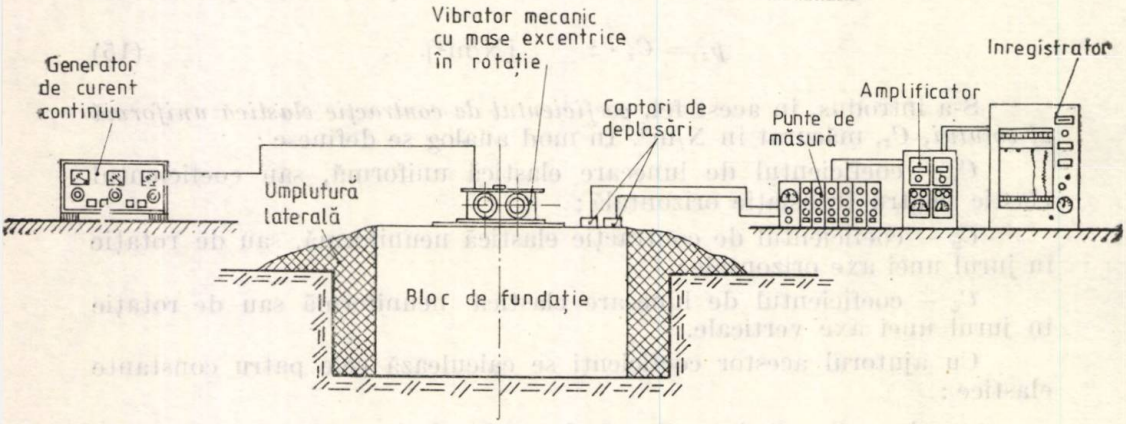


Fig. 6

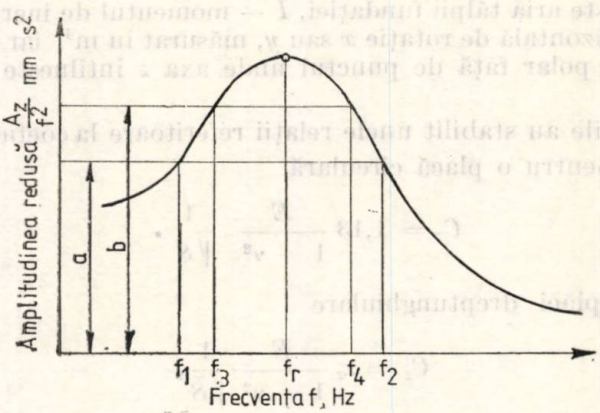


Fig. 7

tinuu ; un bloc de fundație, care poate reprezenta o fundație reală, o fundație experimentală din beton armat, sau un grup de plăci metalice ; captori de vibrații pentru deplasări (eventual viteze sau accelerații) ; punte de măsură, amplificator, înregistrator.

Vibratorul poate produce — în funcție de poziția maselor excentrice ale discurilor — forțe verticale, orizontale, cupluri.

Dacă s-a determinat frecvența de rezonanță verticală $f_z = f_r$ (fig. 7), coeficientul C_z este

$$C_z = \frac{4\pi^2 m f_z^2}{S}. \tag{21}$$

Dacă se excită cu o forță orizontală F_x, care produce translație x și rotație φ_y și dacă se măsoară deplasările orizontale A_x/f^2, se obține o curbă similară celei din figura 7, dar cu două rezonanțe f_1 și f_2. Cu acestea se calculează frecvența de translație pură f_x și cea de rotație pură f_φ

$$f_{\varphi,x}^2 = \frac{\gamma}{2}\left[f_1^2 + f_2^2 \pm \sqrt{(f_1^2 + f_2^2)^2 - \frac{4}{\gamma} f_1^2 \cdot f_2^2} \right], \tag{22}$$

unde γ este dat de relația (9).

Se află apoi cei doi coeficienți elastici

$$C_x = \frac{4\pi^2 m f_x^2}{S}; \quad C_\varphi = \frac{4\pi^2 J_C f_\varphi^2}{I_{y3}}, \tag{23}$$

unde I_{y3} este momentul de inerție al suprafeței tălpii fundației față de axa Cy_3.

Dacă mașina se montează așa ca să producă numai un cuplu M_z, se obține frecvența de rezonanță f_ψ, din care rezultă

$$C_\psi = \frac{4\pi^2 J_z f_\psi^2}{I_z}. \tag{24}$$

4.4. UNELE VALORI ALE COEFICIENȚILOR C_z

Experiența arată că pentru suprafețe $S > 10$ m², coeficienții C_z rămîn practic constanți. Pentru astfel de suprafețe, care corespund cazurilor uzuale, normele sovietice TU 60—49 recomandă a se folosi valorile din tabelul 7. La suprafețe mai mici de 10 m², se va aplica relația de recu-

Tabelul 7

Valori recomandate pentru coeficienții C_z la $S > 10$ m²

Categoria solului	Felul solului	Presiunea statică admisibilă p_a, MPa	C_z, MN/m³
I	Terenuri slabe (argilă în stare plastică, pămînt nisipos, soluri de categoriile II, III amestecate cu mîl)	pînă la 0,15	pînă la 30
II	Terenuri de rezistență mijlocie (argile la limita de plasticitate, nisipuri)	pînă la 0,35	pînă la 60
III	Terenuri rezistente (argilă tare, nisip cu pietriș, loess, argilă cu loess)	pînă la 0,60	pînă la 100
IV	Terenuri stîncoase	peste 0,60	peste 100

rență (19). Se constată, de asemenea, că C_z variază mult cu presiunea pe sol, crescînd cu aceasta. Afirmația este confirmată prin seria de valori redate în tabelul 8, rezultînd din măsurări pe diferite amplasamente industriale, realizate de catedra de rezistența materialelor a Institutului Politehnic din București [9, 21].

Tabelul 8

Coeficienți de contracție elastică uniformă și rapoarte de amortizare determinați prin vibrații verticale

Felul solului	Locul măsurării	Condiții de experimentare		Rezultate experimentale		
		S m²	p, MPa	f_z Hz,	C_z MN/m³	2ζ
Nisip consolidat cu coloane de balast. Grosimea stratului de nisip 2,1 m	Midia-Năvodari	0,5	0,02	34,4	95	0,54
		0,5	0,05	28,5	179	0,32
		0,5	0,09	25,8	245	0,24
		0,75	0,02	27,8	71	0,17
		0,75	0,05	26,3	152	0,27
		1	0,02	24,7	46	0,16
		1	0,05	23,0	104	0,60
		2	0,05	19,0	77	0,44
		2	0,07	18,0	93	0,49
		12,25	0,07	11,4	36	0,17
		45,5	0,05	14,3	44	
		67,86	0,06	12,7	35	
		197,2	0,06	11,2	27	
		221	0,05	11,2	24	
Nisip compactat prin batere cu maiul greu	Midia-Năvodari	0,5	0,02	38,5	85	0,18
		0,5	0,05	27,5	170	0,11
		0,5	0,09	28,5	299	0,22
		1	0,02	29,9	68	0,06
		1	0,05	30,5	183	0,37
Pietriș aluvionar	Brazi	0,5	0,07	37	364	0,12
		0,5	0,09	32,9	391	0,12
		1	0,05	32,7	206	0,13
		12	0,06	22,4	114	0,32
Calcar uscat	Cernavodă	0,5	0,08	35,0	380	0,04
Marnă saturată	Cernavodă	0,5	0,09	32,6	382	0,10
Marnă	Cernavodă	0,5	0,09	27,0	261	0,08
		18,1	0,28	24,3	632	0,29
Pămînt argilos	București	1	0,05	17,7	62	

5. METODA SEMISPAȚIULUI ELASTIC

5.1. ISTORIC

Primul semnal pentru acest model de calcul a fost dat de către H. Lamb, care în 1904 a cercetat modul de propagare a vibrațiilor produse de către o forță concentrată, variabilă periodic, aplicată vertical

sau orizontal la suprafața solului sau în adîncime. Începînd din 1930, DEGEBO a întreprins studii sistematice, conduse de către A. Hertwig, G. Früh și H. Lorenz [22], asupra comportării unui bloc de fundație așezat pe sol, excitat de o forță armonică.

Articolul publicat de E. Reissner în 1936 marchează începutul propriu-zis al studiilor asupra dinamicii solurilor.

Se consideră (fig. 8) *o masă rigidă* m, avînd *baza circulară* de rază R, așezată pe un semispațiu elastic cu modul de elasticitate G, coeficient de contracție transversală ν și densitate ρ. Masa este excitată vertical de o forță armonică $F_0 \cdot \sin \omega t$. După Reissner, *amplitudinea deplasării* verticale $z(t)$ a masei m este

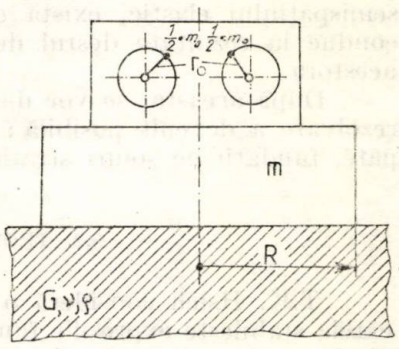


Fig. 8

$$A_z = \frac{F_0}{GR} \cdot \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 + b_0 a_0^2 f_1)^2 + (b_0 a_0^2 f_2)^2}}, \tag{25}$$

unde s-a notat :

— *factorul masic*

$$b_0 = m/\rho R^3, \tag{26}$$

egal cu raportul între masa m a fundației și cea a unui volum cilindric de sol de rază R și înălțime R/π ;

— *factorul de frecvență*

$$a_0 = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{\omega R}{v_T}, \tag{27}$$

— f_1, f_2, *funcții de deplasare*, care depind de ν și de a_0. Expresiile funcțiilor f_1, f_2 au fost calculate de către E. Reissner și apoi îmbunătățite de către alți cercetători.

În ce privește forța excitatoare $F(t)$, ea poate avea amplitudinea constantă F_0, respectiv variabilă $F_0 = m_0 r_0 \omega^2$, atunci cînd se folosește un vibrator de felul celui din figura 8.

Unghiul de fază între forța excitatoare $F(t)$ și deplasarea $z(t)$ este

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{f_2}{f_1 + b_0 a_0^2 (f_1^2 + f_2^2)}. \tag{28}$$

Problema pusă de E. Reissner a fost continuată de numeroși cercetători, luînd în considerare : distribuția presiunii sub blocul de fundație (uniformă sau variind după anumite legi), rigiditatea sau elasticitatea blocului, masa blocului, forma tălpii fundației (circulară, dreptunghiulară, oarecare).

T.Y. Sung și P.M. Quinlan au studiat vibrațiile verticale ale fundațiilor cu baza circulară și dreptunghiulară, luînd în considerare trei moduri de distribuție a presiunii ; G.N. Bykroft a stabilit expresii îmbu-

nătățite ale funcțiilor f_1, f_2 pentru cazul fundației rigide; R.N. Arnold și G.N. Bykroft au studiat deplasările de translație orizontală și de balans (rotație în jurul unei axe orizontale) ale blocului cu baza circulară.

Lucrările citate, ca și altele, pot fi considerate drept etape succesive spre formele actual acceptate — destul de exacte — folosite curent în proiectare.

Dacă considerăm, pentru început, fundații așezate pe suprafața semispațiului elastic, există cîteva metode, aparent diferite, dar care conduc la rezultate destul de apropiate. Se va începe cu prezentarea acestora.

După aceasta, se vor descrie alte cîteva cazuri și metode, a căror rezolvare a devenit posibilă: fundații cu baza oarecare, fundații îngropate, fundații pe soluri stratificate, neomogene etc.

5.2. TEORIA LUI T.K. HSIEH

T.K. Hsieh consideră o *placă rigidă, lipsită de masă*, cu ajutorul căreia stabilește expresiile funcțiilor f_1 și f_2. Astfel, pentru deplasări verticale, excitate de o forță armonică F_z, funcțiile f_{1z} și f_{2z}, pentru placa de dimensiuni $2a$ și $2b$, sînt date în figura 9. Cu ajutorul acestora, se definește o *constantă elastică a solului* pentru placa de rază R

$$k_z = GR\,\frac{f_{1z}}{f_{1z}^2 + f_{2z}^2} = G\,R\,\bar{k}_z, \tag{29}$$

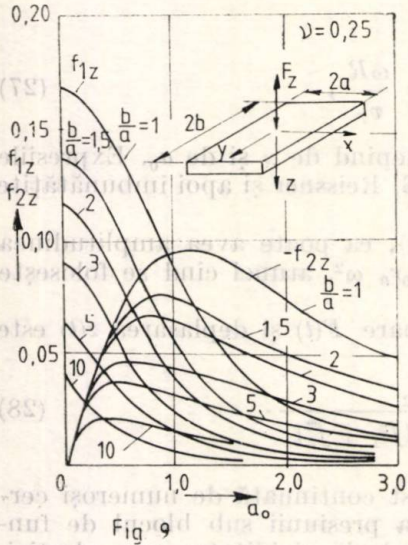


Fig. 9

respectiv un *coeficient de amortizare geometric*

$$c_z = \frac{R^2}{a_0}\cdot\sqrt{\rho G}\cdot\left(\frac{-f_{2z}}{f_{1z}^2 + f_{2z}^2}\right) = R^2\sqrt{\rho G}\cdot\bar{c}_z, \tag{30}$$

unde mărimile $\bar{k}_z$ și $\bar{c}_z$ sînt *adimensionale*, avînd definițiile

$$\bar{k}_z = \frac{f_{1z}}{f_{1z}^2 + f_{2z}^2}\;;\quad \bar{c}_z = \frac{-f_{2z}/a_0}{f_{1z}^2 + f_{2z}^2}\,. \tag{31}$$

Relațiile respective sînt valabile și pentru plăci dreptunghiulare de laturi $2a$, $2b$, unde $b > a$. Pentru cele trei feluri uzuale de mișcări — translație verticală, translație orizontală și rotație în jurul unei axe paralele cu latura $2b$ — constantele elastice și coeficienții de amortizare au expresiile din tabelul 9.

Pe baza valorilor funcțiilor f_{1z}, f_{2z} din figura 9 — pentru translații verticale, respectiv a unora analoge pentru celelalte două feluri de mișcări —, cu ajutorul relațiilor de definiție din tabelul 9, s-au construit

Tabelul 9

Constante elastice și coeficienți de amortizare pentru placa lipsită de masă așezată pe semi spațiul elastic

Felul mișcării	Constante elastice		Coeficienți de amortizare geometrici	
	adimensionale	dimensionale	adimensionali	dimensionali
Translație verticală	$\bar{k}_z = \dfrac{f_{1z}}{f_{1z}^2 + f_{2z}^2}$	$k_z = Ga\bar{k}_z$	$\bar{c}_z = \dfrac{-f_{2z}/a_0}{f_{1z}^2 + f_{2z}^2}$	$c_z = a^2\sqrt{\rho G}\cdot \bar{c}_z$
Translație orizontală	$\bar{k}_x = \dfrac{f_{1x}}{f_{1x}^2 + f_{2x}^2}$	$k_x = G\,a\bar{k}_x$	$\bar{c}_x = \dfrac{-f_{2x}/a_0}{f_{1x}^2 + f_{2x}^2}$	$c_x = a^2\sqrt{\rho G}\cdot \bar{c}_x$
Rotație în jurul unei axe orizontale	$\bar{k}_\varphi = \dfrac{f_{1\varphi}}{f_{1\varphi}^2 + f_{2\varphi}^2}$	$k_\varphi = Ga^2b\bar{k}_\varphi$	$\bar{c}_\varphi = \dfrac{-f_{2\varphi}/a_0}{f_{1\varphi}^2 + f_{2\varphi}^2}$	$c_\varphi = a^3b\sqrt{\rho G}\cdot \bar{c}_\varphi$

graficele din figurile 10 . . . 12, care dau constantele elastice și coeficienții de amortizare adimensionali în funcție de a_0, pentru $\nu = 0{,}25$.

Se aplică apoi relațiile din tabelul 9, care dau valorile k și c, care se introduc în ecuațiile de mișcare ale *sistemului cu parametri concentrați*, de forma

$$m \cdot \ddot{z} + c_z \cdot \dot{z} + k_z \cdot z = F_0 \cdot \sin \omega t. \tag{32}$$

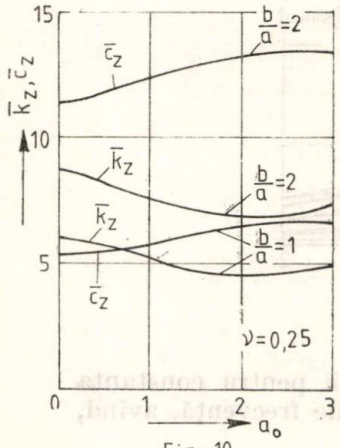


Fig 10

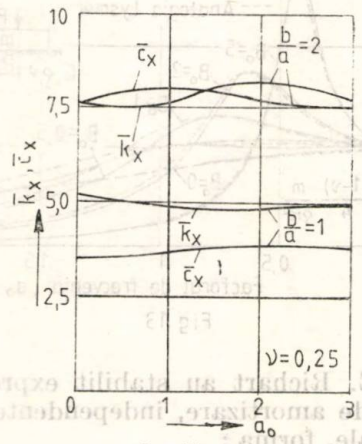


Fig.11

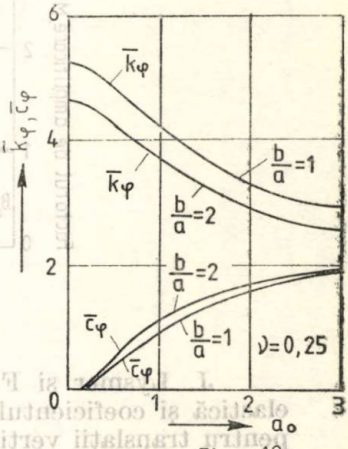


Fig. 12

Cu această ecuație, sau cele similare — în funcție de felul mișcării și de expresia forței perturbatoare — se calculează pulsațiile proprii și amplitudinile deplasărilor (la frecvența de regim sau la rezonanță), în modul descris în paragraful 2. În relația (32), m este masa totală sprijinită pe sol. Se precizează că mărimile k și c nu sînt constante, ci depind de frecvență (prin a_0, f_1, f_2).

5.3. ANALOGIA LUI J. LYSMER

Un mare pas înainte în metoda semispațiului elastic a fost făcut prin analogia lui J. Lysmer, care folosește în locul lui b_0, din relația (26), un *factor masic modificat*

$$B_0 = \frac{1-\nu}{4} \cdot b_0 = \frac{1-\nu}{4} \cdot \frac{m}{\rho R^3}, \tag{33}$$

indicele „0" fiind, după caz, z, x, φ, ψ.

Cu această modificare, expresia amplitudinii deplasării este:

— la excitația prin forța $F_0 \cdot \sin \omega t$

$$A_z = \frac{(1-\nu)F_0}{4GR} \cdot M = \frac{F_0}{k_z} M; \tag{34}$$

— la excitația prin forța $m_0 r_0 \omega^2 \cdot \sin \omega t$

$$A_z = \frac{m_0 r_0}{m} M_r, \tag{35}$$

unde M și M_r sînt factori de amplificare dați în figurile 13 și 14 în funcție de a_0 și B_0.

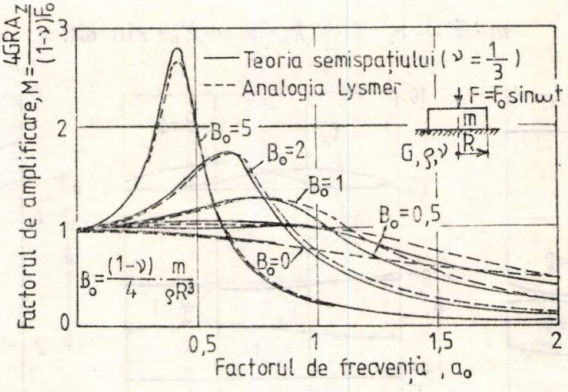


Fig. 13

J. Lysmer și F.E. Richart au stabilit expresii pentru constanta elastică și coeficientul de amortizare, independente de frecvență, avînd, pentru translații verticale, forma:

$$k_z = \frac{4\,GR}{1-\nu}; \quad c_z = \frac{3{,}4\,R^2}{1-\nu}\sqrt{\rho G}. \tag{36}$$

Expresiile constantelor elastice din relația (36) și tabelul 10 coloana 3 sînt aceleași ca pentru o solicitare statică, cu observația că G este modulul de elasticitate dinamic.

Mărimile k_z şi c_z se introduc în ecuaţia de mişcare a *sistemului cu parametri concentraţi* (32), calculîndu-se pulsaţia proprie şi amplitudinile deplasărilor. În figurile 13 şi 14 s-au marcat prin linie plină valorile corespunzînd teoriei exacte a semispaţiului elastic şi prin linie întreruptă cele date de analogia lui Lysmer.

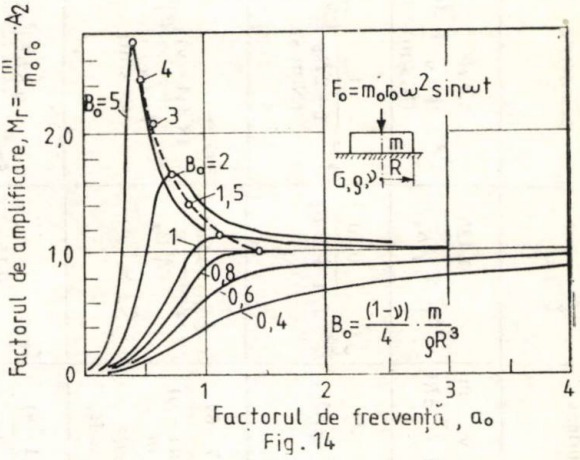


Fig. 14

Amplitudinea deplasării la rezonanţă este :

$$A_z = \frac{F_0}{k_z} \cdot \frac{B_0}{0{,}85 \sqrt{B_0 - 0{,}18}}, \tag{37}$$

$$A_z = \frac{m_0 r_0}{m} \cdot \frac{B_0}{0{,}85 \sqrt{B_0 - 0{,}18}}. \tag{38}$$

O serie de alţi cercetători (G.N. Bykroft, E. Reissner, H.F. Sagoci, G.B. Warburton, J.R. Hall) au extins analogia lui J. Lysmer şi pentru celelalte feluri de mişcări : translaţie orizontală, rotaţie în jurul unei axe verticale, rotaţie în jurul unei axe orizontale. În mod sintetic, relaţiile de calcul sînt redate în tabelul 10.

Pentru vibraţii verticale, la excitaţia $F_0 \cdot \sin \omega t$, pulsaţia de rezonanţă este

$$p_z = \frac{v_T}{R} \cdot \frac{\sqrt{B_0 - 0{,}36}}{B_0}, \tag{39}$$

respectiv

$$p_z = \frac{v_T}{R} \cdot \sqrt{\frac{0{,}9}{B_0 - 0{,}45}} \tag{40}$$

la excitaţia prin forţă de inerţie.

Tabelul 10

Constante elastice şi coeficienţi de amortizare pentru vibraţiile unei fundaţii rigide sprijinită pe semispaţiul elastic

Felul mişcării	Ecuaţia mişcării	Constanta elastică pentru fundaţia cu baza circulară	Raza echivalentă a fundaţiei cu baza dreptunghiulară R, m	Factorul masic modificat	Raportul de amortizare geometric $\zeta = \frac{c}{c_c}$	Coeficientul de amortizare geometric	Coeficientul de amortizare total
Translaţie verticală	$m\ddot{z} + c_z\dot{z} + k_z z = F_z(t)$	$k_z = \frac{4GR}{1-\nu}$ (N/m)	$R = \sqrt{\frac{4ab}{\pi}}$	$B_z = \frac{1-\nu}{4} \cdot \frac{m}{\rho R^3}$	$\zeta_z = \frac{0{,}425}{\sqrt{B_z}}$	$c_z = \frac{3{,}4\,R^2}{1-\nu}\sqrt{\rho G}$ (N.s/m)	$c_z = 2(\zeta_z + \zeta_i)\sqrt{k_z m}$ (N.s/m)
Rotaţie în jurul unei axe verticale	$J_z\ddot{\psi} + c_\psi\dot{\psi} + k_\psi\psi = M_z(t)$	$k_\psi = \frac{16}{3}GR^3$ (N.m)	$R = \sqrt{\frac{16ab(a^2+b^2)}{6\pi}}$	$B_\psi = \frac{J_z}{\rho R^5}$	$\zeta_\psi = \frac{0{,}50}{1+2B_\psi}$	$c_\psi = \frac{4}{1+2B_\psi}\sqrt{GR^5}$ (N.m.s)	$c_\psi = 2(\zeta_\psi + \zeta_i)\sqrt{k_\psi J_z}$
Translaţie orizontală	$m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x = F_x(t)$	$k_x = \frac{32(1-\nu)GR}{7-8\nu}$ (N/m) $k_x = k_y$	$R = \sqrt{\frac{4ab}{\pi}}$	$B_x = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \cdot \frac{m}{\rho R^3}$ $B_x = B_y$	$\zeta_x = \frac{0{,}288}{\sqrt{B_x}}$ $\zeta_x = \zeta_y$	$c_x = \frac{18{,}4\,(1-\nu)}{7-8\nu}R^2\sqrt{\rho G}$ (N.s/m)	$c_x = 2(\zeta_x + \zeta_i)\sqrt{k_x m}$ (N s/m)
Rotaţie în jurul unei axe orizontale (faţă de axa x sau y)	$J\ddot{\varphi} + c_\varphi\dot{\varphi} + k_\varphi\varphi = M(t)$	$k_{\varphi x} = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)}$ (N.m) $k_{\varphi x} = k_{\varphi y}$	$R = \sqrt[4]{\frac{16\,BL^3}{3\pi}}$ $2B$ = dimens în lungul axei de rotaţie	$B_\varphi = \frac{3(1-\nu)}{8} \cdot \frac{J^x}{\rho R^5}$ $J_x = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right)$	$\zeta_\varphi = \frac{0{,}15}{(1+B_\varphi)\sqrt{B_\varphi}}$	$c_\varphi = \frac{0{,}8R^4\sqrt{\rho G}}{(1-\nu)(1+B_\varphi)}$ (N.m.s)	$c_\varphi = 2(\zeta_\varphi + \zeta_c) \times \sqrt{k_{\varphi x} J_x}$ (N.m.s)

Observaţie : laturile tălpii fundaţiei dreptunghiulare sînt $2a$ şi $2b$; $b > a$

Folosind expresia lui k din tabelul 10, pulsația proprie a vibrațiilor de translație orizontale are expresia cunoscută

$$p_x = \sqrt{k_x/m} \tag{41}$$

și analog cea a vibrațiilor de balans

$$p_\varphi = \sqrt{k_\varphi/J_x}. \tag{42}$$

Pentru mișcarea cuplată de translație și balans, cele două pulsații proprii se află cu relația din tabelul 1, cazul c. De asemenea, pentru deplasări se pot folosi relațiile din tabelul 2, cazul c.

Relațiile din metoda lui T.K. Hsieh și din analogia lui J. Lysmer au fost stabilite considerînd fundația cu baza circulară, fapt ce simplifică sensibil calculele. Cînd baza fundației este dreptunghiulară, relațiile de calcul folosesc o rază echivalentă calculată conform coloanei 4 din tabelul 10.

Se întîlnesc, în literatură, și alte moduri de exprimare a constantelor elastice pentru suprafețe dreptunghiulare. Așa sînt, de exemplu, relațiile din tabelul 11, coeficienții β fiind dați în figura 15.

Tabelul 11

Constante elastice pentru fundații cu baza dreptunghiulară

Felul mișcării	Constanta elastică
Translație verticală	$k_z = \frac{G}{1-\nu}\beta_z\sqrt{4ab}$
Translație orizontală	$k_x = \frac{G}{1-\nu}\beta_x\sqrt{4ab}$
Rotație în jurul unei axe orizontale	$k_{\varphi y} = \frac{G}{1-\nu}\beta_\varphi 4a^2\sqrt{4ab}$

Tabelul 12

Factori de amortizare datorîți frecării interne

Felul solului	ζ_i
Nisip și pietriș uscat	0,03 ...0,07
Nisip și pietriș saturat	0,05 ..0,06
Nisip cu mîl	0,03 ..0,10
Argilă	0,02 ..0,05
Nisip uscat și saturat	0,01 .. 0,03

În ce privește *amortizările*, ele sînt de două feluri: (a) *amortizări geometrice*, în funcție de dimensiunile fundației, reprezentînd pierderea de energie prin disiparea ei în semispațiul infinit și (b) *amortizări interne*, rezultînd din frecarea particulelor de sol aflate în vecinătatea fundației. Ca urmare, raportul de amortizare din relația (5) poate fi exprimat ca suma (pentru vibrații verticale)

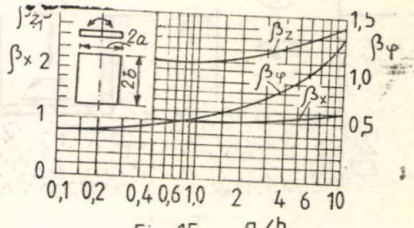


Fig. 15

$$\zeta = \zeta_z + \zeta_i. \tag{43}$$

Primul termen, reprezentînd amortizarea geometrică, se poate calcula cu relațiile din coloana 7 a tabelului 10. Amortizarea totală este dată de expresiile din coloana 8 a tabelului 10, luînd pentru ζ_i valori conform tabelului 12.

5.4. METODA FUNCȚIILOR DE IMPEDANȚĂ

Ultimii 15÷20 ani au dus la conturarea unei noi metode de calcul dinamic, bazată tot pe ipoteza semispațiului elastic. Nume ca G. Gazetas, A. Pais, E. Kausel, J.E. Luco, S.A. Veletsos, J.M. Roesset și mulți alții au devenit cunoscute prin rezolvarea variatelor probleme de dinamica fundațiilor cu ajutorul acestei noi metode. Ampla prezentare „state of--the-art" a lui G. Gazetas [18], după o scurtă introducere asupra diferitelor metode „istorice", perimate sau folosite și în prezent, se constituie într-o pledoarie pentru această nouă metodă. În cele ce urmează, se redau, după această lucrare, ca și după altele, citate în bibliografie, principalele relații, grafice și tabele care fac posibilă aplicarea metodei. Pentru început se dau informații numai pentru fundații așezate pe suprafața semispațiului elastic, urmînd a fi reluate ulterior pentru alte cazuri. În expunerea ce urmează se vor respecta, în bună parte, notațiile din literatura originală [18, 29], modificate uneori spre a le pune în concordanță cu paragrafele anterioare.

5.4.1. DEFINIȚII

Se vor nota, ca și anterior, gradele de libertate cu z, x, φ, ψ. Pentru o fundație acționată centric prin forțe verticale, a cărei bază are două axe de simetrie, deci care execută numai vibrații verticale, *impedanța* este raportul dintre forța aplicată bazei și deplasarea corespunzătoare

$$K_z = \frac{R_z(t)}{z(t)}, \tag{44}$$

unde cele două mărimi sînt funcții armonice.

$$R_z(t) = R_z \cdot e^{i\omega t}; \; z(t) = z \cdot e^{i\omega t}. \tag{45}$$

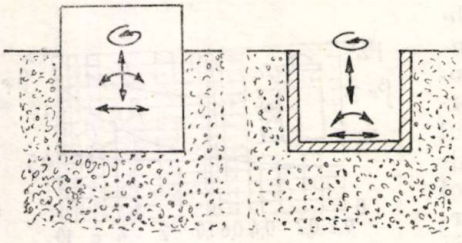


Fig. 16

Analog se pot defini impedanțele K_x, K_φ, K_ψ, ca și impedanțele reciproce $K_{x\varphi}$ etc. Cum forța excitatoare și deplasarea sînt de obicei defazate — deci deplasarea are o componentă în fază cu forța și una defazată cu 90° — , rezultă că impedanța este o mărime complexă.

$$K_a(\omega) = K_{a1}(\omega) + iK_{a2}(\omega), \tag{46}$$

unde $a = z, \; x, \varphi, x\varphi, \; \psi$.

În studiul ce urmează, fundația este înlocuită printr-o „fundație asociată", rigidă și lipsită de masă, cum se arată în figura 16.

Dacă fundația este îngropată, forța $R_z(t)$ reprezintă reacțiunea totală a solului, rezultînd din tensiunile normale de sub fundație, precum și din cele de lunecare de pe fețele laterale.

Se consideră ecuația de mișcare a sistemului cu un grad de libertate (32) în care coeficientul de amortizare (N.s/m) și constanta elastică (N/m) se vor nota, în continuare, tot cu simbolurile k_z, c_z.

$$m \cdot \ddot{z} + c_z \cdot \dot{z} + k_z \cdot z = F(t) = F_0 e^{i\omega t}. \tag{47}$$

Luînd deplasarea ca o funcție armonică

$$z(t) = z_0 \cdot e^{i\omega t} \tag{48}$$

și făcînd înlocuiri în (47) rezultă

$$(k_z - m\omega^2) + ic_z\omega = \frac{F(t)}{z(t)}. \tag{49}$$

Comparînd (44) cu (49), rezultă că partea din stînga a relației (49) este *impedanța dinamică*

$$K_z = (k_z - m\omega^2) + i\, c_z\omega, \tag{50}$$

respectiv, comparînd cu (46)

$$K_{z1} = k_z - m\omega^2;\ K_{z2} = c_z\omega. \tag{51}$$

Prin urmare, impedanța dinamică este un număr complex în care atît partea reală cît și cea imaginară sînt funcții de frecvență.
În relația (50) se scoate în factor constanta k_z

$$K_z = k_z\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{p_z^2}\right) + i\, 2\zeta\, \frac{\omega}{p_z}\right], \tag{52}$$

întrucît :

$$\frac{m}{k_z} = \frac{1}{p_z^2};\quad \frac{ic_z\omega}{k_z} = i\, 2\zeta\, \frac{\omega}{p_z}.$$

Pentru simplificare, termenii din paranteza relației (52) se notează prescurtat :

$$1 - \frac{\omega^2}{p_z^2} = k_v;\ i\, 2\zeta\, \frac{\omega}{p_z} = i\omega c_s, \tag{53}$$

deci impedanța dinamică devine

$$K_z = k_z(k_v + i\omega c_s). \tag{54}$$

Mărimile k_v și c_s sînt *coeficienții dinamici de impedanță*.
Se mai poate face o transformare. Scriind relația (27) sub forma

$$a_0 = \omega B/v_T, \tag{55}$$

unde B este o mărime critică a tălpii (de exemplu $B = R$ sau $B = a$, jumătatea lăţimii bazei, fig. 9), al doilea termen din paranteză devine

$$\mathrm{i}\omega c_s = i\frac{a_0 v_T}{B} \cdot c_s,$$

iar cu notaţia

$$c_v = c_s \frac{v_T}{B}, \tag{56}$$

se obţine

$$K_z = k_z(k_v + \mathrm{i}\ a_0 c_v). \tag{57}$$

Din relaţia (53) se vede că c_s se măsoară în secunde, deci c_v este o mărime adimensionaală. Coeficienţii de impedanţă adimensionali din paranteza relaţiei (57) poartă indicele v (vertical) în loc de z; analog, pentru celelalte grade de libertate indicii vor fi : h (orizontal) în loc de x; r (rotire) în loc de φ; şi t (torsiune) în loc de ψ.

Dacă se ia în considerare şi amortizarea histeretică a solului, măsurată prin factorii ζ_t (tabelul 12), impedanţa dinamică (57) se transformă în

$$K_z = k_z(k_v + \mathrm{i}\ a_0\ c_v)\ (1 + 2\ \mathrm{i}\ \zeta_t). \tag{58}$$

5.4.2. METODE PENTRU DETERMINAREA FUNCŢIILOR DE IMPEDANŢĂ

În determinarea funcţiilor de impedanţă se ţine seama de o serie de factori : coeficientul lui Poisson ν, factorul de frecvenţă a_0, amortizarea histeretică ζ_t; ţinînd seama şi de alţi factori, ce vor fi examinaţi în continuare, funcţiile de impedanţă mai depind de : adîncimea de îngropare a fundaţiei, modulele de elasticitate ale diferitelor straturi ale solului, forma bazei fundaţiei, variaţia modulelor de elasticitate E, G cu adîncimea.

În relaţiile pentru calculul impedanţei mecanice, mărimile k_z, k_x, k_φ, k_ψ sînt constantele elastice, reale, obţinute cu relaţiile din coloana 3 a tabelului 10. Pentru fundaţii dreptunghiulare se utilizează razele echivalente din coloana 4 a aceluiaşi tabel, sau tabelul 11, combinat cu figura 15. După o serie de autori (M.I. Gorbunov-Posadov, D.D. Barkan, S.A. Savidis, J. Dominguez, J.M. Roesset), constantele elastice statice pentru fundaţii dreptunghiulare (k_z, ...) se calculează cu relaţiile din tabelul 13, unde R este raza echivalentă, iar J — un coeficient de corecţie. Se observă că pentru fundaţia pătrată J este aproape de 1, iar pentru fundaţii foarte alungite ajunge la 1,32. În tabelul 13, constanta k_x este calculată cu o relaţie diferită de cea din tabelul 10.

Problema esențială pentru calculul funcțiilor de impedanță este determinarea coeficienților dinamici adimensionali k_v și c_c, sau cei analogi definiți prin relațiile (57), (58). În acest scop, s-au elaborat o serie de metode avînd la bază :

Tabelul 13

Coeficienți de corecție pentru calculul constantelor elastice statice la fundații dreptunghiulare

Laturile dreptunghiului b/a	$k_z = \frac{4\,GR}{1-\nu}\cdot J$	$k_x = \frac{8\,GR}{2-\nu}\cdot J$	$k_\varphi = \frac{8\,GR^3}{3(1-\nu)}\cdot J$	$k_\psi = \frac{16}{3}\,GR^3\cdot J$
	J	J	J	J
1	0,94...1,08	0,99 ... 1,04	0,96 ... 0,99	0,95 ...1,03
2	0,97...1,13	0,98...1,10	1,03...1,04	1,00
3	—	—	—	1,02
4	1,07...1,20	1,00....1,08	1,05...1,14	1,17
6	1,15...1,20	1,06	—	—
8	1,20...1,27	1,13	1,18...1,23	—
10	1,25...1,31	1,19	1,28...1,32	—
20	1,57	—	—	—

a. Model continuu. Soluțiile *analitice* iau în considerare un *contur relaxat* al zonei din jurul fundației, pe cînd *soluțiile semi-analitice* determină deplasările în orice punct al suprafeței de contact, cauzate de forțe unitare — normale sau de lunecare — aplicate în alt punct. Soluțiile *analitice aproximative* se aplică în special fundațiilor îngropate.

b. Modele discrete. Pentru suprafețe de contact de forme mai complicate s-au dezvoltat metode de calcul bazate pe diferențe finite și elemente finite.

Numeroasele metode de calcul pentru coeficienții dinamici sînt citate în lucrarea lui G. Gazetas [18] și în ampla bibliografie a acesteia.

Valorile coeficienților dinamici ai funcțiilor de impedanță se găsesc în literatură sub formă de tabele [25] sau de grafice. În figura 17 se dau — — după J.E. Luco, R.A. Westmann, S.A. Veletsos, Y.T. Wei și B. Verbic — — valorile coeficienților de impedanță k și c, pentru fundații cu baza circulară, așezate pe suprafața solului, corespunzînd la $\nu = 0{,}5$ și $\nu = 1/3$, în funcție de factorul de frecvență a_0. Se observă că pentru $\nu = 0{,}5$ valorile lui k_v scad foarte repede cu a_0, alți coeficienți (de exemplu c_v, c_h, k_h) fiind practic constanți.

Apreciind valoarea pulsației perturbatoare ω și calculînd pe a_0 cu relația (27), se pot alege valorile k și c din figura 17. Pe de altă parte, calculînd constantele elastice statice k_z, k_x, k_φ, k_ψ cu relațiile din coloana 3 a tabelului 10 și aplicînd apoi relații de forma (57) sau (58), se află *impedanțele dinamice* K_z, K_x, K_φ K_ψ.

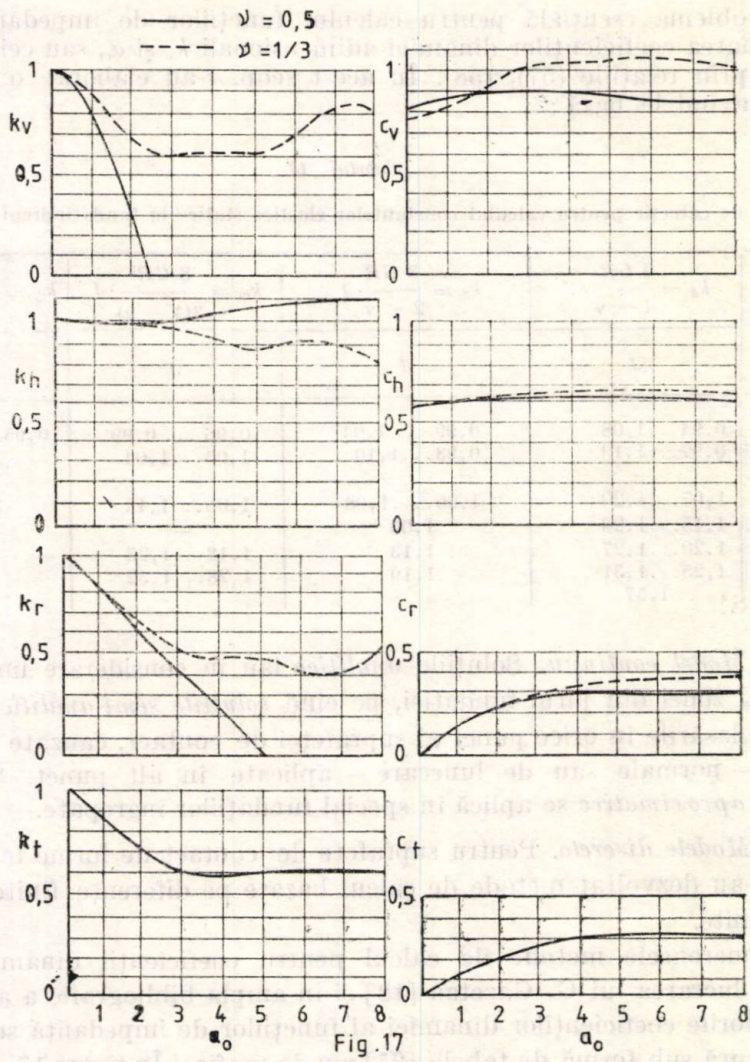


Fig. 17

5.4.3. CALCULUL AMPLITUDINILOR DEPLASĂRILOR

Se redă, după lucrările [18] și [29], modul de calcul al deplasărilor z, x, φ, ψ cauzate de forțe și cupluri armonice $F_z(t)$, $F_x(t)$, $M_y(t)$, $M_z(t)$. Se notează cu $R_z(t)$, $R_x(t)$, $T_\varphi(t)$, $T_\psi(t)$ reacțiunile elastice ale solului la cele patru feluri de mișcări.

Ecuațiile de mișcare sînt :

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{z}(t) + R_z(t) &= F_z(t), \\ J_z \cdot \ddot{\psi}(t) + T_\psi(t) &= M_z(t), \\ m \cdot \ddot{x}(t) + R_x(t) &= F_x(t), \\ J_y \cdot \ddot{\varphi}(t) + T_\varphi(t) - R_x(t) \cdot z_C &= M_y(t), \end{aligned} \tag{59}$$

unde z_C este înălțimea centrului de greutate deasupra tălpii fundației. Reacțiunile elastice R și T sînt calculate în centrul de greutate al tălpii fundației, iar forțele exterioare și cuplurile F și M sînt date în centrul de greutate al blocului de fundație.

Dacă excitațiile sînt armonice:

$$\begin{aligned} F_z(t) &= F_z \cdot e^{i(\omega t+\alpha_z)}, \\ F_x(t) &= F_x \cdot e^{i(\omega t+\alpha_x)}, \\ M_y(t) &= M_y \cdot e^{i(\omega t+\alpha_\varphi)}, \\ M_z(t) &= M_z \cdot e^{i(\omega t+\alpha_\psi)}, \end{aligned} \tag{60}$$

deplasările vor fi:

$$\begin{aligned} z(t) &= z \cdot e^{i\omega t};\ z = z_1 + iz_2, \\ x(t) &= x \cdot e^{i\omega t};\ \ x = x_1 + ix_2, \\ \varphi(t) &= \varphi \cdot e^{i\omega t};\ \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2, \\ \psi(t) &= \psi \cdot e^{i\omega t};\ \ \psi = \psi_1 + i\psi_2. \end{aligned} \tag{61}$$

În mod analog, reacțiunile solului sînt armonice:

$$\begin{aligned} R_z(t) &= R_z \cdot e^{i\omega t}, \\ R_x(t) &= R_x \cdot e^{i\omega t} \\ T_\varphi(t) &= T_\varphi \cdot e^{i\omega t}, \\ T_\psi(t) &= T_\psi \cdot e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{62}$$

Pe de altă parte, conform relației de definiție (44), reacțiunile elastice ale solului sînt legate de impedanțe prin relațiile:

$$\begin{aligned} R_z &= K_z \cdot z, \\ R_x &= K_x(x - z_C\varphi) + K_{x\varphi} \cdot \varphi, \\ T_\varphi &= K_\varphi \cdot \varphi + K_{x\varphi}\ (x - z_C\varphi), \\ T_\psi &= K_\psi \cdot \psi. \end{aligned} \tag{63}$$

Înlocuind relațiile (60), (61), (62) și (63) în ecuațiile de mișcare (59) se obțin deplasările corespunzînd celor patru grade de libertate :

$$z = \frac{F_z \cdot e^{i\alpha_z}}{K_z(\omega) - m\omega^2}, \quad \psi = \frac{M_z \cdot e^{i\alpha_\psi}}{K_\psi(\omega) - J_z\omega^2},$$

$$x = \{K_\varphi^* F_x \cdot e^{i\alpha_x} - K_{x\varphi}^* M_y \cdot e^{i\alpha_\varphi}\} \cdot N, \tag{64}$$

$$\varphi = \{K_x^* M_y \cdot e^{i\alpha_\varphi} - K_{x\varphi}^* F_x \cdot e^{i\alpha_\varphi}\} \cdot N,$$

unde s-a notat pentru simplificare :

$$K_x^* = K_x(\omega) - m\omega^2,$$

$$K_{x\varphi}^* = K_{x\varphi}(\omega) - K_x(\omega),\ z_C, \tag{65}$$

$$K_\varphi^* = K_\varphi(\omega) - J_y\omega^2 + K_x(\omega)\ z_C^2 - 2K_{x\varphi}(\omega)\ \cdot z_C,$$

$$N = (K_x^* \cdot K_\varphi^* - K_{x\varphi}^2)^{-1}.$$

Relațiile de mai sus se simplifică dacă impedanțele reciproce $K_{x\varphi}$ sînt considerate nule.

5.4.4. DIFERITE FORME ALE TĂLPII FUNDAȚIEI

În lucrarea [18] se dau coeficienții adimensionali k și c ai impedanțelor dinamice, pentru suprafețe dreptunghiulare, în cazul $\nu = 1/3$, în funcție de factorul de frecvență a_0. Mai mulți autori au studiat influența diferitelor forme de suprafețe asupra constantelor elastice statice. Astfel, după N.M. Borodacev, constantele elastice statice pentru deplasări verticale se pot calcula cu relația

$$k_z = \frac{4\,GR}{1 - \nu} \cdot J_z, \tag{66}$$

coeficientul de corecție J_z luîndu-se din tabelul 14. Valorile pentru dreptunghi se potrivesc cu cele din tabelul 13.

În lucrarea [13] autorii prezintă aceste date sub o altă formă. Notînd $2b/2a$ raportul între laturile dreptunghiului în care se poate înscrie talpa fundației de formă oarecare, respectiv cu $A/(4b^2)$ raportul între aria tălpii fundației și cea a unui pătrat de latură $2b$, se definește un *parametru al constantei elastice statice*

$$S_z = \frac{1 - \nu}{2Gb} \cdot k_z. \tag{67}$$

Tabelul 14

Coeficienți de corecție pentru calculul constantei elastice k_z la diferite forme ale tălpii fundației

Forma tălpii fundației	J_z
Cerc	1,00
Hexagon regulat	1,01
Semicerc	1,05
Triunghi echilateral	1,07
Triunghi dreptunghi isoscel	1,10
Triunghi dreptunghi cu unghiuri de 30°, 60°, 90°	1,12
Elipsă cu $a/b = 2$; a și b — axele elipsei	1,03
Idem, $a/b = 3$	1,07
Idem, $a/b = 4$	1,13
Idem, $a/b = 6$	1,21
Romb cu unghi de 60°	1,07
Idem, 45°	1,14
Idem, 30°	1,27
Dreptunghi cu $b/a = 2$	1,03
Idem, $b/a = 4$	1,13
Idem, $b/a = 8$	1,23

Articolul suscitat dă valorile parametrului S_z (pentru fundațiile descrise în tabelul 13) în funcție de rapoartele adimensionale b/a și $A/(4\,b^2)$. Luînd aceste valori, cu relația (67) se calculează k_z.

Studiul respectiv dă, de asemenea, indicații referitoare la constantele elastice de translație orizontală, de balans și de răsucire, ca și la coeficienții de amortizare geometrici c_v, c_h, c_r, c_t.

6. FUNDAȚII ÎNGROPATE

Se știe că majoritatea fundațiilor rezemate pe sol sînt îngropate parțial sau total. În cele descrise anterior s-au folosit constantele elastice și coeficienții de amortizare, fără a face mențiune expres dacă este vorba de fundații așezate pe suprafața solului sau îngropate. În cele ce urmează se va examina, cantitativ, efectul îngropării fundației, luînd ca punct de plecare fundațiile neîngropate.

6.1. COEFICIENȚI DE CORECȚIE

Se notează prin h_1 adîncimea pe care este îngropată în sol o fundație care are înălțimea totală H. Dacă pe o anumită adîncime măsurată de la suprafață nu există contact între fundație și sol, mărimea h_1 se va înlocui prin $h_2 < h_1$.

Cunoscînd valorile constantelor elastice și coeficienților de amortizare geometrici, arătate în coloanele 3 și 6 ale tabelului 10, valorile corectate pentru fundații îngropate, purtînd indicele „1", sînt date în tabelul 15 în funcție de ν și de dimensiunile h_1 , R.

Tabelul 15

Efectul umpluturilor laterale asupra constantelor elastice şi rapoartelor de amortizare geometrice

Felul mişcării	Constante elastice		Rapoarte de amortizare geometrice	
	Valoarea corectată	Coeficientul de corecţie	Valoarea corectată	Coeficientul de corecţie
Translaţie verticală	$k_{z1} = \eta_z k_z$	$\eta_z = 1+0,6(1-\nu)\frac{h_1}{R}$	$\zeta_{z1} = \alpha_z \zeta_z$	$\alpha_z = \frac{1+1,9(1-\nu)\frac{h_1}{R}}{\sqrt{\eta_z}}$
Translaţie orizontală	$k_{x1} = \eta_x k_x$	$\eta_x = 1+0,55(2-\nu)\frac{h_1}{R}$	$\zeta_{x1} = \alpha_x \zeta_x$	$\alpha_x = \frac{1+1,9(2-\nu)\cdot\frac{h_1}{R}}{\sqrt{\eta_x}}$
Rotaţie în jurul unei axe orizontale	$k_{\varphi 1} = \eta_\varphi k_\varphi$	$\eta_\varphi = 1+1,2(2-\nu)\frac{h_1}{R} + 0,2(2-\nu)\left(\frac{h_1}{R}\right)^3$	$\zeta_{\varphi 1} = \alpha_\varphi \zeta_\varphi$	$\alpha_\varphi = \frac{1+0,7(1-\nu)\frac{h_1}{R}+0,6(2-\nu)\left(\frac{h_1}{R}\right)^3}{\sqrt{\eta_\varphi}}$

6.2. METODA SIMPLIFICATĂ R. DOBRY, G. GAZETAS

Metoda ce va fi prezentată succint în cele ce urmează, după publicaţia [12], este de fapt o a patra metodă a semispaţiului elastic, în continuarea celor descrise în paragrafele 5.2, 5.3, 5.4.

Se vor face o serie de notaţii, în parte respectînd publicaţia originală şi în parte adaptate notaţiilor din această lucrare.

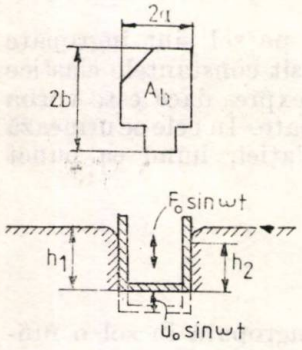


Fig. 18

Fundaţia de formă oarecare poate fi înscrisă într-un dreptunghi de laturi $2a$, $2b$ (fig. 18). Aria totală a suprafeţei de rezemare pe sol este A_b. Fundaţia este îngropată în sol pe adîncimea h_1. Dacă contactul nu este perfect, în loc de h_1 se ia $h_2 < h_1$.

Se notează prin litera K constantele elastice şi prin k unele mărimi adimensionale legate de acestea. Constantele elastice vor fi marcate printr-o bară deasupra dacă este vorba de mărimi dinamice. Se va folosi indicele „s" pentru valori măsurate la suprafaţa solului şi „i" pentru valori măsurate în adîncime. Prezentarea ce urmează se referă numai la deplasări verticale (indicele z), pentru alte mişcări urmînd a se consulta publicaţiile originale *). Ca urmare, se vor folosi notaţiile: K — constantă elastică statică; $\bar{K}$ — constantă elastică dinamică; idem K_s, $\bar{K}_s$ — la

*) Publicaţiile citate la bibliografie se găsesc în posesia autorului şi pot fi consultate de către cei interesaţi.

suprafață, K_t, $\bar{K}_t$ — în adîncime, K_{zs}, $\bar{K}_{zs}$ — pe verticală; $k_s = \bar{K}_s/K_s$; $\bar{K}(\zeta)$ — dacă se ține seama și de amortizarea histeretică; C — coeficient de amortizare; $C(\zeta)$ dacă se ține seama de amortizarea histeretică; A_s — suprafața laterală de rezemare, egală cu conturul (perimetrul) bazei înmulțit cu înălțimea h_2; $k_t = \bar{K}_t/K_t$.

Cu aceste notații, dacă solul are și amortizare histeretică, cei doi coeficienți dinamici sînt:

$$\bar{K}(\zeta) = \bar{K} - \omega C\zeta, \quad C(\zeta) = C + 2\ \bar{K}\zeta/\omega. \tag{68}$$

Metoda prezentată aici se bazează pe sinteza unui număr mare de probleme rezolvate prin metode „exacte", care necesită calcule destul de complicate, adesea programe de calcul ce nu stau totdeauna la îndemînă. Dat fiind că în problema conlucrării dintre fundație și sol apar destule incertitudini — legate mai ales de neomogenitatea solului sau de determinarea constantelor elastice ale acestuia —, autorii propun această metodă simplificată, în primul rînd pentru anteproiecte, dar chiar și pentru proiecte definitive.

Conform lucrării citate, constanta elastică *statică* pentru fundația îngropată are expresia

$$K_t = \frac{2GbS_z}{1-\nu}\left[1 + \frac{1}{21}\cdot\frac{h_1}{a}\left(1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{A_b}{4b^2}\right)\right]\cdot\left[1 + 0{,}19\left(\frac{A_s}{A_b}\right)^{2/3}\right]. \tag{69}$$

Mărimea S_z în funcție de $A_b/4\ b^2$ se ia din figura 19.

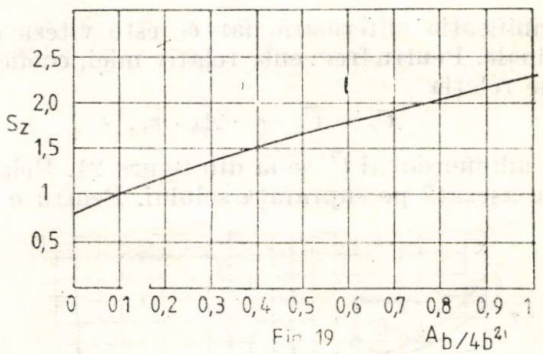


Fig. 19

La rîndul său, constanta elastică dinamică a fundației îngropate este dată de relația

$$\bar{K}_t = K_t \cdot k_t = K_t\ (k_t/k_s)\ k_s, \tag{70}$$

unde k_s (pentru translații verticale) se ia din figura 20, iar raportul din această formulă se calculează cu

$$k_t/k_s = 1 - 0{,}09\ (h_1/a)^{3/4} \cdot a_0^2 \tag{71}$$

pentru sol nesaturat, cu $\nu = 0{,}3 \ldots 0{,}4$ și $a \leqslant 1{,}5$,

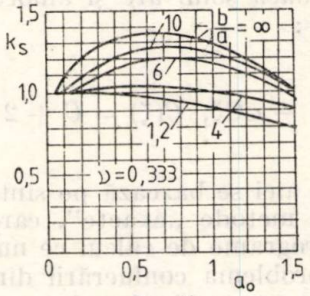


Fig. 20

respectiv

$$k_t/k_s = \begin{cases} 1 - 0{,}08(h_1/a)^{3/4} \cdot a_0^2, & \text{dacă } b/a = 1 \\ 1 - 0{,}35\ (h_1/a)^{1/2} \cdot a_0^{3{,}5}, & \text{dacă } b/a \geqslant 4. \end{cases} \tag{72}$$

Dacă se ia în considerare și amortizarea histeretică, se aplică, în continuare, relația (68).

Pentru coeficienții de amortizare geometrici se vor stabili, în continuare, următoarele notații: C_z — coeficient de amortizare pentru translații verticale; C_{zs}, C_{zi} — idem, pentru fundații așezate pe suprafața solului, respectiv îngropate.

Se demonstrează că pentru excitații cu frecvențe ridicate, coeficienții de amortizare tind spre valoarea limită

$$C_z \to \rho A_b v_L\,, \tag{73}$$

unde A_b are semnificația anterioară, iar v_L este viteza de propagare a undelor longitudinale. Pentru frecvențe relativ mici, coeficientul de amortizare este dat de relația

$$C_z = \bar{C}_z \cdot \rho \cdot A_b \cdot v_L, \tag{74}$$

unde coeficientul adimensional $\bar{C}_z$ se ia din figura 21. Relațiile de mai sus privesc o fundație așezată pe suprafața solului. Pentru o fundație îngro-

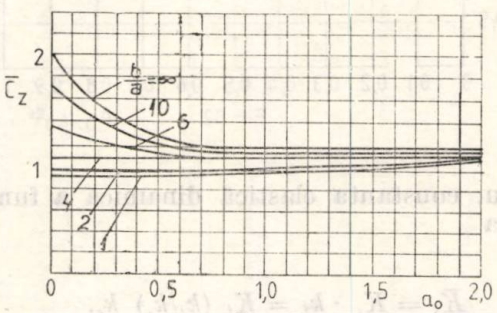


Fig. 21

pată, cu suprafața laterală A_s, coeficientul de amortizare geometric este

$$C_{zi} = C_{zs} + \rho \cdot v_T \cdot A_s, \tag{75}$$

unde v_T este viteza de propagare a undelor transversale în sol.

7. FUNDAȚII PE SOL STRATIFICAT

În cele tratate anterior, solul a fost considerat ca un semispațiu elastic, omogen și izotrop pe adîncime foarte mare. Practica arată că rareori se întîmplă acest lucru, forajele indicînd natura și grosimile straturilor succesive. Se deosebesc, practic, următoarele cazuri :

— stratul elastic, de grosime H, se află deasupra unui sol mult mai rezistent care poate fi considerat „rigid" ;

— stratul elastic, de grosime H, cu constante elastice G_1, ν_1 se află deasupra unui semispațiu (nelimitat) de constante G_2, ν_2 ;

— sub stratul elastic de grosime H_1, cu constante G_1, ν_1, se află o serie de alte straturi cu H_2, G_2, ν_2, H_3, G_3, ν_3 etc.

Problemele de acest fel sînt tratate în multe lucrări din literatura de specialitate. Se vor da numai cîteva exemple :

Strat elastic pe bază rigidă

După M. Novak, Y.O. Beredugo, E. Kausel, J.M. Roesset, coeficienții elastici corectați sînt dați de relațiile :

$$C_{zl} = C_z \left(1 + \frac{R}{H}\right),$$

$$C_{xl} = C_x \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{H}\right), \tag{76}$$

$$C_{\varphi l} = C_\varphi \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{R}{H}\right),$$

unde indicele l se referă la stratul de grosime H, iar coeficienții C_z, C_x, C_φ corespund semispațiului. În ce privește vibrațiile verticale, coeficienții elastici și rapoartele de amortizare se pot lua din tabelul 16. Se observă ce mult scad coeficienții C_{zl} și ζ_{zl} pe măsura scăderii grosimii stratului elastic.

Tabelul 16

Coeficienți elastici și rapoarte de amortizare pentru straturi elastice pe suport rigid

$H/R \rightarrow$	∞	4	3	2	1
$C_{zl}/C_z \rightarrow$	1,00	0,35	0,19	0,11	0,066
$\zeta_{zl}/\zeta_z \rightarrow$	1,00	0,31	0,16	0,09	0,044

Constantele elastice statice (tabelul 10) se transformă pentru stratul elastic așezat pe unul rigid, așa cum se arată în tabelul 17. Dacă fundația este îngropată pe înălțimea h_1 în stratul elastic, constantele elastice sînt date de tabelul 18 [18]. Relații asupra funcțiilor de impedanță se găsesc în [18].

Tabelul 17

Constante elastice statice pentru fundații pe strat elastic, de grosime H, așezate pe un strat „rigid"

Felul încărcării	Fundație cu baza circulară		Fundație dreptunghiulară îngustă	
	Constanta elastică statică	Valabil pentru	Constanta elastică statică	Valabil pentru
Translație verticală	$k_z = \frac{4GR}{1-\nu}\left(1+1{,}28\,\frac{R}{H}\right)$	$\frac{H}{R} > 2$	$k_z = \frac{1{,}23G}{1-\nu}\left(1+3{,}5\,\frac{b}{H}\right)$	$1 \leqslant \frac{H}{B} \leqslant 10$
Translație orizontală	$k_x = \frac{8GR}{2-\nu}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{H}\right)$	$\frac{H}{R} > 1$	$k_x = \frac{2{,}1G}{2-\nu}\left(1+2\,\frac{b}{H}\right)$	$1 \leqslant \frac{H}{B} \leqslant 8$
Rotație față de axă orizontală	$k_\varphi = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)}\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{R}{H}\right)$	$4 \geqslant \frac{H}{R} \geqslant 1$	$k_\varphi = \frac{\pi G b^2}{2(1-\nu)}\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{b}{H}\right)$	$1 \leqslant \frac{H}{B} \leqslant 3$
Rotație față de axă verticală	$k_\psi = \frac{16}{3}GR^3$	$\frac{H}{R} \geqslant 1{,}25$		

Tabelul 18

Constante elastice statice pentru fundații îngropate așezate pe strat elastic

Felul încărcării	Constanta elastică statică	Valabil pentru
Translație verticală	$k_z = \frac{4GR}{1-\nu}\left(1+1{,}28\,\frac{R}{H}\right)\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{h_1}{R}\right)\left(1+0{,}85-0{,}28\cdot\frac{h_1}{R}\cdot\frac{h_1/H}{1-h_1/H}\right)$	$\frac{h_1}{R} < 2$ $\frac{h_1}{H} < 0{,}5$
Translație orizontală	$k_x = \frac{8GR}{2-\nu}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{H}\right)\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{h_1}{R}\right)\left(1+\frac{5}{4}\cdot\frac{h_1}{H}\right)$	$\frac{h_1}{R} < 2$ $\frac{h_1}{H} < 0{,}5$
Rotație în jurul unei axe orizontale	$k_\varphi = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)}\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{R}{H}\right)\left(1+2\,\frac{h_1}{R}\right)\left(1+0{,}7\,\frac{h_1}{H}\right)$	$\frac{h_1}{R} < 2$ $\frac{h_1}{H} < 0{,}5$
Translație orizontală și balans	$k_{x\varphi} = 0{,}40\,k_x \cdot h_1$	$\frac{h_1}{R} < 2$ $\frac{h_1}{H} < 0{,}5$
Rotație în jurul unei axe verticale	$k_\psi = \frac{16}{3}GR^3\left(1+2{,}67\,\frac{h_1}{R}\right)$	$\frac{h_1}{R} < 2$ $\frac{h_1}{H} < 0{,}5$

Strat elastic pe semispațiu elastic

Dacă stratul superficial (pe care este așezată fundația) are grosimea H, modulul de elasticitate G_1 și constanta ν_1, iar semispațiul de sub el are G_2 și ν_2, constantele elastice se pot calcula cu relațiile din tabelul 19. În lucrarea [18] se dau și alte informații asupra problemei. De asemenea, se recomandă lucrările [16, 24].

Tabelul 19

Constante elastice pentru fundații pe strat elastic așezat deasupra unui semispațiu elastic

Felul încărcării	Constanta elastică statică	Valabil pentru
Translație verticală	$k_z = \frac{4 G_1 R}{1-\nu_1} \cdot \frac{1+1{,}28 \cdot \frac{R}{H}}{1+1{,}28 \frac{R}{H} \cdot \frac{G_1}{G_2}}$	$1 \leq \frac{H}{R} \leq 5$
Translație orizontală	$k_x = \frac{8 G_1 R}{2-\nu_1} \cdot \frac{1+\frac{1}{2} \cdot \frac{R}{H}}{1+\frac{1}{2} \cdot \frac{R}{H} \cdot \frac{G_1}{G_2}}$	$1 \leq \frac{H}{R} \leq 4$
Rotație în jurul unei axe orizontale	$k_\varphi = \frac{8 G_1 R^3}{3(1-\nu_1)} \cdot \frac{1+\frac{1}{6} \cdot \frac{R}{H}}{1+\frac{1}{6} \cdot \frac{R}{H} \cdot \frac{G_1}{G_2}}$	$0{,}75 \leq \frac{H}{R} \leq 2$

8. ALTE PROBLEME

Metoda semispațiului elastic permite și tratarea altor probleme, întîlnite în literatură, dar care nu vor fi examinate aici din lipsă de spațiu :

— sol neomogen și anizotrop la care constantele elastice, în special G, variază cu adîncimea, sau sînt diferite în plane orizontale și verticale [18, 34, 17].

— sol neliniar la care frecvența de rezonanță este funcție de amplitudinea deplasării [3, 4, 22, 26].

9. CONCLUZII

Expunerea făcută în paginile precedente a arătat că există o varietate de metode pentru a calcula răspunsul sistemului fundație-sol atît în ce privește deplasările, cît și frecvențele proprii. Metodele de calcul se bazează pe două concepte : cel al coeficienților elastici dinamici și cel al semispațiului elastic. În final, în toate metodele se ajunge la aplicarea ecuațiilor de mișcare ale sistemului cu parametri concentrați — mase constante elastice, amortizări — , specificul metodelor constînd în modu

de stabilire a ultimilor doi parametri. Este fapt binecunoscut că experimentul are importanță de necontestat atît în ce privește stabilirea valorilor diferitelor constante ale solurilor, cît și în compararea valorilor calculate ale răspunsului dinamic cu cele reale. Problemele expuse în această lucrare, o parte redate, au făcut și obiect de cercetare teoretică sau experimentală a numeroși specialiști români. O parte din aceste lucrări sînt expuse în volumele Simpozioanelor de Dinamica Fundațiilor de Mașini din 1973 și 1985 [8], în monografia autorului din 1980 [6], precum și în alte lucrări.

În încheiere se vor reda, rezumativ, două exemple de calcul.

Exemplul 1. O fundație cu baza dreptunghiulară, $S = 2\,a \cdot 2\,b = 4 \cdot 6 = 24$ m^2, este sprijinită pe un sol nisipos cu $E_d = 200$ MPa și $\nu = 0{,}5$, fiind excitată cu pulsația $\omega = 104{,}7$ rad/s. Se cere constanta elastică verticală, k_z, calculată prin diverse metode.

Prin metoda coeficienților elastici se aplică relația (18), care dă $C_z = 53{,}97 \cdot 10^6$ N/m^3. Cu (16) rezultă $k_z = 1\,295 \cdot 10^6$ N/m.

Pentru metodele semispațiului elastic se determină $G = 74{,}1$ MPa și $v_T = 140$ m/s. Cu relația (27), tabelul 10, tabelul 9 și figura 10, se obține $k_z = 848 \cdot 10^6$ N/m.

Prin analogia Lysmer, tabelul 10, rezultă $k_z = 1\,260 \cdot 10^6$ N/m. Cu tabelul 11 și figura 14, $k_z = 1\,229 \cdot 10^6$ N/m.

Se observă că prin trei metode s-au obținut rezultate foarte apropiate, diferind între ele cu cel mult 5%. Metoda lui Hsieh a dat o valoare mult mai mică.

Exemplul 2. Să se calculeze prin metoda Lysmer și prin metoda funcțiilor de impedanță deplasarea produsă de o forță verticală armonică $P_{zo} \cdot \sin \omega t$, unde $P_{zo} = 14\,000$ N, iar $\omega = 314$ rad/s, asupra unei fundații cu $m = 72\,000$ kg, baza dreptunghiulară cu $2\,a = 3{,}6$ m, $2\,b = 6$m, așezată pe un sol cu $G = 70 \cdot 10^6$ MPa, $\rho = 1\,800$ kg/m^3 și $\nu = 0{,}4$.

Prin metoda Lysmer, folosind tabelele 10, 11 și figura 15, se află:

$$R = 2{,}62 \text{ m}; \quad k_z = 1\,193 \cdot 10^6 \text{ N/m}; \quad p_z = 128{,}7 \text{ rad/s};$$

$$c_c = 18{,}54 \cdot 10^6 \text{ N·s/m}; \quad B_z = 0{,}334; \quad \zeta_z = 0{,}735.$$

Adăugînd, după tabelul 12, $\zeta_i = 0{,}065$, rezultă $\zeta = 0{,}8$ și deci

$$c_z = 14{,}83 \cdot 10^6 \text{ N·s/m}, \quad \eta = 2{,}44; \quad \eta^2 = 5{,}95; \quad A_z = 1{,}86\ \mu\text{m}.$$

Prin metoda funcțiilor de impedanță, după relațiile (57), (64) și figura 17 : $a_0 = 4{,}17$; $k_v = 0{,}6$; $c_v = 1{,}02$; $K_z(\omega) = (715{,}8 + 5074\,i)\,10^6$; $A_z = 1{,}72$ μm. S-a obținut un rezultat apropiat de cel anterior.

Primit în redacție la 15 decembrie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. D.D. BARKAN, *Dynamics of Bases and Foundations*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, San Francisco, Toronto, London, 1962.
2. D.D. BARKAN, V.A. ILYICHEV, *Dynamics of Bases and Foundations*, Proc. 9th ICSMFE, Tokio, 1977.

3. D. BRATOSIN, I. VASILE, *Vibration in Nonlinear Viscoelastic Soils*, Symposium "Dynamics of Machine Foundations, Bucharest", 1985, p. 89—96.
4. D. BRATOSIN, *Nonlinear Behaviour of Soils during Harmonic Vibration*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **31**, *2* (1986).
5. GH. BUZDUGAN, I. CONSTANTINESCU, M. RADEȘ, I. MINCA, E. MIHĂILESCU, C. VOICU, B. IONESCU, *Determinări experimentale ale caracteristicilor elastice și mecanice pentru diferite soluri*, Conferința „Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1978.
6. GH. BUZDUGAN, *Izolarea antivibratorie a mașinilor*, Edit. Academiei, București, 1980.
7. GH. BUZDUGAN, I. MINCĂ, *Considerații asupra interacțiunii elastice dintre fundație și sol*, Academia Română, Memoriile Secțiilor Științifice, Seria IV, Tomul **VI**, *2*, 45—56 (1983).
8. GH. BUZDUGAN, M. RADEȘ, I. MINCĂ, editors, *Symposium „Dynamics of Machine Foundations"*, Bucharest, 1985.
9. GH. BUZDUGAN, I. MINCĂ, *Experimental Values of the Dynamic Coefficients of Subgrade Reaction, C_z, C_α, C_φ, C_ψ*, "Symposium Dynamics of Machine Foundations", Bucharest, 1985, p. 97—110.
10. GH. BUZDUGAN, I. MINCĂ, *New Elements regarding the Definition of Spring Constants and the Elastic Coefficients of the Foundation-Soil Interaction*, Symposium "Dynamics of Machine Foundations", Bucharest, 1985, p. 111—126.
11. GH. BUZDUGAN, I. MINCĂ, *Some Romanian Contributions concerning the Dynamics of the Foundation-Soil System*, International Symposium "Foundations for Machines with Dynamic Loads", Leningrad, 1989, Vol. **1**, p. 112—114.
12. R. DOBRY, G. GAZETAS, *Dynamic Stiffness and Damping of Foundations by simple Methods*, Vibrations for Soils and Foundations, Fall Convention, Detroit, 1985, p. 75—107.
13. RICARDO DOBRY, GEORGE GAZETAS, *Dynamic Response of Arbitrarily Shaped Foundations*, J. Geotech. Engrg., **112**, *2* (1986).
14. R. DOBRY, G. GAZETAS, K.H. STOKOE II, *Dynamic Response of Arbitrary Shaped Foundations, Experimental Verification*, J. Geotech. Engrg., **112**, *2* (1986).
15. GEORGE GAZETAS, JOSE M. ROESSET, *Vertical Vibration of Machine Foundations*, J. Geotech. Engrg. Div., **105**, *GT 12* (Dec. 1979).
16. G. GAZETAS, *Static and Dynamic Displacements of Foundations on Heterogeneous Multilayered Soils*, Géotechnique, **30**, *2* (1980)
17. G. GAZETAS, *Strip Foundations on a Cross-Anisotropic Soil Layer subjected to Dynamic Loading*, Géotechnique, **31**, *2* (1981).
18. G. GAZETAS, *Analysis of Machine Foundation Vibrations : State of the Art*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, **2**, *1* (1983).
19. G. GAZETAS, J. TASSOULAS, *Horizontal Stiffness of Arbitrarily Shaped embedded Foundations*, J. Geotech. Engrg., **113**, *5* (1987).
20. G. GAZETAS, J. TASSOULAS, *Horizontal Damping of Arbitrarily Shaped Embedded Foundations*, J. Geotech. Engrg., **113**, *5* (1987).
21. *** *Studii privind metodele și aparatura pentru determinarea caracteristicilor dinamice ale pământurilor, necesare proiectării fundațiilor de mașini și modificarea lor in timp*, Institutul Politehnic București, Catedra de rezistența materialelor, iulie 1977, octombrie 1978, octombrie 1979.
22. H. LORENZ, *Grundbau-Dynamik*, Springer Verlag, Berlin, Göttinger, Heidelberg, 1960.
23. A. MAJOR, *Dynamics in Civil Engineering*, Vol. **I—IV**, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.
24. HAZEM EL MARSAFAWI, MILOS NOVAK, *Static and Dynamic Analysis of Layered Soils using Hybrid Displacement Solution*. The University of Western Ontario, London, Ont., Canada, 1989.
25. AKIRA MITA, ENRIQUE J. LUCO, *Impedance Functions and Input Motions for Embedded Square Foundations*, J. Geotechn. Engrg., **115**, *4* (1989).
26. ALI F. NAYFEH, SAMIR J. SERHAN, *Vertical Vibration of Machine Foundations*, J. Geotechn. Engrg., **115**, *1* (1989).
27. M. NOVAK, *State-of-the-Art in Analysis and Design of Machine Foundations*, 3 rd International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Princeton, 1987, p. 171—192.

28. SHAMSHER PRAKASH, VIJAY KUMAR PURI, *Dynamic Properties of Soils from In-Situ Testes*, J. Geotechn. Engrg. Div., ASCE, **107**, *GT* 7, (1981).
29. SHAMSHER PRAKASH, VIJAY K. PURI, *Foundations for Machines : Analysis and Design*, John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1988.
30. E. RAUSCH, *Maschinenfundamente und andere dynamisch beanspruchte Baukonstruktionen*, 3. Auflage, VDI—Verlag, Düsseldorf, 1959.
31. F. E. RICHART JR., J.R. HALL JR., R.D. WOODS, *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1970.
32. F.E. RICHART JR., *Soil-Structure Interaction*, Proc. 9th ICSMFE, Tokio, 1977, p. 637—650.
33. H.B. SEED, J. M. DRISS, *Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analysis*, College of Engineering, University of California, Berkeley, 1970.
34. ANESTIS S. VELETSOS, KIRK W. DOTSON, *Vertical and Torsional Vibration of Foundations in Inhomogeneous Media*, *J. Geotechn.* Engrg., **114**, 9, (1988).
35. CHUMMAR A. VERENGHESE, *Dynamic Properties of Different Soil Layers in India*, International Symposium "Foundations for Machines with Dynamic Loads", Leningrad, 1989, Vol. **1**, p. 91—100.

RECENZII

M. GAFIȚANU, S. CREȚU, B. DRĂGAN, *Diagnosticarea vibroacustică a mașinilor și utilajelor*, Edit. tehnică, București, 1989, 331 p.

Consecvenți preocupărilor îndelungate de cercetare în domeniul vibrațiilor mecanice, profesorul Mihai Gafițanu împreună cu colaboratorii Spiridon Crețu și Barbu Drăgan pun la dispoziția inginerilor și a cercetătorilor o nouă monografie, avînd tematica anunțată în titlul lucrării.

Foarte actuale ca interes tehnic în lumea întreagă, monitorizarea și diagnosticarea vibroacustică au început să fixeze și atenția cercetătorilor noștri. Pînă la constituirea unei baze materiale adecvate, este bine ca un număr cît mai mare de specialiști să se familiarizeze cu specificul domeniului, lucrarea colectivului ieșean reprezentînd o bună cale de informare privind principiile, metodele și tehnicile de diagnosticare vibroacustică.

Organizată în șapte capitole, urmate de o bibliografie conținînd 160 de titluri, cartea debutează cu prezentarea unor elemente de teorie a vibrațiilor mecanice, necesare pentru dezvoltarea subiectului tratat. Astfel, primul capitol se ocupă de caracterizarea mișcărilor vibratorii deterministe, aleatoare și a zgomotului radiat de mașini, precum și de corelația vibrație-zgomot. Al doilea capitol analizează sursele de vibrație și zgomot la mașinile și utilajele industriale, propagarea vibrațiilor și modalitățile de definire a răspunsului sistemelor mecanice supuse unor excitații variabile în timp.

Capitolul trei prezintă principiile monitorizării și diagnosticării stării sistemelor prin supravegherea regimului de vibrații sau de zgomot în diferitele faze ale funcționării lor.

Capitolele următoare tratează aspectele tehnice ale diagnosticării vibroacustice. Sînt prezentate aparatele și tehnicile de măsurare (capitolul patru), condițiile de măsurare și normele privind nivelurile admisibile de vibrații (capitolul cinci), particularitățile proceselor de diagnosticare pentru organele de mașini (capitolul șase) și pentru unele tipuri de mașini și instalații (capitolul șapte). Cei interesați vor găsi informații referitoare la diferite tipuri de transmisii cu roți dințate, cu came, prin lant, prin curele, la rulmenți și lagăre cu alunecare ; la detectarea dezechilibrului pieselor în mișcare de rotație. Din categoria utilajelor sînt avute în vedere mașinile electrice, ventilatoarele, turbinele, mașinile-unelte, motoarele cu ardere internă, instalații hidraulice, utilaje din industria chimică și petrochimică.

Problemele prezentate sînt bogat ilustrate cu rezultate ale cercetărilor experimentale din literatura de specialitate și din lucrările originale ale autorilor, însoțite de explicații și indicații de interpretare care pot servi drept îndrumar celor decișși să abordeze domeniul.

Subliniind încă o dată interesul pe care îl prezintă lucrarea, nu putem să nu exprimăm și în acest context regretul că, pînă acum, învățămîntul tehnic superior a făcut prea puțin pentru pregătirea fundamentală în domeniul vibrațiilor și al dinamicii mașinilor și speranța că, în viitoarea sa structură, școala politehnică românească va găsi modalitatea de a asigura absolvenților săi posibilitatea accesului rapid și creator în astfel de probleme, de mare actualitate.

Gh. Buzdugan și Lucia Fetcu

G. FRANZ (ed.), *Beton-Kalender 1990 (Manual pentru beton, 1990)*, Ernst und Sohn, Berlin 1990, ed. 79, 1640 pag.

La alcătuirea actualei ediții a cunoscutei publicații în două volume au colaborat 15 specialiști. Volumul unu cuprinde capitolele actualizate : betoane, mortare, oțeluri, tabele pentru determinarea eforturilor în plăci dreptunghiulare și dimensionarea elementelor din beton armat și beton precomprimat în concordanță cu normele DIN, ediția iulie 1988. Se încheie cu un capitol nou consacrat bazelor proiectării în concordanță cu Eurocode 2, destinat țărilor vesteuropene.

Prescripțiile germane pentru alcătuirea, proiectarea și execuția construcțiilor din beton simplu, armat și precomprimat fac obiectul primului capitol al volumului doi. Urmează o prezentare a normelor elvețiene, studiul clădirilor înalte din beton armat — cu accent pe evaluarea acțiunilor și determinarea eforturilor, utilizarea betonului precomprimat în construcții și studiul susținerilor de diferite tipuri. Ultimul capitol este nou și se referă la problema actuală a întreținerii construcțiilor din beton armat : cuprinde analiza diferitelor acțiuni asupra acestora, urmărirea comportării lor în exploatare cît și proiectarea și execuția lucrărilor de întreținere. Și această ediție a manualului — a 22-a și ultima îngrijită de prof Franz, care se retrage din motive de vîrstă — reprezintă un ajutor prețios în proiectarea și execuția construcțiilor de beton.

R. Friedrich

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 50, nr. 3—4 **mai—august 1991**

SUMAR

STUDII

V. N. CONSTANTINESCU, S. DĂNĂILĂ, O formă unitară privind utilizarea metodei singularităţilor pentru simularea mişcărilor subsonice şi supersonice 155

M. LUPU, Generalizarea şi studiul modelului Jukovski-Roshko-Eppler în cazul jeturilor axial simetrice utilizînd funcţiile $-(P, Q)$ analitice. 167

G. MARINESCU, C. BERBENTE, O metodă pentru calculul curgerilor transonice în jurul profilelor aerodinamice folosind două baze de aproximare 185

V. R. ANCUŞA, Determinarea coeficienţilor polinomului trigonometric pentru un profil aerodinamic simetric 197

S. GĂLEŢUŞE, Metodă analitică de proiectare aerodinamică a elicei tractive 213

ŞT. STAICU, R. DAMIAN, M. BUGARU, Cuplarea sistemelor de rigide articulate cilindric 221

GH. I. ENE, Stabilirea parametrilor constructivi şi funcţionali ai granulatoarelor cu taler 231

I. M. CIORNEI, Optimizarea variatorului toroidal din punct de vedere al spinului . . . 241

S. CHERGUI, Analiza dinamică a masturilor de foraj la operaţii de manevră. 253

I. URSU, T. PANAIT, S. PĂUNESCU, P. KALMUŢCHI, Simularea numerică a funcţionării unităţilor electrohidraulice de acţionare pentru pilotul automat. 273

FLORINA LILIANA BUZESCU, D. VIERU, CORINA FETECĂU, Optimizarea funcţionării unui manipulator de clupe la o maşină de pieptănat fuior de in şi cînepă 285

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

ADELINA GEORCESCU, Modelarea matematică în mecanica fluidelor 295

RECENZII 299

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heldelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

O FORMĂ UNITARĂ PRIVIND UTILIZAREA METODEI SINGULARITĂȚILOR PENTRU SIMULAREA MIȘCĂRILOR SUBSONICE ȘI SUPERSONICE

de V. N. CONSTANTINESCU și S. DĂNĂILĂ

Institutul Politehnic București

Se prezintă o metodă de simulare a mișcărilor potențiale subsonice și supersonice în jurul unei configurații de aeronavă. Utilizînd metoda singularităților sînt deduse, într-o formă unitară, expresiile analitice ale vitezelor induse pentru distribuții de surse și dublete de accelerație. Prezentarea unitară a regimurilor subsonic și supersonic are importanță nu numai din punct de vedere formal, dar și metodologic permițînd utilizarea aceluiași model numeric de calcul pentru cele două regimuri. Deducerea analitică a expresiilor vitezelor induse pentru toate cazurile posibile duce la micșorarea semnificativă a timpului de calcul permițînd implementarea programului de simulare chiar pe minicalculatorul de tip CORAL. Rezultatele numerice obținute sînt în bună concordanță cu alte rezultate numerice, teoretice și experimentale.

1. ECUAȚII ȘI CONDIȚII LA LIMITĂ

Considerînd curgerea unui fluid perfect, fără frecare sau schimb de căldură, pentru care forțele masice sînt neglijabile atunci se poate arăta [1, 2] existența unui potențial al vitezelor Φ astfel încît :

$$\vec{V} = \operatorname{grad} \Phi \tag{1.1}$$

Dacă se admite ipoteza micilor perturbații atunci [2] se poate determina un potențial al vitezelor de perturbație care satisface ecuația Prandtl-Glauert

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.2}$$

valabilă atît pentru regimul subsonic cît și pentru regimul supersonic. Pentru regimurile subsonice ($M_\infty < 1$) ecuația este de tip eliptic iar pentru regimurile supersonice ($M_\infty > 1$) este de tip hiperbolic. De remarcat că ecuații asemănătoare cu (1.2) satisfac și componente e vitezei de perturbație.

Condițiile la limită asociate sînt următoarele;

a) condiția cinematică de tangență a vitezei la suprafață.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\vec{V}_\infty \vec{n} \tag{1.3}$$

unde $\vec{n}$ este normala exterioară la suprafață și

b) condiția asimptotică departe de corp;

$$\text{grad}\varphi \to 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 \to \infty \tag{1.4}$$

Pentru regimurile de curgere subsonică aplicînd o transformare de tip Prandtl-Glauert ecuației (1.2) se obține o ecuație Laplace a cărei soluție poate fi reprezentată sub formă integrală [3]. Rezultatul autorilor citați [3] poate fi generalizat pentru cazul general al unei suprafețe tridimensionale și pentru regimul compresibil ($M_\infty < 1$). Astfel, dacă Ω reprezintă una din mărimile φ, U, V, W, care satisfac ecuația (1.2), atunci valoarea lui Ω într-un punct arbitrar $P(x, y, z)$ este dată de:

$$\Omega(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \int \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \nu} + \frac{\partial \Omega'}{\partial \nu'} \right) \frac{1}{r} - (\Omega - \Omega') \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds \tag{1.5}$$

unde

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + \beta^2[(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]} \tag{1.6}$$

$$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2} \tag{1.7}$$

integrala este calculată pe suprafața S pe care funcția de sub integrală este necunoscută. Variabila Ω reprezintă valorile acestei funcții pe fața suprafeței S de aceeași parte cu P iar variabila Ω' valorile pe fața lui S opusă lui P; $\vec{\nu}$ reprezintă conormala la suprafață:

$$\nu_1 = \beta^2 r_1; \quad \nu_2 = r_2; \quad \nu_3 = n_3 \tag{1.8}$$

unde R_1, n_2, n_3 sînt componentele normalei exterioare la S iar $\vec{\nu}'$ este definit ca un vector avînd sens opus lui $\vec{\nu}$.

Pentru mișcarea supersonică soluția generală este bazată pe rezultatul lui Volterra pentru ecuația undelor bidimensionale.

$$\Omega(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{S'} \int \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \nu} + \frac{\partial \Omega'}{\partial \nu'} \right) \sigma - (\Omega - \Omega') \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} \right] d\sigma \tag{1.9}$$

în care S' reprezintă domeniul de dependență al punctului P dat de porțiunea din S cuprinsă în interiorul conului Mach către amonte cu vîrful în P; σ este o soluție particulară a ecuației (1.2) găsită de Volterra, care

se anulează, împreună cu derivatele sale în raport cu conormala $\vec{\nu}$ pe suprafața conului Mach cu vîrful în P:

$$\sigma = \operatorname{argch} \frac{x-\xi}{B\sqrt{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \tag{1.10}$$

unde

$$B = \sqrt{M_\infty^2 - 1} \tag{1.11}$$

$$\nu_1 = -B^2 n_1 = \beta^2 n_1; \quad \nu_2 = n_2; \quad \nu_3 = n_3 \tag{1.12}$$

Folosind observația că σ reprezintă o integrală nedefinită a soluției fundamentale de tip sursă supersonică tridimensională am transformat soluția corespunzătoare mișcărilor subsonice (1.5) după cum urmează. Considerînd o integrală nedefinită din soluția fundamentală de tip sursă subsonică avem:

$$\sigma^* = \int \frac{1}{r}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argsh} \frac{x-\xi}{\beta\sqrt{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \tag{1.13}$$

Înlocuind (1.13) în (1.5) se obține:

$$\Omega(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\iint_{S'}\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+\frac{\partial\Omega'}{\partial\nu'}\right)\sigma^* - (\Omega-\Omega')\frac{\partial\sigma^*}{\partial\nu}\right]\mathrm{d}\sigma \tag{1.14}$$

Se observă că (1.14) are aceeași formă cu soluția pentru supersonic (1.9). Așadar reprezentarea integrală a soluției ecuației (1.2) poate fi pusă într-o formulă unitară:

$$\Omega(x,y,z) = -\frac{1}{E(M_\infty)}\frac{\partial}{\partial x}\iint_{\tau}\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+\frac{\partial\Omega'}{\partial\nu'}\right)\sigma - (\Omega-\Omega')\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}\right]\mathrm{d}\sigma \tag{1.15}$$

unde

$$E(M_\infty) = \begin{cases} 4\pi & \text{dacă } M_\infty < 1 \\ 2\pi & \text{dacă } M_\infty > 1 \end{cases} \tag{1.16}$$

$$\sigma = \begin{cases} \operatorname{argsh} \dfrac{x-\xi}{\beta\sqrt{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} & \text{dacă } M_\infty < 1 \\ \operatorname{argch} \dfrac{x-\xi}{B\sqrt{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} & \text{dacă } M_\infty > 1 \end{cases} \tag{1.17}$$

vectorul conormal fiind definit în continuare de relațiile (1.8) sau (1.12).

Domeniul de integrare τ :

— este întreaga suprafaţă S dacă $M_\infty < 1$

— este porţiunea din S cuprinsă în conul Mach anterior cu vîrful în $P(x, y, z)$ dacă $M_\infty > 1$.

2. REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAŢIEI INTEGRALE

Pentru rezolvarea numerică a ecuaţiei (1.15) se utilizează un procedeu numeric de tip Woodward [5, 6]. Astfel, suprafaţa configuraţiei este discretizată în panouri patrulatere plane avînd bordurile laterale paralele cu direcţia curentului neperturbat din amonte. O astfel de discretizare este întotdeauna posibilă avînd în vedere că un panou triunghiular poate fi considerat un panou patrulater avînd un bord lateral de lungime nulă.

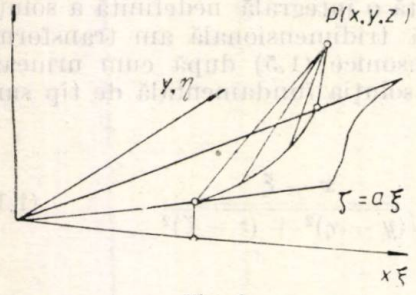


Fig. 1

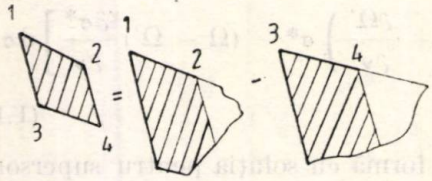


Fig. 2

Pe suprafaţa unui astfel de panou se presupune o lege de variaţie pentru mărimile de sub integrală din relaţia (1.5). În cazul de faţă aceste mărimi se vor presupune constante pe suprafaţa unui panou elementar.

De remarcat că un panou (fig. 1) definit ca mai sus poate fi obţinut prin suprapunerea a patru semiplane triunghiulare infinite.

În cele ce urmează se va considera celula de bază de discretizare o regiune triunghiulară semiinfinită ca în figura 2, avînd ecuaţia $\zeta = a\xi$ iar bordul lateral al triunghiului are proiecţia $\eta = m\xi$ (sau $\xi = \lambda$,) în planul (ξ, η).

Particularizînd ecuaţia (1.15) pentru această suprafaţă se obţine :

$$\Omega(x, y, z) = -\frac{\sqrt{1+a^2}}{E(M_\infty)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta_f} \mathrm{d}\eta \int_{\xi_i}^{\xi_f} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \nu} + \frac{\partial \Omega'}{\partial \nu'} \right) \sigma \mathrm{d}\xi +$$

$$+ \frac{1}{E(M_\infty)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta_f} \mathrm{d}\eta \int_{\xi_i}^{\xi_f} (\Omega - \Omega') \frac{\beta^2 a + \dfrac{(x-\xi)(z-\zeta)}{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2[(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]}} \mathrm{d}\xi \tag{2.1}$$

în care

$$\eta_f = \infty \text{ dacă } M_\infty < 1$$

$$\eta f = \frac{m(x - B^2my - B^2az)}{1 - B^2(a^2 + m^2)}\left[1 - \right.$$

$$\left. - \sqrt{1 - \frac{[1 - B^2(a^2 + m^2)]\,[x^2 - B^2(y^2 + z^2)]}{(x - B^2my - B^2az)^2}}\right] \text{ dacă } M_\infty > 1 \tag{2.2}$$

$$\xi i = \lambda\eta \text{ dacă } M_\infty < 1 \tag{2.3}$$

$$\xi i = \lambda\eta = \frac{\eta}{m} \text{ dacă } M_\infty > 1$$

$$\xi f = \infty \text{ dacă } M_\infty < 1.$$

$$\xi f = \frac{x - B^2az}{1 - B^2a^2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{1 - B^2a^2}{(x - B^2az)^2}\,[x^2 - B^2(y - \eta)^2 - B^2z^2]}\right] \text{ dacă } M_\infty > 1 \tag{2.4}$$

În aceste condiții integralele din ecuația (2.1) pot fi calculate dacă valorile $(\Omega - \Omega')$ și $(\partial\Omega/\partial\nu + \partial\Omega'/\partial\nu')$ pe suprafața S sînt cunoscute din formularea problemei la limită. Este convenabil ca acestea să fie constante sau nule. Două cazuri remarcabile corespund unei distribuții de surse, respectiv unei distribuții de dublete de presiune pe regiunea triunghiulară semiinfinită $\zeta = a\xi$

3. VITEZELE DE PERTURBAȚIE INDUSE DE DISTRIBUȚIE DE SURSE

În ecuația (2.1) se face Ω egal cu potențialul de perturbație φ dat de o distribuție de surse pe fața superioară a suprafeței S. Așadar:

$$\varphi/S = \varphi'/S'; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \frac{\partial\varphi'}{\partial\nu'} \cong K_S \tag{3.1}$$

unde am notat cu K_S intensitatea distribuției de surse.

În cele ce urmează vom presupune această intensitate constantă pentru o celulă de discretizare și deci poate fi scoasă de sub integrală.

Deci se obține:

$$\varphi(x, y, z) = -K_S \frac{\sqrt{1 + a^2}}{E(M_\infty)} \int_0^{\eta f} d\eta \int_{\xi i}^{\xi f} \frac{d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \beta^2[(y - \eta)^2 + (z - a\xi)^2]}} \tag{3.2}$$

iar vitezele de perturbație se calculează prin derivarea potențialului.

După derivare și efectuarea integralelor din (3.2) se găsesc următoarele relații închise de calcul:

a) pentru mișcările subsonice ($M_\infty < 1$)

$$u = \frac{kS}{4\pi} \frac{\sqrt{1+a^2}}{1+\beta^2 a^2} [a(G_1 - G_2 - G_3) - G_4] \tag{3.3a}$$

$$v = \frac{KS}{4\pi} \frac{\sqrt{1+a^2}}{(1+\beta^2 a^2)^{3/2}} [\lambda G_4 - G_5 + G_6] \tag{3.3b}$$

$$w = \frac{KS}{4\pi} \frac{\sqrt{1+a^2}}{1+\beta^2 a^2} [G_1 - G_2 + \beta^2 a^2 (G_1 - G_2 - G_3) - \beta^2 a G_4] \tag{3.3c}$$

b) pentru mișcările supersonice ($M_\infty > 1$)

$$u = -\frac{KS}{2\pi} \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+\beta^2 a^2}} [aF_1 + mF_2] \tag{3.4a}$$

$$v = -\frac{KS}{2\pi} \sqrt{1+a^2} \left[\frac{F_3}{\sqrt{1+\beta^2 a^2}} - F_2 \right] \tag{3.4b}$$

$$w = \frac{KS}{2\pi} \frac{\sqrt{1+a^2}}{1+\beta^2 a^2} F_1 - \beta^2 a m F_2] \tag{3.4c}$$

unde funcțiile $G_1 \div G_6$ și $F_1 \div F_3$ sînt date în anexă.

Un caz particular prezintă interes pentru procedeul numeric și anume $a = 0$, care corespunde unei distribuții de surse în planul (x, y). Vitezele de perturbație în acest caz se obțin direct punînd $a = 0$ în relațiile (3.3) și (3.4), deoarece acestea, ca și expresiile funcțiilor F și G nu conțin nici o nedeterminare în raport cu a.

4. VITEZELE DE PERTURBAȚIE INDUSE DE O DISTRIBUȚIE DE DUBLETE DE ACCELERAȚIE (PRESIUNE)

În ecuația (2.1) se pune Ω egal cu viteza de perturbație u de pe fața superioară a suprafeței S.

Soluția va avea o discontinuitate constantă cu amplitudine în orice punct al suprafeței:

$$\Delta u = u - u' = \text{const.} \tag{4.1}$$

și corespunzător:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial u'}{\partial \nu'} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \left[-\beta^2 a \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta u) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Delta u) \right] = 0 \tag{4.2}$$

astfel se obține din (2.1):

$$u(x, y, z) = \frac{\Delta u}{E(M_\infty)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta_f} d\eta \int_{\xi_i}^{\xi_f} \frac{\beta^2 a + \dfrac{(x-\xi)(z-a\xi)}{(y-\eta)^2 + (z-a\xi)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2[y-\eta)^2 + (z-a\xi)^2]}} d\xi \tag{4.3}$$

Dar cum $u = \partial\varphi/\partial x$, potențialul φ corespunzător unei viteze de perturbație dat de (4.3) poate fi obținut prin integrare. Deoarece potențialul de perturbație este nul la infinit amonte (condiția asimptotică 1.4) putem considera constanta de integrare nulă obținînd:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{E(M_\infty)} \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right) \int_0^{\eta_f} d\eta \int_{\xi_i}^{\xi_f} \frac{\beta^2 a + \dfrac{(x-\xi)(z-a\xi)}{(y-\eta)^2 + (z-a\xi)^2}}{\sqrt{(x-\xi^2) + \beta^2[(y-\eta)^2 + (z-a\xi)^2]}} d\xi \tag{4.4}$$

în care Δu a fost înlocuit cu $(-\Delta p/2q_\infty)$ în care Δp este saltul de presiune prin suprafața S iar q_∞ este presiunea dinamică a curentului din infinit amonte.

Prin derivarea relației (4.4) și efectuarea calculelor rezultă următoarele relații analitice de calcul pentru vitezele de perturbație:

a) pentru cazul subsonic, $M_\infty < 1$.

$$u = \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right) \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1+\beta^2 a^2} (G_1 - G_2) \tag{4.5a}$$

$$v = \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right) \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{a\sqrt{1+\beta^2 a^2}} (\lambda G_4 - G_5 + G_6) + \right.$$

$$\left. + \lambda(G_7 - G_{10}) + \frac{1}{a}(G_8 - G_9)\right] \tag{4.5b}$$

$$w = \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right) \frac{1}{4\pi a} [G_1 - G_2 + \beta^2 a^2 (G_1 - G_2 - G_3) -$$

$$- \beta^2 a G_4 - G_7 + a\lambda(G_8 - G_9) + G_{10}] \tag{4.5c}$$

b) pentru cazul supersonic, $M_\infty > 1$

$$u = \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right) \frac{1}{2\pi} F_1 \tag{4.6a}$$

$$v = \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right)\frac{1}{2\pi}\frac{1}{a^2+m^2}\{-a\,[1+\beta^2(a^2+m^2)]F_2 - m(F_4+F_8)\} \tag{4.6b}$$

$$w = \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right)\frac{1}{2\pi}\frac{m}{a^2+m^2}\{[1+\beta^2(a^2+m^2)]F_2 - F_6 + F_5\} \tag{4.6c}$$

în care funcţiile F şi G sînt date în anexă.

O atenţie deosebită trebuie acordată cazului în care $a = 0$ care necesită un proces de trecere la limită în relaţiile (4.5) şi (4.6) precum şi în expresiile funcţiilor F şi G. Se obţine în final :

c) pentru cazul $M_\infty < 1$, $a = 0$

$$u = \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right)\frac{1}{4\pi}[G_1 - G_2] \tag{4.7a}$$

$$v = \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right)\frac{1}{4\pi}[\lambda G_3 - \lambda G_1 - G_{11} + zG_{12}] \tag{4.7b}$$

$$w = \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right)\frac{1}{4\pi}[\lambda G_5 - G_4 + yG_{11} - yG_{12}] \tag{4.7c}$$

d) pentru cazul $M_\infty > 1$, $a = 0$

$$u = \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right)\frac{1}{2\pi}F_1 \tag{4.8a}$$

$$v = \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right)\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{m}F_1 - zFg\right) \tag{4.8b}$$

$$w = \left(-\frac{\Delta p}{2q_\infty}\right)\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{m}(1+\beta^2m^2)F_2 - \frac{1}{m}F_3 - yFg\right] \tag{4.8c}$$

în care $G_1 \div G_6$ şi respectiv $F_1 \div F_3$ sînt date de expresiile din anexă în care se face $a = 0$

Trebuie făcută observaţia că în expresiile vitezelor de perturbaţie, atît pentru distribuţia de surse cît şi pentru cea de dublete de presiune au fost neglijaţi termenii care se vor anula prin procedeul de superpoziţie a celor patru regiuni triunghiulare semiinfinite (figura 1).

5. CALCULUL INTENSITĂŢILOR DISTRIBUŢIILOR DE SINGULARITĂŢI

Configuraţia de calcul este discretizată în panouri plane după cum s-a arătat în paragraful 2. Pentru simularea configuraţiei se utilizează :

— o distribuţie de surse pe panourile de pe fuselaj pentru simularea efectelor de grosime ale acestuia.

— o distribuție de surse în planul de referință al suprafețelor portante pentru simularea efectelor de grosime ale acestora.

— o distribuție de dublete de accelerație în planul de referință al suprafețelor portante pentru simularea efectelor de incidență și curbură.

— o distribuție de dublete de accelerație pe suprafața fuselajului pentru simularea efectelor de interferență cu suprafețele portante.

Pentru un panou se definește un punct în care se va impune condiția cinematică (1.3) numit punct de control sau colocație. Poziția acestui punct este determinantă în ceea ce privește acuratețea rezultatelor numerice și în general se stabilește pe baza unui experiment numeric. Pentru cazul metodei de față, poziția cea mai bună s-a găsit la 95% din coarda mediană a panoului.

Scriind condiția cinematică în punctele de colocare ale fiecărui panou și liniarizînd condițiile la limită prin decuplarea efectelor de grosime de cele de incidență se obțin sisteme liniare de ecuații ce permit determinarea intensităților singularităților. Odată determinate aceste intensități se pot calcula vitezele de perturbație pe fiecare panou și în final coeficienții de presiune.

Prin integrarea distribuției de presiuni se pot calcula coeficienții aerodinamici globali — de portanță, de moment și de rezistență indusă [4].

6. REZULTATE ȘI CONCLUZII

Pe baza metodei prezentate mai sus s-a alcătuit un program de calcul implementat pe microcalculatorul CORAL 4021, care a fost testat pe o serie de probleme pentru care au fost disponibile alte rezultate teoretice, numerice și experimentale.

În figurile 3, 4, 5, 7, 8 sînt prezentate o serie de rezultate comparativ cu datele de referință. Se constată o foarte bună concordanță atît pentru distribuțiile de presiuni cît și pentru coeficienții globali.

7. ANEXĂ

$$G_1 = \operatorname{arctg} \frac{|ax - z| \sqrt{(x + \beta^2 az)^2 + \beta^2 [y^2(1 + \beta^2 a^2) + (z - ax)^2}}{\lambda(z - ax)^2 + y[\lambda y(1 + \beta^2 a^2) - x - \beta^2 az]} \tag{7.1}$$

$$G_2 = \operatorname{arctg} \frac{|ax - z|}{(1 + \beta^2 a^2) y} \tag{7.2}$$

$$G_3 = \operatorname{arctg} \frac{|z - ax| \sqrt{\lambda^2 + \beta^2}}{x + \beta^2 az - \lambda y(1 + \beta^2 a^2)} \tag{7.3}$$

$$G_4 = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}} \times$$

$$\times \ln \frac{-\lambda(x + \beta^2 az) - \beta^2 y(1 + \beta^2 a^2) \sqrt{\lambda^2 + \beta^2} \sqrt{(x + \beta^2 az)^2 + \beta^2 [y^2(1 + \beta^2 a^2) + (z - ax)^2]}}{\beta \sqrt{[\lambda y(1 + \beta^2 a^2) - x - \beta^2 az]^2 + (\lambda^2 + \beta^2)(ax - z)^2}} \tag{7.4}$$

$$G_5 = \ln \frac{-x - \beta^2 az + \sqrt{(x + \beta^2 az)^2 + \beta^2[y^2(1 + \beta^2 a^2) + (ax - z)^2]}}{\beta\sqrt{y^2(1 + \beta^2 a^2) + (ax - z)^2}} \tag{7.5}$$

$$G_6 = \ln \sqrt{\frac{y^2(1 + \beta^2 a^2) + (ax - z)^2}{1 + \beta^2 a^2}} \tag{7.6}$$

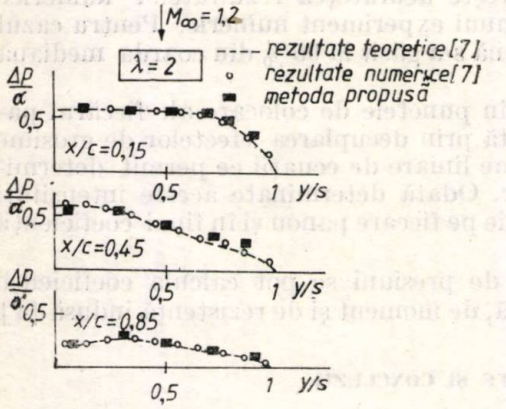


Fig. 3

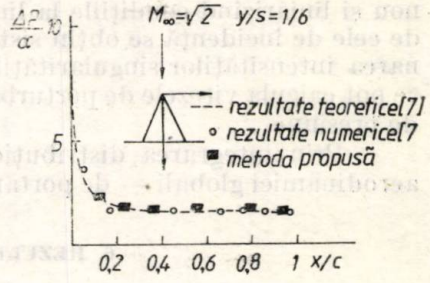


Fig. 4

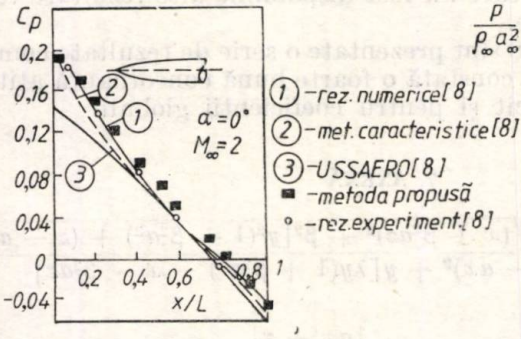


Fig. 5

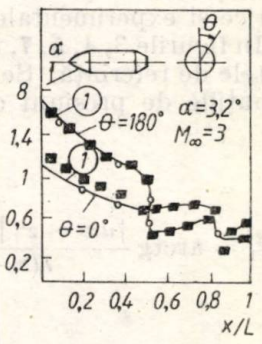


Fig. 6

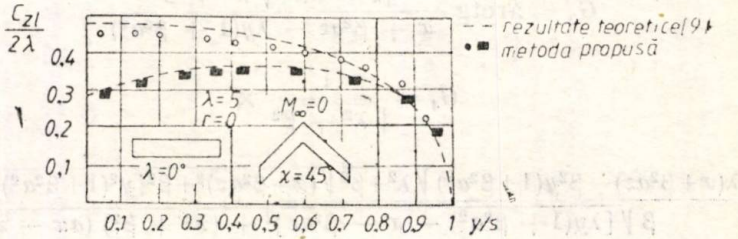


Fig. 7

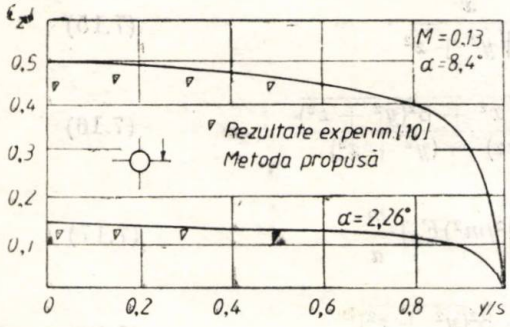


Fig. 8a

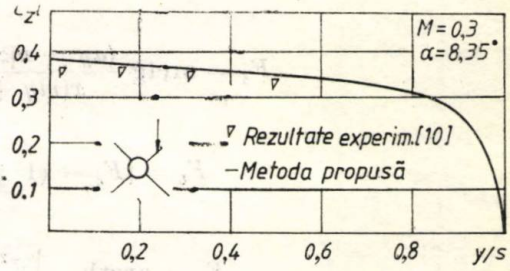


Fig. 8b

$$G_7 = \frac{1}{1+a^2\lambda^2}\operatorname{arctg}\frac{|z-a\lambda y|\sqrt{\lambda^2+\beta^2(1+a^2\lambda^2)}}{(1+a^2\lambda^2)x-\lambda(y+az\lambda)} \tag{7.7}$$

$$G_8 = \frac{1}{1+a^2\lambda^2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+\beta^2(y^2+z^2)}}{\beta\sqrt{y^2+z^2}} \tag{7.8}$$

$$G_9 = \frac{\blacksquare}{(1+a^2\lambda^2)\,[\lambda^2+\beta^2(1+a^2\lambda^2)]}\ \boxtimes$$

$$\times\ln\frac{\sqrt{1+a^2\lambda^2}\,[-\lambda x-\beta^2(y+a\lambda z)+\sqrt{[\lambda^2+\beta^2(1+a^2\lambda^2)][x^2+\beta^2(y^2+z^2)]}}{\sqrt{[\lambda^2+\beta^2(1+a^2\lambda^2)]\,(z-a\lambda y)^2+[x(1+a^2\lambda^2)-\lambda(y+a\lambda z)]^2}} \tag{7.9}$$

$$G_{10} = \frac{1}{1+a^2\lambda^2}\operatorname{arctg}\frac{(1+a^2\lambda^2)\,(z-a\lambda y)\sqrt{x^2+\beta^2(y^2+z^2)}}{(a\lambda y-z)[x(1+a^2\lambda^2-\lambda(y+za\lambda)]-\lambda(z-a\lambda y)^2} \tag{7.10}$$

$$G_{11} = \frac{zx}{y^2+z^2} \tag{7.11}$$

$$G_{12} = \frac{1}{y^2+z^2}\sqrt{x^2+\beta^2(y^2+z^2)} \tag{7.12}$$

$$F_1 = \operatorname{arctg}\frac{m|z-ax|\sqrt{x^2+\beta^2(y^2+z_2)}}{y[(y-mx)+\beta^2a(ay-mz)]+(z-ax)^2} \tag{7.13}$$

$$F_2 = \frac{1}{1+\beta^2(a^2+m^2)}\operatorname{argch}\frac{x+\beta^2(my+az)}{B\sqrt{(y-mx)^2+(z-ax)^2+\beta^2(ay-mz)^2}} \tag{7.14}$$

$$F_3 = \operatorname{argch} \frac{x}{B\sqrt{y^2 + z^2}} \tag{7.15}$$

$$F_4 = \operatorname{arctg} \frac{(ay - mz)\sqrt{x^2 + \beta^2(y^2 + z^2)}}{x(my + az) - (y^2 + z^2)} \tag{7.16}$$

$$F_5 = [F_4 - (1 + a^2/m^2)F_1]\frac{m}{a} \tag{7.17}$$

$$F_6 = \operatorname{argth} \frac{\sqrt{x^2 + \beta^2(y^2 + z^2)}}{x} \tag{7.18}$$

$$F_7 = \sqrt{1 + \beta^2 a^2}\ \operatorname{argth} \frac{\sqrt{(1 + \beta^2 a^2)\,[x^2 + \beta^2(y^2 + z^2)}}{x + \beta^2 az} \tag{7.19}$$

$$F_8 = [F_6 - (1 + a^2/m^2)F_7]\frac{m}{a} \tag{7.20}$$

$$F_9 = \frac{1}{y^2 + z^2}\sqrt{x^2 + \beta^2(y^2 + z^2)} \tag{7.21}$$

Primit în redacție la 18 septembrie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. E., CARAFOLI V. N. CONSTANTINESCU, *Dinamica fluidelor compresibile*, Edit. Academiei, București, 1984.
2. E. CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, *Dinamica fluidelor incompresibile*, Edit. Academiei, București, 1981.
3. M. A. HEASLET, H. LOMAX, *Teoria malih vazmuscenii pri sverhzvuhovih i transzvukovih skorostiah potoka*, Editor Sears WR, VIMO SSR, Moskva, 1962.
4. V. N. CONSTANTINESCU, S. DĂNĂILĂ, A. SÂRBU, *Simularea aproximativă a mișcării supersonice în jurul unui avion*, St. cerc. mec. apl., **43**, *2* (1984),
5. F. A. WOODWARD, *Analysis and design of wing body combinations at subsonic and supersonic speeds*, Journal of Aircraft, **5**, *12* (1968).
6. F. A. WOODWARD, E. N. TINOCO, J. W., LARSEN, *Analysis and design of supersonic wing -body combinations*, NASA CR 37106, Boeing D6—15044—1, 1967.
7. T. UEDA, E. E. DOWEL, *Doublet point method for supersonic unsteady lifting surface*, AIAA Journal, **22**, *2* (1984).
8. D. D. LIU, P. GARCIA-FOGEDA, P. C. CHEN, *Oscillating wings and bodies with flexure in supersonic flow*, Journ. of Aircraft, **25**, *6* (1988).
9. H. SCHICHTING, E. TRUKENBRODT, *Aerodynamik des Flugzeuges*, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
10. M. S. MILLER, J. E. BURJKALTER, *Wing-wing interference effects for cruciform missiles*, Journ. of Aircraft, **24**, *43* (1987).

GENERALIZAREA ȘI STUDIUL MODELULUI JUKOVSKI-ROSHKO-EPPLER ÎN CAZUL JETURILOR AXIAL SIMETRICE UTILIZÎND FUNCȚIILE – (P, Q) ANALITICE

de M. LUPU

Universitatea din Brașov

În lucrare este prezentat modelul matematic al mișcării fluidelor compresibile în cazul axial simetric sau plan. Utilizînd teoria funcțiilor – (P, Q) analitice și a transformărilor cvasiconforme pentru ecuațiile eliptice Beltrami, este redată o metodă de rezolvare a acestor probleme spațiale.

Problema „modelului $J - R - E$ în tunel" se rezolvă efectiv; asupra acestei probleme cercetători sovietici [26] sau americani [27] au obținut rezultate experimentale. Aici deja prezentăm soluții exacte obținute de noi încă din 1987 [25], iar în ultima parte se fac precizări asupra calculelor numerice pentru parametrii geometrici și aerodinamici ai mișcării.

1. INTRODUCERE

Considerăm mișcarea staționară, irotațională a unui fluid perfect barotrop în absența forțelor masice (ipoteza I_p).

Adoptînd aici legea isentropică

$$p = p^1 \left(\frac{\rho}{\rho^1} \right)^{\gamma} \tag{1}$$

unde p este presiunea, ρ densitatea fluidului iar p^1, ρ^1 sînt valorile lor caracteristice ce pot fi p_0, ρ_0 în punctul de viteză nulă, sau p°, ρ° calculate pe suprafața liberă a jetului unde viteza este V_0, γ fiind constanta adiabatică. În acest caz legea lui Bernoulli este

$$\frac{1}{2} V^2 + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = 0 \tag{2}$$

unde V este mărimea vitezei.

Din formula lui Hugoniot [1], [3], obținem viteza sunetului C și apoi C_0 corespunzătoare lui p_0, ρ_0

$$C^2 = (dp/d\rho) \tag{3}$$

Introducînd variabila lui Ciaplîghin

$$\tau = \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{V^2}{C_0^2} = \frac{V^2}{V_{max}^2} \; ; \; (V^2 \doteq 2\alpha\tau),$$

avem relaţiile

$$\rho = \rho_0(1-\tau)^{\beta},\ p = p_0(1-\tau)^{\beta+1},\ C^2 = C_0^2(1-\tau) \tag{4}$$

Vom considera sistemul de coordonate cilindrice $z = x + ir$ unde axa ox este axa de simetrie pentru domeniul de mişcare fizic, iar axa or este axa radială — care în cazul mişcărilor plane coincide cu axa oy ; atunci faţă de acest sistem avem relaţiile cunoscute [1], [6], [22]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho r^k u) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^k v) = 0\,;\ \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

ce reprezintă ecuaţia de continuitate şi respectiv rot $\bar{V} = 0$.

Observăm că pentru $k = 1$ mişcarea este axial simetrică iar pentru $k = 0$ mişcarea este plană şi în toate consideraţiile ce vor urma.

Introducînd potenţialul vitezelor $\varphi(x, r)$ şi funcţia de curent $\psi(x, r)$ obţinem din (5) sistemul

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = P\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad V = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -P\frac{\partial\psi}{\partial x}\quad P = r^k\frac{\rho}{\rho^1} \tag{6}$$

unde viteza $\bar{V}(u, v)$ şi $\theta = \arg(u + iv)$.

În acest caz potenţialul complex al mişcării $f(z) = \varphi(x, r) + i\psi(x, r)$ şi viteza complexă $W = u + iv = \overline{df/dz}$, iar debitul de fluid ce trece printre două suprafeţe de curent coaxiale este

$$\psi_2 - \psi_1 = \frac{q}{2^k\pi^k}\ ;\ k = 0,1 \tag{7}$$

Trecînd la planul hodografic (V, θ) ; $u = V\cdot\cos\theta$, $v = V\cdot\sin\theta$ unde $V = |w|$ sau planul (τ, θ) cu (3) avem din (6)

$$\frac{\partial\tau}{\partial\psi} = \frac{2\tau}{P}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\varphi};\ \frac{\partial\tau}{\partial\varphi} = -\frac{2\tau(1-\tau)P}{1-(2\beta+i)}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\psi} - \frac{k}{r}\cdot$$

$$\cdot\frac{(1-\tau)}{1-(2\beta+1)\tau}\cdot\frac{\sin\theta}{2\sqrt{2\alpha}}\ ;\ \beta = (\gamma-1)^{-1} \tag{8}$$

ce reprezintă sistemul fundamental al lui Ciaplîghin pentru cazul axial simetric în domeniul $D_W(\tau, \theta)$.

În cazul mişcărilor avînd pe suprafaţa liberă $(\rho^\circ, p^\circ, \tau_0)$ considerînd $\rho^1 = \rho^\circ$ obţinem $P^{-1} = \dfrac{\rho^1}{\rho r^k} = \dfrac{1}{r^k}\left(\dfrac{1-\tau_0}{1-\tau_0 V^2/V_0^2}\right)^{\beta}$

Sistemul fundamental pentru mişcarea plană se obţine luînd $k = 0$. [1], [4], [23].

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 2\tau(1-\tau)^{-\beta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\ ;\ \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = -\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{+1}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{9}$$

Dacă fluidul este incompresibil $C \to \infty$, $\beta \to 0$ obținem din (8)

$$\frac{\partial \tau}{\partial \psi} = \frac{2\tau}{r^k} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = -2\tau r^k \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \psi} - \frac{k}{r} \cdot \sqrt{\frac{2\tau}{\alpha}} \sin \theta. \tag{10}$$

Pentru rezolvarea problemelor plane, în cazul sistemului (9) se aplică cunoscuta metodă hodografică Ciaplîghin-Iacob-Falkovici (C—J—F) [1], [4], [23].

Datorită complexității sistemului (8) pentru rezolvare, vom apela la teoria funcțiilor (P, Q)-analitice; pentru aceasta alături de domeniile D_z, D_f, D_w, vom introduce un nou domeniu canonic D_ζ, $\zeta = \xi + i\eta$ pe care se vor reprezenta biunivoc primele trei.

Acest domeniu canonic de mișcare în D_ζ, poate fi semicerc sau semiplan; pentru această alegere la studiul mișcărilor plane incompresibile sînt cunoscute metodele Cisotti-Villat [1], respectiv metoda „Jukovski" [1], [4], [9].

Aici vom prefera semiplanul $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta \geqslant 0$ și introducînd funcția lui Jukovski ω, avem

$$\omega = \ln \frac{V_0}{V} + i\theta = \tau' + i\theta, \quad W = Ve^{i\theta}, \quad \overline{W} = V_0 e^{-\omega(\zeta)} \tag{11}$$

Fie în general $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, $z = x + iy$ — spunem că funcția F este — (P, Q) analitică de z, [7] dacă într-un domeniu D_z este satisfăcut sistemul de tip Beltrami.

$$PU_x + QU_y - V_y = 0; \quad -QU_x + PU_y + V_x = 0 \tag{12}$$

unde $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $P > 0$ iar U și V îndeplinesc condițiile de regularitate.

În cazul cînd $Q = 0$, $F(z)$ este P — analitică în D_z dacă [10], [7], [20], [13].

$$PU_x = V_y; \quad PU_y = -V_x \tag{13}$$

Observăm că sistemul (6) este de tip (13). În cazul sistemelor (12) eliptice cu $W(z) = PV + i(V - QU)$ acestea sînt echivalente cu ecuația sub formă complexă.

$$W_{\bar{z}} = AW_z + B\overline{W}_{\bar{z}} + C \tag{14}$$

pentru care în cazul problemelor la limită sînt cunoscute metode și teorii integro-diferențiale [1], [8], [12], iar transformările biunivoce realizate de funcțiile (P, Q) — analitice între domeniile D_z și D_F după cum se va vedea mai jos se vor numi cvasiconforme [7], [13], [17].

Considerăm în general sistemul de ecuații cvasiliniar

$$\begin{aligned} -\psi_y + a_{11}\varphi_x + a_{12}\varphi_y + a_0\varphi + b_0\psi &= h \\ \psi_x + a_{21}\varphi_x + a_{22}\varphi_y + c_0\varphi + d_0\psi &= 1 \end{aligned} \tag{15}$$

unde a_{ij}, a_0, b_0, c_0, d_0, h, l sînt funcţii mărginite şi măsurabile de $(x, y$ $\varphi, \psi)$, atunci soluţia acestui sistem $f = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ unde f este un, homeomorfism între $(x, y) \leftrightarrow (\varphi, \psi)$ realizează o transformare cvasiconformă sau este o transformare q-cvasiconformă dacă verifică condiţia diferenţială [9], [13], [17].

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \psi_x^2 + \psi_y^2 \leqslant \left(q + \frac{1}{q}\right)(\varphi_x \cdot \psi_y - \varphi_y \cdot \psi_x) \tag{16}$$

Din punct de vedere geometric acesta transformă biunivoc cercuri (pătrate) infinitesimale în elipse (dreptunghiuri) infinitesimale [12], [17], [9].

În cazul ecuaţiei fundamentale a aerodinamicii cu derivate parţiale de ordin II, familiile de unde caracteristice corespunzătoare sînt de tip Beltrami

$$\begin{aligned} g \cdot \varphi_x &= -g_{12} \cdot \psi_x + g_{11} \cdot \psi_y \\ g \cdot \varphi_y &= -g_{22} \cdot \psi_x + g_{12} \cdot \psi_y \end{aligned} \quad ; \quad g^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0 \tag{15'}$$

unde g este discriminantul ecuaţiei ce coincide cu jacobianul transformării $(x, y) \leftrightarrow (\varphi, \psi)$.

Observăm şi reciproc, că prin eliminare din (15') obţinem ecuaţia fundamentală $\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \cdot \varphi_{xx} - 2\frac{uv}{c^2} \cdot \varphi_{xy} + \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \cdot \varphi_{yy} = 0$

Aceasta fiind ideea, Bers [10] studiază mişcările subsonice utilizînd funcţiile analitice generalizate — pseudoanalitice.

Condiţia (16) devine în acest caz

$$g_{11} + g_{22} \leqslant 2qg \tag{16'}$$

ce defineşte pe f — q cvasiconformă de $z = x + iy$.

Prin această transformare unghiul măsurat în planul (x, y) sau pe o suprafaţă curbată $z(x, y)$ se face prin metrica riemanniană ataşată $(c^2 - u^2)dy^2 + 2uv\, dxdy + (c^2 - v^2)dx^2$ şi pentru conformitate unghiul corespunzător în (φ, ψ) se măsoară cu metrica euclidiană $dx^2 + dy^2 + d\varphi^2$ unde ecuaţia fundamentală este deci ecuaţia suprafeţelor minimale a lui Ciaplîghin [10].

Considerînd în modul, raportul $R(M)$ între semiaxele elipselor infinitesimale (sau dimensiunile dreptunghiurilor) depinzînd de punctul M, atunci gradul de analicitate pentru transformarea $f = f(z)$ se poate caracteriza prin delimitarea $0 < \frac{1}{q} \leqslant R(M) \leqslant q < \infty$; $q \geqslant 1$ $\left(\text{aici } R = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\right)$ şi în acest caz f realizează o transformare q — cvasiconformă.

În toate relaţiile anterioare, pentru $q = 1$ transformarea devine conformă (cercurile se transformă în cercuri), fiind în cazul incompresibil.

Sistemul general (15) se scrie sub forma complexă de $(z, \bar{z})$ [13], [8].

$$f + \mu_1 \cdot f + \mu_2 \cdot \bar{f}_{\bar{z}} + Af + B\bar{f} = F \tag{17}$$

unde coeficienţii şi F sînt funcţii analitice şi măsurabile de $z, \bar{z}, f, \bar{f}$ şi în acest caz soluţia f a acestei ecuaţii sau pentru ecuaţia (15) este analitică generalizată iar condiţia de q — cvasiconformitate (16) devine

$$|f_{\bar{z}}| \leqslant \frac{q-1}{q+1} \cdot |f_z| \tag{18}$$

Rezultatul important semnalat în teoriile generale este următorul: clasa reprezentărilor q — cvasiconforme generale f, coincide şi cu clasa funcţiilor P sau (P, Q) — analitice corespunzătoare sistemului (12) sau (14), ce aici devine (15′) şi în particular (6), [18].

Aceste modalităţi de a defini transformările cvasiconforme şi deci funcţiile analitice generalizate după cum se ştie au la bază noţiunea topologică de transformare interioară introdusă de *S.* Stoilow [16], [18] încă din anul 1927. Din cadrul transformărilor interioare ce au un caracter mai larg fac parte homeomorfismele şi funcţiile analitice generalizate, iar importanţa acestei descoperiri a lui Stoilow este recunoscută ca fiind fundamentală.

Astfel, dacă hidrodinamica a influenţat crearea funcţiilor analitice, imediat chiar în primele decenii ale secolului nostru s-a impus studierea compresibilităţii în cazul dinamicii fluidelor la mari viteze, remarcîndu-se dintre cercetători S. A. Ciaplîghin [3] şi C. Iacob [1], apoi în studiul mişcărilor fluide sau a deformărilor axial-simetrice a solidelor — şi în acest caz trebuiau utilizate funcţiile analitice generalizate sau transformările cvasiconforme ce păstrează proprietăţile topologice.

În acest context vom semnala cîteva din modurile de abordare a sistemelor Beltrami (15), (15′) (17) sau (12), (14) în raport cu funcţiile analitice generalizate echivalente cu transformările cvasiconforme.

a) Rezolvarea directă a problemelor la limită pentru aceste sisteme utilizînd teoria funcţională a operatorilor integro-diferenţiali prin rezultatele obţinute de Vekua [8], Mushelişvili [8], Bers [10], Iacob [1], Monahov [10] etc.

b) Utilizarea funcţiilor P, (P, Q) — analitice ca transformări cvasiconforme generale ataşate acestor sisteme — se remarcă prin lucrările lui Bers [10], Lavrentiev [12], Şabat [12], [13], Poloji [7], Hamidov [9] etc. Remarcăm în această idee pe continuatorii şcolii lui Stoilow, prin rezultatele obţinute de Cabiria Andreian-Cazacu [17], [18], P. Caraman [18] şi elevilor lor. Omagiem aici pe regretatul nostru coleg dr. Dumitru Ivaşcu (1944—1985) pentru studiile deosebite asupra coeficienţilor ecuaţiilor Beltrami în sensul structural al grupurilor lui Klein [19], [18].

c) O altă cale este cea fundamentată de N. Teodorescu încă din 1931, care considerînd derivata areolară a lui D. Pompeiu şi generalizînd-o ca un operator funcţional, obţine prin aceasta soluţii fundamentale, pentru ecuaţiile de tip Beltrami ale fluidelor compresibile [11].

Fie deci funcţia $f(z) = \varphi + i\psi$, $z = x + ir$. Operatorul P — derivată a lui f în raport cu z are forma [7]

$$\frac{d_p f(z)}{dz} = \frac{P \cdot \varphi_x + \psi_r}{2} + i\frac{\psi_x - P \cdot \varphi_r}{2} \tag{19}$$

Operatorul (P, Q) — derivata funcţiei f în raport cu z are forma

$$\frac{d_{(P,Q)} f(z)}{dz} = \frac{P \cdot \psi_x - Q \cdot \varphi_r + \psi_r}{2} + i\frac{\psi_x - Q\varphi_x - P \cdot \psi_r}{2} \tag{20}$$

Condiţia necesară şi suficientă ca $f(z)$ să fie P — analitică, ((P, Q) — — analitică) în D_z este ca

$$\frac{d_p f}{d\bar{z}} = 0\,; \quad \left(\frac{d_{(P,Q)} f}{d\bar{z}} = 0\right) \tag{21}$$

De asemeni, se pot defini operatorii P — integrală sau (P, Q) — integrală de z [7], [13]; condiţia ca acest operator integrală să nu depindă de drum este dată de (12) şi avem formula

$$\int_{z_0}^{z} \frac{d_{(P,Q)} f}{dz} \cdot d_{(P,Q)} z = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \frac{1}{P}\frac{d_{(P,Q)} f}{dz}\, dz + i\,\mathrm{Im}\int_{z_0}^{z} \frac{\bar{\sigma}}{P}\frac{d_{(P,Q)} f}{dz}.$$

$$d_{(P,Q)} z = f(z) - f(z_0),\ \sigma = P + iQ \tag{22}$$

Punem în evidenţă o serie de teoreme ce se pot verifica direct cu ajutorul funcţiilor analitice generalizate în cazul ipotezei (I_p), observînd cu (6), (13) că $f(z)$ este P — analitică de z [9].

$\mathbf{T_1}$. *În cazul* (I_p) *viteza* $W(z)$ *este analitică generalizată de* z *verificînd deci* (12) *sau* (14).

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = -\frac{1}{2P} \cdot \frac{d\bar{w}}{dz} - \frac{1}{2P} \cdot \frac{d\bar{w}}{dz},\ P = r^k \frac{\rho}{\rho^1}, \tag{23}$$

Soluţia ecuaţiei (23) *realizează deci transformarea cvasiconformă între* $D_z \leftrightarrow D_w$.

$\mathbf{T_2}$. *În cazul* (I_p) *funcţia* (11) $\omega(f)$ *este analitică generalizată în* D_f *verificînd ecuaţia de tip* (12) *sau* (14).

$$\omega_{,\bar{f}} - q_1\,\omega_{,f} - q_2\,\bar{\omega}_{,\bar{f}} = F \tag{24}$$

unde

$$q_1 = \frac{P^2 + D - 1}{N},\ q_2 = \frac{PD}{N},\ N = (P + 1)(P - D + 1)$$

$$F = \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \varphi},\ D = \frac{2\beta V^2}{V_{max}^2 - V^2}$$

T_3. *În cazul (I_p) dacă există o transformare conformă analitică între $D_f \leftrightarrow D_\zeta$(canonic), atunci funcția ce reprezintă $D_z \leftrightarrow D_\zeta$ adică $z = z(\zeta)$ este $(P'; Q')$ — analitică de ζ și deci verifică ecuațiile Beltrami*

$$r_\xi = -P'x_\eta - Q'x_\xi,\ r_\eta = P'x_\xi - Q'x_\eta,$$

$$P' = \frac{PV^2}{P^2u^2 + v^2},\quad Q' = \frac{(1-P^2)uv}{P^2u^2 + v^2}$$

sau

$$z_{,\bar\zeta} - \frac{1-\bar\sigma}{1+\bar\sigma}\cdot z_{\bar\zeta} = 0$$

T_4. *În ipoteza din (T_3) rezultă că $\omega = \omega(\zeta)$ este analitică generalizată în D_ζ*

$$\omega_{,\bar\zeta} - q_1^*\omega_{,\zeta} - q_2^*\bar\omega_{,\bar\zeta} = F^* \text{ unde}$$

$$q_1^* = \frac{(\varphi_\xi - i\varphi_\eta)(P^2 + D - 1)}{(\varphi_\xi + i\varphi_\eta)N^*},\ q_2^* = \frac{DP}{N^*},\ N^* = (P+1)(P+D^*)$$

$$F^* = \frac{kv}{V^2}(\varphi_\xi^2 + \varphi_\eta^2);\ D^* = \frac{1-M}{1 - \dfrac{M^2}{2\beta+1}},\ D = 1 - D^*,\ M \text{ numărul Mach}$$

Observația 1. a) Dacă mișcarea este plană $k = 0$ și fluidul incompresibil $q_1^* = q_2^* = F^* \equiv 0$ și (27) devine $\omega_{,\bar\zeta} \equiv 0$ fiind în cazul metodei Cisotti — Villat.

b) În cazul axial simetric incompresibil, $q_1^* \equiv 0$ în (27).

c) În cazul plan și compresibil $k = 0$ și $F^* = 0$ în (27).

Fiind în cazul ipotezelor date (T_3, T_4) formula de trecere de la $f \leftrightarrow z$, $d\varphi + \frac{i}{p}d\psi = P\cdot\bar w(dx + i dr)$ devine

$$x_\xi = (Pu\varphi_\xi + v\cdot\varphi_\eta)P^{-2}V^{-2}\quad x_\eta = (P\varphi_\eta u + v\varphi_\xi)P^{-2}V^{-2} \tag{28}$$

$$r_\xi = (Pv\varphi_\xi - u\cdot\varphi_\eta)P^{-2}V^{-2}\quad r_\eta = (P\varphi_\eta v + u\varphi_\xi)P^{-2}V^{-2}$$

Observația 2. Pentru determinarea soluțiilor în teoremele ($T_1 - T_2$), la rezolvarea ecuațiilor (23), (24), (26), (27), se aplică așa cum am spus metode funcționale sau numerice aproximative pentru operatorii integro-diferențiali. Există însă exemple de mișcări în care pentru $\eta \to 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \Rightarrow 0$ și atunci sistemul (28) se integrează direct pe axa $\eta = 0$ utilizînd operatorul (P, Q) — integrală (22).

În acest caz cu (22) din (28) obținem [7], [13], după o serie de calcule (29).

$$z(\xi, \eta) - z(\xi_0, \eta_0)_\zeta = \mathrm{Re}\left[\int_{\zeta_0}^{\zeta}(x_\xi\,\mathrm{d}\xi + x_\eta\,\mathrm{d}\eta) + \mathrm{i}\int_{\zeta_0}^{\zeta}(x_\xi\,\mathrm{d}\eta - x_\eta\,\mathrm{d}\xi)\right] +$$

$$+ \mathrm{iIm}\left[\int_{\zeta_0}^{\zeta}(r_\eta\,\mathrm{d}\xi - r_\xi\,\mathrm{d}\eta) + \mathrm{i}\int_{\zeta_0}^{\zeta}(r_\xi\,\mathrm{d}\xi + r_\eta\,\mathrm{d}\eta)\right] \qquad (22')$$

de unde cu $\eta \to 0$ avem

$$x(\xi, \eta) = x(\xi_0, 0) + \int_{\xi_0}^{\zeta} x_\xi\,\mathrm{d}\xi,\ r(\xi, 0) = r(\xi_0, 0) + \int_{\xi_0}^{\zeta} r_\xi\,\mathrm{d}\xi \qquad (22')$$

iar din (28) rezultă în final

$$x(\xi, 0) = x(\xi_0, 0) + \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{u}{V^2}\frac{\varphi_\xi}{P}\,\mathrm{d}\xi\,;\ r(\xi, 0) = r(\xi_0, 0) + \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{v}{V^2}\frac{\varphi_\xi}{P}\,\mathrm{d}\xi. \qquad (29)$$

2. MODELUL JUKOVSKI-ROSHKO-EPPLER IN TUNEL (J.R.E.)

Considerăm deci mișcarea axial simetrică, irotațională a unui jet printr-un tunel cilindric ($ABA'B'$) cu secțiunea axială xor (fig. 1)

Fie V_1 viteza în amonte și V_2 viteza în aval, iar pe suprafața liberă ($EDE'D'$) viteza V_0; fluidul în mișcare întîlnește conul (EOE'), iar suprafața liberă ce se desprinde (ED) se racordează la cilindrul solid ($DCD'C'$) În cazul plan se obține „modelul J — R — E în canal" studiat de Simona Popp [5], [4] prin metoda (C — J — F).

Așa cum am spus în § 1 transformăm cvasiconform sau conform domeniile D_z, D_f, D_ω de mișcare în domeniul canonic-semiplanul superior D_ξ și în acest mod se pot obține parametrii geometrici și aerodinamici ai mișcării în funcție de parametrul ζ — (utilizînd teoria de la § 1).

Transformăm domeniul de mișcare $0 \leqslant \psi \leqslant Q$, $-\infty < \varphi < \infty$ din D_f, $f = \varphi + \mathrm{i}\psi$ conform pe semiplanul $\eta \geqslant 0$, $\xi \in (-\infty, \infty)$ din D_ξ, aici Q fiind debitul de fluid.

Se determină deci funcția analitică $f = f(\zeta)$ în D_ξ, $\eta \geqslant 0$ cunoscînd valorile părții imaginare ψ pe frontieră cu următoarea corespondență :

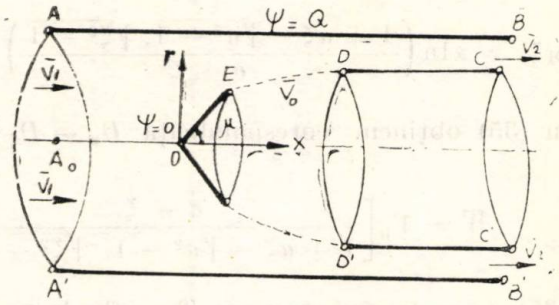
$$\psi_{|\eta=0} = \begin{cases} 0,\ \xi \in (-,\ -\mathrm{a})\ (A_0\,0) \\ 0,\ \xi \in (-a,\ -1)\ (OE) \\ 0,\ \xi \in (-1,\ \ 1)\ (ED) \end{cases} \qquad \psi_{|\eta=0} = \begin{cases} 0,\ \xi \in (1, b)\ (DC) \\ Q = \dfrac{q}{z^k \pi^k}, \quad \xi \in (b, \infty) \\ a,\ b,\ \geqslant 1. \end{cases} \qquad (AB)$$

(30)

Soluția acestei probleme Dirichlet pentru semiplan cu (30) se determină fie direct cu formula lui Cisotti [2], [21] sau utilizînd metoda punctelor singulare a lui Ciaplîghin [9].

$$f(\zeta) = -\frac{q}{2^k\pi^{k+1}} \cdot \ln(\zeta - b) + i\frac{q}{2^k\pi^k} \tag{31}$$

Fig. 1



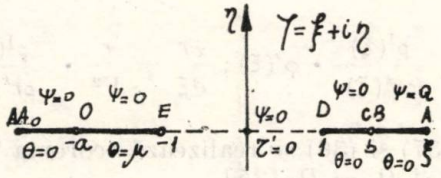


Fig. 2

Observăm că pentru $\eta \to 0$ avem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -\frac{q}{2^k\pi^{k+1}} \cdot \frac{1}{\xi - b}\ ;\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \Rightarrow 0 \tag{32}$$

Transformăm domeniul de mișcare din D_ω, biunivoc pe domeniul canonic D_ζ și conform teoremei T_4 obținem $\omega = \omega(\zeta)$ analitică generalizată în D_ζ.

Astfel cu $\omega = \ln\frac{V_0}{V} + i\theta = \tau' + i\theta$ cunoaștem valorile lui $\omega = \omega(\zeta)$ cu următoarea corespondență din (30):

$(A_0O)\ \theta = 0$; $(OE)\ \theta = \alpha\pi = \mu$; $(ED)\ \tau' = 0$;

$(DC)\theta = 0$; $(AB)\theta = 0$

Considerăm funcția ajutătoare $S(\zeta) = R + iT = -i\omega(\zeta)$. Din (33) avem pentru $S(\zeta)$ pe frontiera $\eta = 0$ valorile:

$$\operatorname{Re} S = R(\xi) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi < -a \\ \mu, & -a < \xi < -1 \end{cases} \qquad \operatorname{Re} S = R(\xi) = 0,\ \xi > 1$$

$$\operatorname{Im} S = T(\xi) = 0, -1 < \xi < 1 \tag{34}$$

Funcţia analitică $S = S(\zeta)$ în semiplan cu valorile (34) se rezolvă o problemă de tip Volterra, se determină aplicînd formula lui Signorini [2], [21] generalizată de C. Iacob [1] şi obţinem

$$S(\zeta) = -i\omega(\zeta) = \frac{i}{\pi}\sqrt{\zeta^2-1}\int_{-\infty}^{-1}\frac{(-1)\,\mu\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\,(\xi-\zeta)} \text{ sau}$$

$$\omega(\zeta) = \alpha \ln\left(\frac{1+a\zeta-\sqrt{a^2-1}.\sqrt{\zeta^2-1}}{a+\zeta}\right);\ \mu = \alpha\pi \tag{35}$$

cu (11) din (35) obţinem corespondenţa $D_w \leftrightarrow D_\zeta$ care dă distribuţia vitezelor

$$\overline{W} = V_0\left[\frac{a+\zeta}{1+a\zeta-\sqrt{a^2-1}.\sqrt{\zeta^2-1}}\right]^\alpha \tag{36}$$

Cu (31) şi (35) se realizează teorema T_2; aflîndu-ne în ipoteza T_3, formulele de trecere $z = z(\zeta)$ (29) devin aici

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{u}{V^2}\cdot\frac{\rho^1(\xi)}{\rho r^k(\xi)}\cdot\varphi'(\xi);\ \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{v}{V^2}\cdot\frac{\rho^1(\xi)}{\rho r^k(\xi)} \tag{37}$$

În acest mod cu (37) şi (36) se realizează teorema T_1 ce determină corespondenţa $D_w \leftrightarrow D_z$ şi $D_f \leftrightarrow D_z$ [25]

Distribuţia vitezelor, presiunilor şi densităţilor pe frontiera ∂D_ζ, $\eta = 0$ cu (4) şi (36) se obţine :

$$-(A_0\,0):\ -\infty < \xi < -a,\ \eta = 0;\ u = V_0 f_1(\xi),\ v = 0;$$

$$p = p_0[1-\tau_0 f_1^2]^{\beta+1}$$

$$\rho = \rho_0[1-\tau_0 f_1^2]^\beta;\ f_1 = \left[\frac{|a+\xi|}{a\xi+1-\sqrt{a^2-1}\cdot\sqrt{\xi^2-1}}\right]^\alpha$$

$$-(OE):\ -a < \xi < -1,\ \eta = 0;\ u = V_0 f_2\cdot\cos\mu,\ v = V_0 f_2\cdot\sin\mu$$

$$p = p_0[1-\tau_0 f_2^2]^{\beta-1},\ \rho = \rho_0[1-\tau_0 f_2^2]^\beta,$$

$$f_2 = \left[\frac{a+\xi}{\sqrt{a^2-1}.\sqrt{\xi^2-1}-1-a\xi}\right]^\alpha$$

$$-(ED):\ -1 < \xi < 1,\ \eta = 0:\ u = V_0\cos f_3,\ v = V_0\sin f_3$$

$$p = p_0(1-\tau_0)^{\beta+1},\ \rho = \rho^0 = \rho_0(1-\tau_0)^\beta;\ f_3 = \alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{a^2-1}\cdot\sqrt{\xi^2-1}}{a+\xi}$$

$-(DC): 1<\xi<b,\ \eta = 0: u = V_0 \cdot f_4,\ v = 0,\ p = p_0[1 - \tau_0 f_4^2]^{\beta+1}$

$$\rho = \rho_0[1 - \tau_0 f_4^2]^{\beta},\ f_4 = \left[\frac{a + \xi}{1 + a\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\cdot\sqrt{a^2 - 1}}\right]^{\alpha}$$

$-(AB): \xi > b,\ \eta = 0$: la fel ca pe (DC)

Utilizînd această distribuție pentru viteze și densitate, scrise mai sus, vom integra (37) și aflăm ecuațiile parametrice ale frontierelor ; în calcule ne interesează mai mult ecuațiile conului (OE) și a liniilor libere (ED).

Pe (OE) relațiile (37) devin

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{-q}{2^k\pi^{k+1}} \cdot \frac{1}{\xi - b}\left[\frac{1 - \tau_0}{1 - \tau_0 f_2^2}\right]^{\beta} \cdot \frac{\cos\mu}{V_0 f_2(\xi) r^k(\xi)} \tag{38}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{-q}{2^k\pi^{k+1}} \cdot \frac{1}{\xi - b}\left[\frac{1 - \tau_0}{1 - \tau_0 f_2^2}\right]^{\beta} \cdot \frac{\sin\mu}{V_0 f_2(\xi) r^k(\xi)} \tag{38'}$$

Integrăm a 2-a relație și avem

$$\frac{r^{k+1}}{k+1} = -\frac{q\sin\mu\cdot(1 - \tau_0)^{\beta}}{2^k\pi^{k+1}V_0} \cdot \int_{-a} \frac{d\xi}{f_2(\xi)(\xi - b)(1 - \tau_0 f_2^2)^{\beta}} =$$

$$= \frac{q\sin\mu(1 - \tau_0)^{\beta}}{2^k\pi^{k+1}V_0} \cdot I(\xi) \tag{39}$$

$$r(\xi) = \left[\frac{q(k+1)\sin\mu(1 - \tau_0)^{\beta}}{2^k\pi^{k+1}}\right]^{\frac{1}{k+1}} \cdot I(\xi)^{\frac{1}{k+1}} \tag{39'}$$

și apoi

$$x(\xi) = \frac{q(1 - \tau_0)^{\beta}\cos\mu}{2^k\pi^{k+1}V_0}\int_{-a}^{\xi} \frac{d\xi}{(b - \xi)f_2\cdot(1 - \tau_0 f_2^2)r^k},\quad \xi \in (-a, -1) \tag{40}$$

Analog pentru linia liberă (ED) avem cu $(OE) = l$ ecuațiile :

$$r(\xi) = l\left[\sin_{\mu}^{k+1} + \frac{(k+1)q^k}{2^k\pi^{k+1}1^k V_0} \cdot \frac{\rho^{\circ}}{\rho_0}\int_{-1}^{\xi} \frac{\sin f_3(\xi)}{b - \xi}\,d\xi\right]^{\frac{1}{k+1}} = lg(\xi) \tag{41}$$

$$x(\xi) = l\cos\mu + \frac{q^k}{2^k\pi^{k+1}1^k V_0}\frac{\rho^0}{\rho_0}\int_{-1}^{\xi} \frac{\cos f_3(\xi)}{r^k(b - \xi)}\,d\xi, \tag{42}$$

Deducem parametrii geometrici, vitezele și condițiile de racordare. Astfel, lungimea generatoarei $OE = 1$ din (39′) $r_E(\xi = -1) = l \sin\mu$ se află cu

$$l^{k+1} \sin^{k+1} = \frac{q(k+1) \sin\mu \cdot (1 - \tau_0)^{\alpha}}{2^{k\ k+1} V_0 \cdot I(-1)} \tag{43}$$

Calculînd viteza în A, $\xi \to -\infty$, $\eta = 0$ din (36) avem $V_A = V_1 = V_0(a + \sqrt{a^2 - 1})^{\alpha}$; dacă în continuare aplicăm legea conservării masei prin calculul debitului în amonte și aval avem $V_A \cdot \rho_A \cdot H^{k+1} = V_B \cdot \rho_B h^{k+1}$, unde $A_0A = H$, $r_c = r_0 = H - h$, $BC = h$.

Calculăm viteza în (B, C) cu (36), (37) luînd $\xi \to b$, $\eta = 0$ și avem

$$V_2 = V_0 \left(\frac{a + b}{1 + ab - \sqrt{a^2 - 1} \cdot \sqrt{b^2 - 1}} \right)^{\alpha}.$$

Din V_1, V_2 cu notațiile $V_i/V_0 = t_i$, $t_i^{1/\alpha} = s_i \cdot i = 1, 2$ obținem

$$a = \frac{1}{2}(s_1 + s_1^{-1}),\ b = \frac{1 - \dfrac{(s_1 + s_2^{-1})}{2} \dfrac{(s_2 + s_1^{-})}{2}}{\dfrac{(s_2 + s_2^{-1})}{2} - \dfrac{(s_1 + s_1^{-1})}{2}} \tag{44}$$

De asemeni, cu observația anterioară asupra debitului și evaluarea lui ρ_A, ρ_B de mai sus

$$h/H = \left[\frac{1 + ab - a^2 - 1\ b^2 - 1}{(a + b)(a + a^2 - 1)} \right]^{\frac{\alpha}{k+1}} \cdot \left[\frac{1 - \tau_0 f_2(a)}{1 - \tau_0 f_4(b)} \right]^{\frac{\beta}{k+1}} \tag{45}$$

Dacă luăm $x(D) = d$, $r(D) = H - h = h_0$ pentru $\xi = -1$ din (41) și (42) obținem condițiile de racordare

$$\begin{aligned} d &= l\cos\mu + \frac{q^k}{2^k \pi^{k+1}} \cdot \frac{\rho^1}{V_0 \rho_0} \cdot K(1) \\ H - h &= lg(l) = l\left[\sin_{\mu}^{k+1} + \frac{(k+1)\, q^k}{2^k \pi^{k+1}\ 1^k V_0} \cdot J(1) \right]^{1/k+1} \end{aligned} \tag{46}$$

unde J și K sînt integralele din (41) respectiv (42).

Din relațiile de mai sus se pot determina $d, H - h, l$ în funcție de a, b, μ sau vitezele caracteristice și invers.

3. CALCULUL REZULTANTEI PRESIUNILOR ȘI A COEFICIENTULUI DE REZISTENȚĂ

Presiunea (rezistența aerodinamică) pe con ($k=1$) sau pe placă ($k = 0$) este :

$$P = (2\pi)^k \cdot \int_{r(-a)}^{r(-1)} (p - p^0)\, r^k dr \tag{47}$$

unde $p = p_0[1 - \tau_0 f_2^2]^{\beta+1}$ iar p^0 este presiunea obstacolului în zona de repaus $p^0 = p_0(1 - \tau_0)^{\beta+1}$. În continuare cu (38) și (39) pentru $dr = \dfrac{\partial r}{\partial \xi}\, d\xi$ (47) devine

$$P = \frac{p_0 q \sin\mu}{\pi V_0}(1 - \tau_0)^{\beta} \cdot \int_{-a}^{-1} \frac{(1 - \tau_0 f_2^2)^{\beta+1} - (1 - \tau_0)^{\beta+1}}{(b - \xi)(1 - \tau_0 f_2^2)^{\beta} \cdot f_2(\xi)}\, d\xi \tag{48}$$

sau cu (43) avem

$$P = \frac{(2\pi)^k p_0(\beta + 1)\, l^{k+1} \sin_\mu^{k+1}}{I(-1)} \cdot \int_{-a}^{-1} \frac{(1 - \tau_0 f_2^2)^{\beta+1} - (1 - \tau_0)^{\beta+1}}{(b - \xi)(1 - \tau_0 f_2^2) f_2}\, d\xi \tag{48'}$$

Pentru calcule numerice trecem la o nouă variabilă t; astfel din distribuția vitezei pe con avem :

$$f_2 = t = \frac{V}{V_0} = \left[\frac{a + \xi}{\sqrt{a^2 - 1} \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} - a\,\xi} \right]^{\alpha} \leqslant 1 \tag{49}$$

$$\xi = -\frac{2 + a(t^{1/\alpha} + t^{-1/\alpha})}{2a + (t^{1/\alpha} + t^{-1/\alpha})}\,;\quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{\alpha t} \cdot \frac{2(a^2 - 1)(t^{1/\alpha} - t^{-1/\alpha})}{2a + (t^{1/\alpha} + t^{-1/\alpha})} > 0$$

$$b - \xi = \frac{(a + b)(t^{1/\alpha} + t^{-1/\alpha}) + 2(1 + ab)}{2a + (t^{1/\alpha} + t^{-1/\alpha})} > 0$$

Din (39) și (43) avem $r(\xi) = [1^{k+1} \sin_\mu^{k+1} V_0]^{1/k+1} \cdot \left[\dfrac{I(\xi)}{I(-1)} \right]^{1/k+1}$

unde

$$I(\xi) = I(t) = \int_0^t \frac{1}{t(b - \xi)(1 - \tau_0 t^2)^{\beta}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}\, dt$$

și se poate obține distribuția vitezei pe con funcție de r, $t = t(r)$ $r \in [0, l \sin\mu]$

Ținînd cont că $0 < \tau_0 < \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = 1/6 < 0{,}17$ (pentru aer) și $t < 1$ pentru calculul integralei (48′) în raport cu t avem dezvoltînd binomial

$$(1 - \tau_0 t^2)^{\beta+1} - (1 - \tau_0)^{\beta+1} = (\beta + 1)\tau_0(1 - t^2)\left[1 - \frac{\beta}{2!}\right](1 + t^2)\tau_0 +$$

$$+ \frac{\beta(\beta - 1)}{3!}(1 + t^2 + t^4)\tau_0^2 + \ldots = (\beta + 1)\tau_0 f_0(t, \tau_0, \beta) \qquad (50)$$

iar (48)′ devine

$$P = (2\pi)^k \, p_0(\beta + 1)\tau_0 \cdot 1^{k+1} \sin^{k+1} \mu \cdot \frac{I_2}{I_1} \qquad (51)$$

unde

$$I_1 = I(-1) =$$

$$= \int_0^1 \frac{2(a^2 - 1)}{(a + b)} \cdot \frac{(t^{1/\alpha} - t^{-1/\alpha})\,(1 - \tau_0 t^2)^{-\beta}\,dt}{t^2[2a + (t^{1/\alpha} + t^{-1/\alpha})] \cdot \left[2\dfrac{1 + ab}{a + b} + (t^{1/\alpha} + t^{-1/\alpha})\right.} =$$

$$= \int_0^1 L(t,\ a,\ b,\ \beta,\ \alpha,\ \tau_0)\ dt$$

$$I_2 = \int_0^1 f_0(t,\ \tau_0,\ \beta) \cdot L(t,\ a,\ b,\ \beta\ \ \alpha,\ \tau_0)\ dt \qquad (52)$$

Pentru exemple numerice efective luînd $\mu = 30°,\ 45°,\ 60°.\ 75°,\ 90°$ avem $\alpha = \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{12}, \dfrac{1}{2}$ iar calculul integralelor I_1, I_2 se va face dezvoltînd binomial factorii integranților, integrînd apoi termen cu termen.

Vom exemplifica calculul pentru acest model în cazul discului luînd $\mu = 90°$ și deci $\alpha = \dfrac{1}{2}$ iar din (51) și (52) avem

$$P^0 = (2\pi)^k \ p_0(\beta + 1)\ \tau_0 1^{k+1}\ I_2^0/I_1^0 \qquad (53)$$

unde

$$I_1^0 = \int_0^1 \frac{(t^4 - 1)\,(1 - \tau_0 t^2)^{-\beta}\ dt}{(1 + 2At^2 + t^4)\,(1 + 2Bt^2 + t^4)} = \int_0^1 L^0\,dt,$$

$$I_2^0 = \int_0^1 f_0(t,\ \tau_0,\ \beta).\ L^0\ dt.$$

Aici s-a notat

$$a = A = \frac{1}{2}\left(t_1^2 + \frac{1}{t_1^2}\right); \frac{1+ab}{a+b} = B = \frac{1}{2}\left(t_2^2 + \frac{1}{t_2^2}\right),$$

$$t_i = \frac{V_i}{V_0}, \quad i = 1, 2.$$

Dezvoltînd binomial $(1 - \tau_0 t^2)^{-\beta} = 1 + \frac{\beta\tau_0}{1!} t^2 + \frac{\beta(\beta+1)}{2!} \tau_0^2 t^4 + \ldots$ $\ldots (1 + 2\lambda t^2 + t^4)^{-1} = 1 - (2\lambda t^2 + t^4) + (2\lambda t^2 + t^4)^2 + \ldots$ unde $\lambda = A$, B iar f_0 este mai sus, integralele I_1^0, I_2^0 se pot calcula luînd un număr suficient de termeni. În cazul plan pentru $k = 0$ se obţin rezultate comparabile cu cele obţinute de Simona Popp [4] în acest caz studiat [5].

Pentru cazul incompresibil ($k = 0$) cele 2 integrale se calculează direct aşa cum vom vedea în continuare la calculul coeficientului de rezistenţă.

Coeficientul de rezistenţă aici este $C_p = \frac{2P}{\rho^\circ V_0 S_k}$ unde $S_k = \pi^{k+1} 1^{k+1} \sin^k \mu$ este aria laterală a conului ($k = 1$) sau lungimea plăcii ($k = 0$). Înlocuind $\rho^1 = \rho^\circ = \rho_0(1 - \tau_0)^\beta$ şi utilizînd legătura constantei gazelor cu presiunea şi viteza $\rho^\circ V_0 = p_0(\beta + 1)\tau_0(1 - \tau_0)^\beta$ obţinem deci cu P din (51).

$$C_p = \frac{2^k \sin\mu}{(k+1)\ (1-\tau_0)^\beta} \cdot \frac{I_2}{I_1} = \frac{\sin\mu}{(1-\tau_0)^\beta} \cdot \frac{I_2}{I_1} \tag{54}$$

unde I_2, I_1 se pot calcula cu observaţiile de mai sus

Se observă aici că pentru cazul spaţial axial simetric ($k = 1$) şi cazul plan ($k = 0$) coeficientul de rezistenţă este acelaşi

Pentru cazul discului, deci $\mu = \frac{\pi}{2}$ cu (53) şi (54)

$$C_p^0 = \frac{I_2^0}{(1-\tau_0)^\beta I_1^0} \tag{55}$$

cu I_2^0, I_1^0 precizaţi mai sus.

Urmărim în continuare calculul parametrilor aerodinamici pentru cazuri particulare remarcabile ce se pot obţine din aceste formule generale.

a) Modelul J.R.E. în tunel în cazul incompresibil ; în acest caz $\beta \to 0$, $C_p = \frac{I_2}{I_1} \sin\mu$, integralele I_1, I_2 devin mai simple cu $f_0 = 1 - t^2$ şi

$$I_1 = \frac{2(a^2-1)}{\alpha(a+b)} \int_0^1 \frac{(t^{1/\alpha} - t^{-1/\alpha})\ dt}{t^2[2A + (t^{1/\alpha} + t^{-1/\alpha})] \cdot [2B + (t^{1/\alpha} + t^{-1/\alpha})]}$$

iar pentru α precizat se pot face calcule directe sau cu dezvoltări binomiale. În cazul discului $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$, calculele sînt directe, așa cum vom vedea în continuare din (55)

$$C_p^0 = I_2^0(i)/I_1^0(i) = J_2/J_1$$

unde

$$J_1 = J(2, B) + B \cdot J(0, B) - J(2, A) - A \cdot J(0, A)$$

$$J_2 = (1 + B) \cdot J(2, B) + (1 + B) \cdot J(0, B) - (1 + A) J(2, A) - (1 + A) J(0, A)$$

iar

$$J(n, \lambda) = \int_0^1 \frac{t^n}{t^4 + 2\lambda t^2 + 1} \, dt, \; n = 0,2 \text{ și } \lambda = A, B$$

Efectuînd calculele, obținem înlocuind A, B în funcție de $t_i = V_i/V_0$ cum s-a precizat și avem

$$J_1 = \frac{\pi}{8}\left(\frac{t_2^2 + 1}{t_2} - \frac{t_1^2 - 1}{t_1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{t_2^2 - 1}{t_2} \operatorname{arctg} \frac{t_2^2 - 1}{2t_2} - \frac{t_1^2 - 1}{t_1} \operatorname{arc\,tg} \frac{t_1^2 - 1}{2t_1}\right)$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{t_2^2 + 1}{2t_2} - \frac{t_1^2 + 1}{2t_1}\right) \text{ și înlocuind } t_i,$$

$$C_p^0(i) = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{V_1}{V_0} - \frac{V_2}{V_0} - \frac{V_0}{V_2} + \frac{V_0}{V_1}\right)}{\left(\frac{V_0}{V_1} - \frac{V_0}{V_2} + T(V_1, V_2, V_0)\right)}, \quad T = \frac{2}{\pi}\left[\frac{V_0}{V_2} \operatorname{arctg} \frac{V_2}{V_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{V_2}{V_0} \operatorname{arctg} \frac{V_2}{V_0} + \frac{V_1}{V_0} \operatorname{arctg} \frac{V_1}{V_0} - \frac{V_0}{V_1} \operatorname{arctg} \frac{V_0}{V_1}\right] \qquad (39')$$

ce coincid cu formulele obținute de Simona Popp [4].

b) Dacă $V_2 \to V_0$, $b = 1$, $k = 1$ avem problema conului (discului) în tunel și toate formulele anterioare se pot particulariza obținînd rezultate ce vor fi prezentate într-o lucrare în viitor ; în cazul plan $k = 0$ avem „problema Rethy-Bobîlev în canal" studiată de Simona Popp [4]. De asemeni, aceeași problemă a fost studiată de Y. Sungurtsev [14] utilizînd metoda operatorilor integrali și prezentînd noi metode numerice importante în recenta sa monografie [15].

În cazul plăcii înclinate problema a fost studiată și generalizată de noi [24].

c) Dacă în continuare $V_1 \to V_0$ cu $b \to \infty$ obținem problema conului sau discului în jet delimitat iar în cazul plan ($k = 0$) aceasta fiind „problema penei în curent delimitat" — problema clasică a lui C. Iacob [1].

d) Dacă în cazul b) $V_1 \to 0$ avem „problema conului sau discului în fluid liber" sau în cazul plan problema penei în curent liber studiată de C. Iacob [1], [4] sau în cazul plăcii problema lui Helmholtz [1], [4].

Primit în redacție la 15 decembrie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest — Paris, Edit. Academiei, 1959.
2. C. IACOB, ș.a., *Matematici clasice și moderne*, vol. **II**, Edit. tehnică, București, 1983.
3. SIMONA POPP, *Lecții de dinamica gazelor*, București, 1979.
4. SIMONA POPP, *Modele matematice în teoria cavității*, Edit. tehnică, București, 1985.
5. SIMONA POPP, *Rosko's model in a channel*, Rev. Roum. Math. Pures. Appl., **14**, 9 (1969); *Theoretical investigations and numerical evalutions of wall effects in cavity flows*, Symposium of Cavity Flows, Minnesota, U.S.A., 1975, p. 119—129.
6. L. DRAGOȘ, *Principiile mecanicii mediilor continue*, Edit. tehnică, București, 1983.
7. G. N. POLOJI, *Teoria i primenemie p-analiticeskih i (p, q) — analiticeskih funcții*, Kiev, 1973.
8. V. N. MONAHOV, *Kraevie zadaci so svobodnimi granițami dlia elipticeskih sistem*, Novosibirsk, 1977.
9. A. A. HAMIDOV, *Ploskie i osesimetricinie zadaci o struinom tecenii*, Taşkent, 1978.
10. L. BERS, *Mathematical aspects of subsonic and tronsonic gas dynamics*, London, 1958; Moskva, 1961 (l. rusă).
11. N. TEODORESCU, *La derivée aréolaire et les fonctions analitiques générales en dynamique des fluides compressibles*, Atti dell 2e Riunione del grup. «Les mathématiciens d'expression latine», Firenze-Bologna, 1961, p. 226—257.
12. M. A. LAVRENTIEV, B. V. SABAT, *Problemi ghidrodinamiki i ih matematiceskie modeli*, Moskva, 1978.
13. * * * *Teoria funcțiilor de variabilă complexă*, Biblioteca Analelor Româno-Sovietice, Seria Tehnică, 83 (1961).
14. Y. SUNGURTEV, *Integralinaia analoghia met. Ciaplighina-Follkovicia v zodaciah o gazovih struiah.*, Rev. Roum. Math. Pures. Appl., **27**, 4 (1982).
15. Y. SUNGURTEV, *Ploskie struinie tecenie gaza*, Moskva, 1989.
16. S. STOILOV, *Teoria funcțiilor de variabilă complexă*, vol. **1—2**, Edit. Academiei, București, 1954—1958.
17. CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, ș.a., *Probleme moderne în teoria funcțiilor*, Edit. Academiei, București, 1965.
18. CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, *Analiza complexă*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1988.
19. D. IVAȘCU, *Introduere în teoria grupurilor Klein*, Edit. Academiei, București, 1973.
20. T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, Edit. Academiei, București, 1963.
21. D. HOMENTCOVSCHI, *Funcții complexe cu aplicații în știință și tehnică*, Edit. tehnică, București, 1986.
22. M. LUPU, *Mecanica. Metode și modele matematice în mecanic, mediilor continue*, Brașov, 1985.
23. M. LUPU, *Probleme Helmholtz-Kirchhoff la mari viteze subsonice*, St. Cerc. Mat., 2 (1973); *Solution exacte au cas du mouvement des fluides compressibles en présences des ajoutajes Borda généralisés*, Rev. Roum. Math. Pures. Appl., 5 (1982).
24. M. LUPU, *Résolution du problème du mouvement des fluides en présences plaques en incidence* Rev. Roum. Méc. Appl., 6 (1987).
25. M. LUPU, *Studiul modelului J.R.E. în tunel utilizind funcții (p, q) — analitice*, Lucrările Colocviului de Mecanica Fluidelor, Suceava, 1987; *L'étude du mouvement des fluides présences des corps raltongés dans le cas plan ou axial symétrique en utilisant des transformations quasi-conformes.* Lucrările sesiunii științifice anuale ale facultății de matematică, Universitatea din Brașov, 1989.
26. A. K. BURAVTEV, ș.a., *Experimentalinoe isledovanie Aerodinamiki sistemi disc-țilindr.*, Vestnik, 3 (1988).
27. A. ROSHKO, K. KOENIG, *An experimental study on the drag an flow fields of two bluff bodies*, J. Fluid. Mech., **156** (1985).

d) Dacă în cazul b) $V_1 = 0$ avem „problema conului sau discului în fluid liber" sau în cazul plan problema penei în curent liber studiată de C. Iacob [1], [4] sau în cazul placi problema lui Helmholtz [1], [4].

Primit în redacție la 14 februarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB, Introducțiune matematică la mecanica fluidelor, Bucureşti – Paris, Edit. Academiei, 1959.
2. C. IACOB, s.a., Matematici clasice şi moderne, vol. II, Edit. tehnică, Bucureşti, 1968.
3. SIMONA POPP, Lecții de dinamica gazelor, Bucureşti, 1979.
4. SIMONA POPP, Modele matematice în teoria curgerilor, Edit. tehnică, Bucureşti, 1985.
5. SIMONA POPP, Fizica şi model în ecuații, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 14, 9 (1969); Une efficient mesure de glissement pour numérous problèmes de mécanique des fluides, Symposium of Gravity Flows, Minnesota, U.S.A., 1975, p. 119–129.
6. L. DRAGOS, Principiile mecanicii fluidelor continue, Edit. tehnică, Bucureşti, 1983.
7. G. N. POLOJII, Teoria i primenenie p-analiticheskikh funkcii, Kiev, 1973.
8. V. N. MONAHOV, Kraevye zadachi so svobodnymi granicami dlia sliptcheskikh sistem, Novosibirsk, 1977.
9. A. A. HAMBRIDY, Physico-mathematical models of structure fertility, Leningrad, 1978.
10. L. BERS, Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, London, 1958; Moskva, 1961 (rusă).
11. N. TEODORESCU, La dérive mécanique et les fonctions analitiques généralisées en aérodynamique des fluides compressibles, Atti del 2° Simposio del gruppo «Les mathématiques d'aerospazio italiane», Bologna, 1961, p. 226–237.
12. M. A. LAVRENTIEV, B. V. SABAT, Problemy gidrodinamiki i ih matematicheskie modeli, Moskva, 1978.
13. * * * Teoria funcțiilor de variabilă complexă, Biblioteca Academiei Republicii Socialiste, Seria Tehnică, 83 (1961).
14. Y. SUGUKIEV, Integralnye analogi Gilberta, Uspehi Mat. Nauk, 27, 4 (1972).
15. Y. SUGUKIEV, Prostye struktury teorii gazo, Moskva, 1980.
16. S. STOÏLOW, Teoria funcțiilor de variabilă complexă, vol. I–2, Edit. Academiei R. P. Romîne, 1954–1958.
17. CABRIA ANDREIAN-CAZACU, s.a., Probleme moderne în teoria funcțiilor, Edit. Academiei, Bucureşti, 1965.
18. CABRIA ANDREIAN-CAZACU, Analiza complexă, Edit. tehnică şi enciclopedică, Bucureşti, 1983.
19. D. IVASCU, Introducere în teoria compusului fizic, Edit. Academiei, Bucureşti, 1973.
20. P. CHOVRANI, Curgerea fluidelor vîscoase omogene, Edit. Academiei, Bucureşti, 1963.
21. D. HOMENCOVSCHI, Funcții complexe cu aplicații în teoria elasticității, Edit. tehnică, Bucureşti, 1966.
22. M. LUPU, Mecanica. Metode şi modele matematice în mecanică, mecanica continuului, Braşov, 1983.
23. M. LUPU, Problema Helmholtz-Kirchhoff în mecanica planului subsonic, St. Cerc. Mat., 2 (1973); Soluții exacte ale unei clase de mişcări plane ale fluidelor compresibile, în prezenta des glisements exacts des problèmes des Rev. Roum. Math. Pures. Appl., 6 (1982).
24. M. LUPU, Rezolvarea unei probleme de mişcare a fluidelor în prezenta plăcilor în mişcare, Rev. Roum. Méc. Appl., 6 (1982).
25. M. LUPU, Studiul mecanicii J.R.F. la unele utilizări funcții C, în analiza Lucrările Colocviului de Mecanica Fluidelor, Suceava, 1987; L'étude du mouvement des fluides parfaits des corps solides dans le cas plan ou axial symétrique en utilisant les transformations quasi-conformes, Lucrările sesiunii științifice anuale de raportare de cercetare, Universitatea din Braşov, 1989.
26. A. K. BUHAYTEV, s.a., Eksperimentalnoe issledovanie Aerodinamiki sistem dvuhtelnogo Vestnik, 5 (1982).
27. A. ROSINO, S. KOENIG, An experimental study on the drag on flow fields of two fluid jets, J. Fluid Mech., 156 (1985).

O METODĂ PENTRU CALCULUL CURGERILOR TRANSONICE ÎN JURUL PROFILELOR AERODINAMICE FOLOSIND DOUĂ BAZE DE APROXIMARE

de G. MARINESCU și C. BERBENTE
Institutul Politehnic, București

Această lucrare descrie o nouă metodă de calcul pentru curgerea neviscoasă bidimensională în jurul unui profil aerodinamic. Este rezolvat un sistem de ecuații pseudo-nestaționar care converge în timp către soluția staționară. Cu această metodă se pot calcula unde de șoc slabe fără introducerea unor termeni suplimentari de viscozitate artificială. Este introdusă o bază exponențială de aproximare, utilă în zonele cu gradienți mari de presiune. Metoda numerică este explicită necesitînd deci puțină memorie calculator. Comparația cu metode similare rulate pe calculatoare mari arată avantajele metodei prezentate.

1. INTRODUCERE

Orice schemă numerică de calcul explicită cu diferențe finite introduce un zgomot numeric, mai mare sau mai mic, dependent de calitatea rețelei de calcul, de schemele de discretizare și de altele. Criteriul de stabilitate Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) oferă doar o margine superioară, teoretică, pentru alegerea pasului de timp care nu poate ține cont de sursele numerice de perturbație a procesului iterativ. Pentru atenuarea acestui zgomot numeric există numeroase recomandări și procedee. De exemplu pentru punctele de pe frontiera domeniului de calcul se recomandă corecția Kutler [5], iar la trecerea prin unda de șoc se recomandă introducerea unui termen suplimentar de viscozitate artificială.

În continuare se va prezenta o metodă pentru rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale care guvernează curgerea transonică, metodă care are proprietăți remarcabile de amortizare și care nu necesită introducerea unor termeni suplimentari de corecție la frontieră sau în zonele cu gradienți mari de presiune.

2. METODA PROPUSĂ

În ideea de a se putea utiliza calculatoare mici se va adopta o schemă de calcul explicită cu diferențe finite pentru rezolvarea sistemului de ecuații care guvernează curgerea transonică. O astfel de schemă nu necesită inversări de matrici dar are o convergență condiționată.

Pentru curgerea staționară plană a unui gaz în care se neglijează efectele de viscozitate și transfer de căldură se poate admite că entalpia

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 3—4, 1991, P. 185—195

totală este constantă. Pe de altă parte pentru numere Mach care nu depășesc cu mult valoarea unității ($M<1.3$) salturile prin undele de șoc sînt mici astfel încît mișcarea poate fi considerată și izentropică. În aceste condiții (entalpie totală și entropie constante) viteza V a gazului se poate exprima ca funcție de densitate ρ sub forma :

$$V^2 = a_{cr}^2\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\rho}{\rho_{cr}}\right)^{\gamma-1}\right] \tag{1}$$

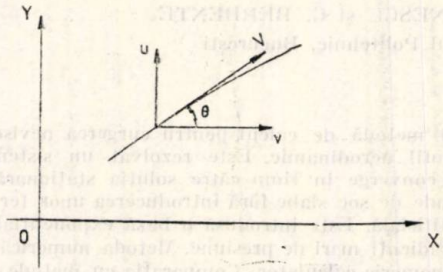


Fig. 1. — Sistemul de coordonate.

unde a_{cr} reprezintă viteza critică iar γ raportul căldurilor specifice. În ipotezele de lucru introduse ecuația lui Crocco după normala la linia de curent (fig. 1) devine :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

în care s-a păstrat termenul nestaționar. În ecuația de continuitate :

$$k\,\frac{\rho_{cr}}{a_{cr}}\cdot\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \tag{3}$$

termenul nestaționar $\partial\rho/\partial t$ a fost înlocuit cu termenul din membrul stîng al ecuației (3), k (fiind un parametru real ales astfel încît stabilitatea numerică să fie cît mai bine asigurată. Ecuațiile (1), (2) și (3) reprezintă sistemul de ecuații „pseudo-nestaționar" pentru curgerea potențială transonică plană introdus de J. P. Veuillot și H. Viviand [2]. În această formă sistemul de ecuații cu derivate parțiale este rezolvat numeric printr-o schemă iterativă în timp care conduce, în anumite condiții, la soluția staționară.

3. SCHEME NUMERICE DE CALCUL PE REȚELE NEORTOGONALE DE DISCRETIZARE

În sistemul ecuațiilor (1), (2), (3) se discretizează termenii nestaționari cu diferențe finite de ordinul întîi :

$$\begin{cases} V^{n+1} = V^n + \Delta t\,\dfrac{a_{cr}}{k\rho_{cr}}\left[\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]^n \\ \theta^{n+1} = \theta^n - \Delta t\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^n \end{cases} \tag{4}$$

unde indicele superior este numărul iterației.

Se pune problema estimării termenilor $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$, $\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ pe o rețea neortogonală oarecare. Ideea metodei este aceea de a determina o serie de funcții de aproximare cu „metoda celor mai mici pătrate" pentru exprimarea termenilor u, v, ρu, ρv pe fiecare celulă din rețeaua de discretizare și la fiecare iterație. Odată determinate aceste funcții, se calculează analitic derivatele lor care se introduc în sistemul (4).

Motivul pentru care se caută o altă metodă pentru estimarea derivatelor este acela că modelele clasice de tip dezvoltare în serie Taylor sau Fourier în care funcția de aproximare trece prin nodurile rețelei introduc erori mari în calculul derivatelor pe rețele rare, erori care de obicei se amplifică deși condiția de stabilitate CFL este satisfăcută.

Se poate demonstra că în cazul funcțiilor ortogonale calculul funcției de aproximare se reduce, în cazul unei singure celule cu cinci noduri din care unul interior, la cinci înmulțiri între termeni dependenți numai de geometria rețelei și valorile parametrilor gazodinamici u, v, ρu, ρv în nodurile celulei.

Într-adevăr, fie în planul fizic xOy o celulă de formă arbitrară cu vîrfurile notate 2, 3, 4, 5 și punctul interior 1 (fig. 2).

Se consideră o bază de funcții de aproximare $B(u_1, u_2, u_3, u_4)$ în general neortogonală și se ortogonalizează de exemplu cu procedeul Gramm-Schmidt. Va rezulta o altă bază $(B_0(v_1, v_2, v_3, v_4)$ în care funcțiile v_i verifică relația :

$$(v_i ; v_j) = \begin{cases} H_i = \sum_{k=1}^{5} v_i^2(x_k ; y_k) \neq 0, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{5}$$

unde (v_i, v_j) este produsul sclar al funcțiilor de rețea v_i, v_j. Relațiile de legătură între funcțiile u_i și v_i sînt prezentate în Anexa.

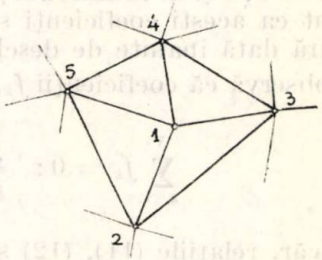


Fig. 2. — Celula de discretizare.

Fie $\varphi(x, y)$ funcția de aproximare. Criteriul de aproximare îl reprezintă minimizarea sumei :

$$S = \sum_{k=1}^{5} [\varphi_k - \varphi(x_k ; y_k)]^2 = \min. \tag{6}$$

unde φ_k, $k = 1, 5$ sînt valori nodale cunoscute ale funcției φ. Aproximația $\varphi(x, y)$ se pune sub forma :

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{4} a_j v_j(x ; y) \tag{7}$$

cu coeficienții a_j determinați din condiția de minim impusă. Se obține un sistem algebric liniar care admite soluția :

$$a_i = \sum_{k=1}^{5} \frac{v_i(x_k\,;\,y_k)}{\sum_{j=1}^{5} v_i^2(x_j\,;\,y_j)}\,\varphi_k\,;\quad i = \overline{1,4} \tag{8}$$

Dacă se face notația :

$$b_{ik} = \frac{v_i(x_k\,;\,y_k)}{\sum_{j=1}^{5} v_i^2(x_j\,;\,y_j)}\,;\quad i = \overline{1,4},\ k = \overline{1,5} \tag{9}$$

atunci funcția $\varphi(x, y)$ devine :

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{5} \left(\sum_{i=1}^{4} b_{ik} v_i(x\,;\,y) \right) \varphi_k \tag{10}$$

Acum se pot calcula analitic derivatele funcției $\varphi(x, y)$ în punctul 1 :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 = \sum_{k=1}^{5} f_k \varphi_k\,;\quad f_k = \sum_{i=1}^{4} b_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)_1 \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_1 = \sum_{k=1}^{5} g_k \varphi_k\,;\quad g_k = \sum_{i=1}^{4} b_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)_1 \tag{12}$$

Se observă că coeficienții f_k și g_k depind numai de coordonatele punctelor (x_k, y_k), $k = 1, 5$ și de forma funcțiilor ortogonale v_i, $i = 1, 4$. Rezultă că este eficient ca acești coeficienți să fie determinați în programul de calcul o singură dată înainte de deschiderea procesului iterativ (4).

Se mai observă că coeficienții f_k, g_k verifică relațiile :

$$\sum_{k=1}^{5} f_k = 0\,;\quad \sum_{k=1}^{5} g_k = 0 \tag{13}$$

Într-adevăr, relațiile (11), (12) sînt adevărate oricare ar fi funcția $\varphi(x, y)$. În particular pentru $\varphi(x, y) =$ constant se obțin relațiile (13).

Identificînd succesiv funcția φ cu parametrii gazodinamici u, v, ρu, ρv, se obțin relațiile căutate pentru derivatele $\partial/\partial x$ și $\partial/\partial y$. De exemplu :

$$\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right)_1 = \sum_{k=1}^{5} f_k (\rho u)_k \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right)_1 = \sum_{k=1}^{5} g_k (\rho v)_k \tag{15}$$

În acest fel calculul derivatelor la fiecare iterație și în fiecare punct al rețelei neortogonale comportă numai patru adunări și cinci înmulțiri.

Trebuie remarcat că datorită discretizării termenilor $\partial/\partial t$ în sistemul (4) cu scheme cu diferențe finite de ordinul întîi este necesară relaxarea soluției la fiecare iterație. Se recomandă ca factorul de relaxare să fie ales $\omega = 0{,}5$ atît pentru regimul subsonic cît și pentru cel supersonic.

Metoda prezentată poate fi ușor extinsă la cazul curgerilor tridimensionale.

4. CONDIȚIA DE STABILITATE

Pentru că sistemul de ecuații (4) este hiperbolic în tot domeniul de calcul nu este necesară introducerea unor relații suplimentare de salt la trecerea prin unda de șoc.

Condiția de stabilitate a schemelor numerice (4) este condiția CFL prezentată în detaliu în [1] și [2]:

$$\frac{a\Delta t}{R} \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{M} & ; \quad M^2\varkappa \geqslant M^2+1 \\ \dfrac{1}{2M^2}\sqrt{[(M+1)^2-M^2\varkappa][M^2\varkappa-(M-1)^2]} & ; \quad \dfrac{(M^2-1)^2}{M+1} \leqslant M^2\varkappa \leqslant M^2+1 \\ \dfrac{M\varkappa}{|M^2-1|} & ; \quad M^2\varkappa \leqslant \dfrac{(M^2-1)^2}{M+1} \end{cases} \tag{16}$$

unde:

$$\varkappa = -k\frac{\rho_{cr}}{a_{cr}}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} \tag{17}$$

iar a este viteza locală a sunetului, Δt pasul pe axa timp, M criteriul Mach, iar R cea mai mare distanță între două puncte alăturate din celulă. Uzual parametrul k se alege în intervalul (1 ; 4).

5. STUDIUL SOLUȚIEI ÎN VECINĂTATEA PUNCTULUI DE STAGNARE

În vecinătatea punctului de stagnare S de la bordul de atac metoda numerică utilizată prezintă o instabilitate, în special în termenii care conțin unghiul vitezei.

O astfel de comportare nu este proprie metodei propuse: în general toate metodele numerice sînt instabile în zona punctului de stagnare care reprezintă o singularitate pentru sistemul de ecuații de mișcare.

Pentru a înlătura această instabilitate s-a făcut un studiu analitic local al sistemului de ecuații al mișcării staționare în vecinătatea punctului de stagnare.

Notînd cu ψ funcţia de curent definită prin relaţiile :

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \; ; \quad \rho v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{18}$$

ecuaţia de continuitate pentru mişcarea staţionară este identic satisfăcută, rămînînd să fie satisfăcută condiţia de irotaţionalitate.

Notînd mai departe cu ρ_s densitatea în punctul de stagnare se poate scrie :

$$\rho = \rho_s(1 + \varepsilon\,(x\,;\,y)) \tag{19}$$

unde $\varepsilon(x, y)$ este o funcţie suficient de mică în modul în vecinătatea punctului de stagnare.

Într-adevăr, neglijînd toţi termenii începînd cu ε^2 din ecuaţia (1) se obţine :

$$\varepsilon \simeq - \frac{V^2}{2a_{cr}^2} \; ; \quad |\,\varepsilon(x\,;\,y)| \ll 1 \tag{20}$$

Prin urmare, în vecinătatea punctului de stagnare mişcarea poate fi considerată incompresibilă, vitezele fiind date de relaţiile (18) simplificate sub forma :

$$\rho_s u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad \rho_s v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} , \quad x \to x_s \tag{21}$$

Condiţia de irotaţionalitate conduce la ecuaţia :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad x \to x_s . \tag{22}$$

Pentru determinarea comportării analitice locale se alege un sistem de coordonate X, Y cu originea în punctul S, axa X fiind orientată spre centrul de curbură iar axa Y după tangenta la profil (fig. 3) :

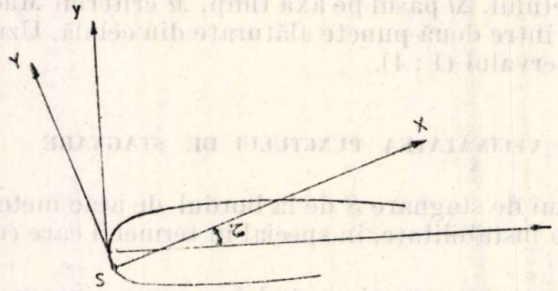


Fig. 3. — Sistemul de coordonate în vecinătatea punctului de stagnare

Acest sistem este legat de sistemul anterior cu centrul în O prin relaţiile :

$$X = (x - x_s)\cos\tau + (y - y_s)\sin\tau \tag{23}$$

$$Y = - (x - x_s)\sin\tau + (y - y_s)\cos\tau \tag{24}$$

(x_S, y_S) fiind coordonatele punctului de stagnare iar τ unghiul de rotație a axelor.

În acest nou sistem de coordonate ecuația care aproximează local conturul profilului se alege de forma :

$$Y = \pm\sqrt{2r_S}X\,(1 + CX) \tag{25}$$

unde r_S reprezintă raza de curbură în punctul S iar C o constantă care ia valori diferite pentru $y > 0$ ($C = C_+$) și $y < 0$ ($C = C_-$).

Din condiția ca vitezele să fie tangente la contur, soluția în vecinătatea punctului de stagnare se determină pînă la o constantă multiplicativă A astfel încît componentele vitezei în sistemul X, Y au expresiile :

$$\frac{1}{\rho_S}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial Y} = A\left[\xi + \frac{3}{2}(\xi^2 - \eta^2) + \frac{3 - 4r_SC}{4}(\xi^3 - 3\xi\eta^2)\right] \tag{26}$$

$$-\frac{1}{\rho_S}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} = -A\eta\left[1+3\xi+\frac{3 - 4r_SC}{4}(3\xi^2 - \eta^2)\right];\ \xi = \frac{X}{r_S},\ \eta = \frac{Y}{r_S}. \tag{27}$$

Ca urmare vitezele u, v în sistemul inițial se calculează cu expresiile :

$$u = \frac{1}{\rho_S}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\sin\tau + \frac{\partial\psi}{\partial Y}\cos\tau\right) \tag{28}$$

$$v = -\frac{1}{\rho_S}\left(\frac{\partial\psi}{\partial X}\cos\tau - \frac{\partial\psi}{\partial Y}\sin\tau\right);\ V^2 = u^2 + v^2 \tag{29}$$

Expresiile obținute sînt soluții incompresibile care satisfac condiția ca profilul să fie linie de curent pînă la termenii $O(\xi^2)$ inclusiv. Comportarea locală s-a utilizat în felul următor : pentru două puncte P_1, P_2 în vecinătatea punctului de stagnare se calculează vitezele V_1, V_2 și raportul V_1/V_2 din relațiile (28), (29). În cadrul metodei utilizate este suficientă cunoașterea acestui raport ; cele două puncte sînt luate în afara zonei de instabilitate a metodei dar suficient de aproape de punctul S astfel încît aproximația de incompresibilitate să fie valabilă. Poziția punctului de stagnare S fiind necunoscută (cu excepția profilului simetric la incidența nulă) se determină prin încercări. Startul se ia printr-o deplasare față de punctul de stagnare la portanta nulă, în sensul dat de forma profilului și de unghiul de incidență.

6. REZULTATE NUMERICE. DISCUȚII

Cu sistemul (4) s-a determinat spectrul de curgere în jurul profilului NACAOO12 la regimurile $M = 0.85$; $\alpha = 0°$ și $M = 0.80$; $\alpha = 1.25°$. Calculele s-au efectuat utilizînd două baze de aproximare : o bază polinomi-

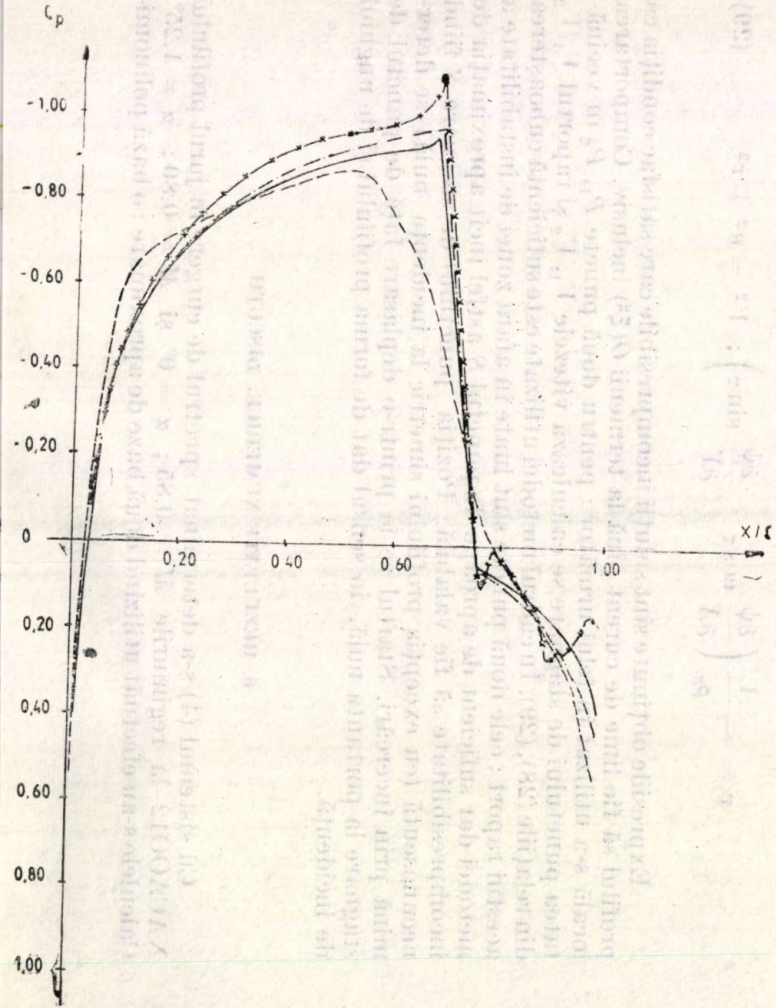


Fig. 4. — Distribuția de presiuni pe profilul NACA 0012 la regimul $M = 0{,}85$; $\alpha = 0°$.

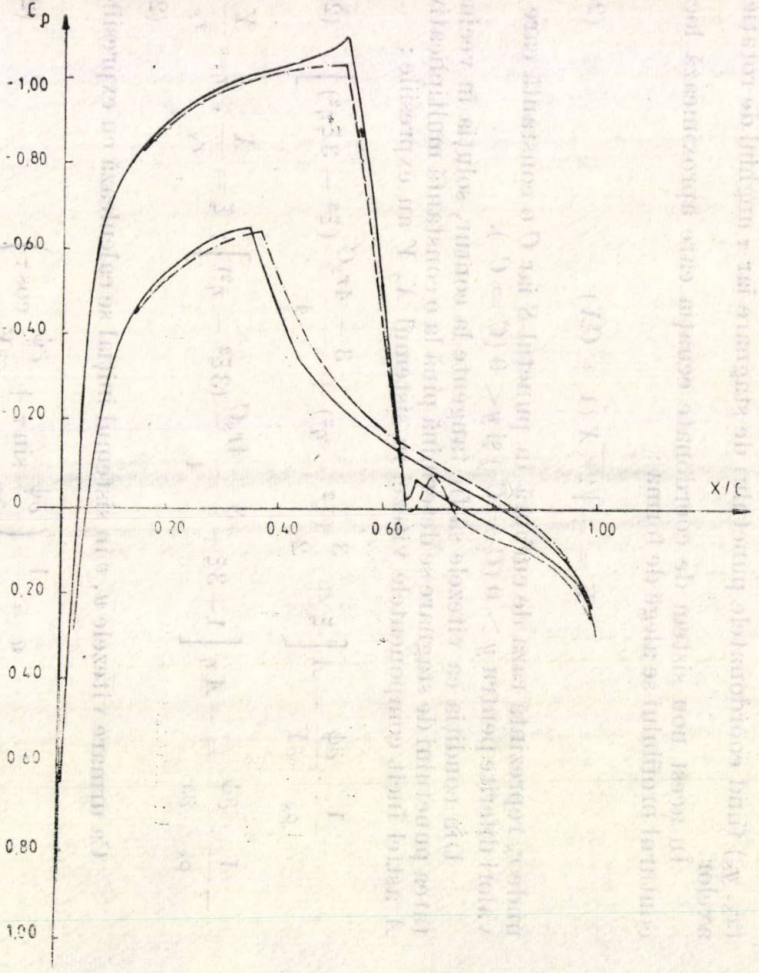


Fig. 5. — Distribuția de presiuni pe profilul NACA 0012 la regimul $M = 0{,}80$; $\alpha = 1{,}25°$.

ală $B_1(1, x, y, x^2 + y^2)$ și o bază de tip exponențial $B_2(1, e^x, e^{y^2}, e^{x+y^2})$ pe o rețea rară de calcul cu 611 puncte. Distribuțiile de presiuni care s-au obținut sînt prezentate în figurile 4 și 5. Ca element de comparație a fost ales spectrul de curgere obținut de Alain Lerat și Jaques Sides în lucrarea [3] la aceleași regimuri de curgere.

Se observă că baza polinomială de aproximare are o puternică tendință de netezire a discontinuităților care apar la trecerea prin unda de șoc, dar cu o comportare bună la bordul de fugă. În schimb baza de aproximare exponențială surprinde destul de bine comportarea fluidului în zonele cu variație mare a parametrilor (bordul de atac și saltul prin unda de șoc), dar constituie o sursă de instabilitate după undă, instabilitate care nu se atenuează pînă la bordul de fugă.

Este prezentat și un alt rezultat obținut prin utilizarea alternativă a celor două baze de aproximare în domeniul de calcul : pe profil de la bordul de atac și pînă la 3% din coardă și în zona undei de șoc s-a utilizat baza exponențială iar în restul domeniului s-a utilizat baza polinomială. În acest caz se observă o apropiere sensibilă a rezultatelor obținute față de cele prezentate în lucrarea [3] de Alain Lerat și Jaques Sides.

Se observă că, datorită viscozității numerice introdusă intrinsec de metodă, undele de șoc au o anumită „grosime", comportare specifică tuturor schemelor numerice cu amortizare. Această chestiune trebuie tratată cu atenție, îndesind rețeaua în zona undei de șoc, întrucît abaterile coeficientului de moment pot deveni sensibile față de cazul real.

În figurile 6 și 7 este prezentată amortizarea reziduului definit de relația (30) funcție de numărul de iterații :

$$\text{Rez} = \frac{L}{a_{cr}^2 \Delta t} \max_{i,j} |V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^{n}| \tag{30}$$

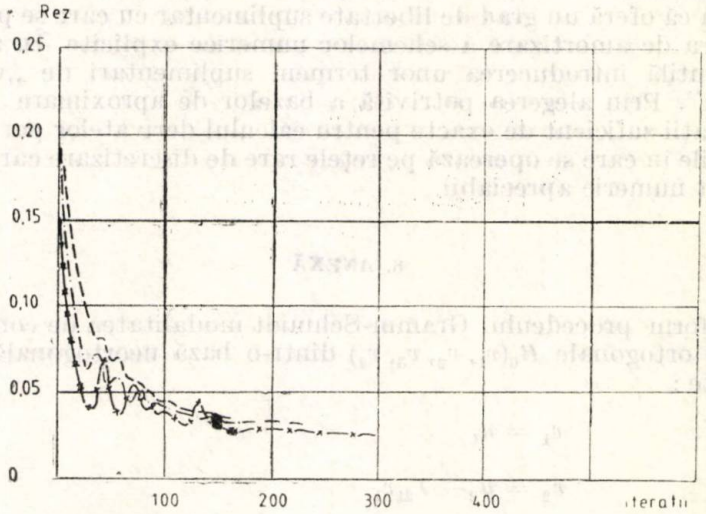


Fig. 6. — Variația reziduului funcție de numărul de iterații la regimul $M = 0.85$; $\alpha = 0°$. *** Reziduu în baza $B_1(1, e^x, e^{y^2}, e^{x+y^2})$ ——— Reziduu în baza $B_2(1, x, y, x^2 + y^2)$ —·—·— Reziduu în bază selectivă.

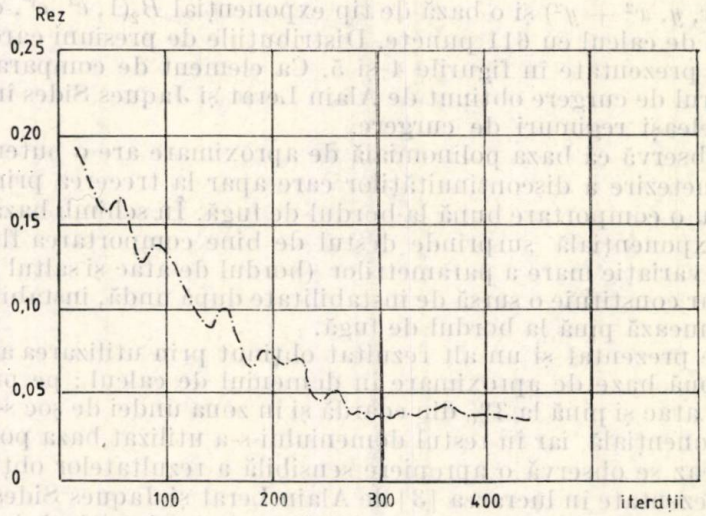


Fig. 7. — Variația reziduului funcție de numărul de iterații la regimul $M = 0.80$; $\alpha = 1.25°$. Calculele s-au efectuat în baza selectivă.

unde L este o lungime caracteristică. Comportarea reziduului reprezintă zgomotul numeric specific schemelor explicite, care pe ansamblu se amortizează odată cu creșterea numărului de iterații.

7. CONCLUZII

Rezolvarea numerică a sistemului de ecuații (4) este avantajoasă prin aceea că oferă un grad de libertate suplimentar cu care se poate regla capacitatea de amortizare a schemelor numerice explicite. În acest mod devine inutilă introducerea unor termeni suplimentari de „viscozitate artificială". Prin alegerea potrivită a bazelor de aproximare B se pot obține relații suficient de exacte pentru calculul derivatelor parțiale chiar în condițiile în care se operează pe rețele rare de discretizare care introduc un zgomot numeric apreciabil.

8. ANEXĂ

Conform procedeului Gramm-Schmidt modalitatea de construcție a unei baze ortogonale $B_0(v_1, v_2, v_3, v_4)$ dintr-o bază neortogonală $B(u_1, u_2, u_3, u_4)$ este :

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \lambda_{21} v_1$$

$$v_3 = u_3 - (\lambda_{31} v_1 + \lambda_{32} v_2)$$

$$v_4 = u_4 - (\lambda_{41} v_1 + \lambda_{42} v_2 + \lambda_{43} v_3)$$

unde :

$$\lambda_{21} = \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)}; \quad \lambda_{31} = \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)}; \quad \lambda_{41} = \frac{(u_4, v_1)}{(v_1, v_1)}$$

$$\lambda_{32} = \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)}; \quad \lambda_{42} = \frac{(u_4, v_2)}{(v_2, v_2)}$$

$$\lambda_{43} = \frac{(u_4, v_3)}{(v_3, v_3)}$$

Primit în redacție la 29 martie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. J. BROCHET, *Calcul numérique d'écoulements internes tridimensionels transsoniques*, ONERA T. P., *43* (1980).
2. J. P. VEUILLOT, H. VIVIAND, *A pseudo unsteady method for the computation of transonic potential flow*, ONERA T. P., *47* (1978).
3. A. LERAT, J. SIDÈS, *Finite volume methods for the solution of Euler equations*, ONERA T. P., *55* (1979).
4. R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of mathematics physics*, vol. **II**, Interscience Publishers, New-York, 1962.
5. P. KUTLER, W. A. REINHARDT, R. F. WARMING, *Multishoked three dimensional supersonic flow fields with real gas effects*, AIAA Journal, **11**, *5* (1973).
6. E. CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, *Dinamica fluidelor compresibile*, Editura Academiei, București, 1984.

DETERMINAREA COEFICIENȚILOR POLINOMULUI TRIGONOMETRIC PENTRU UN PROFIL AERODINAMIC SIMETRIC

de V. R. ANCUȘA

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

În lucrare se propun două metode pentru determinarea coeficienților polinomului trigonometric care descrie conturul unui profil aerodinamic simetric. Ambele metode iau în considerare toate punctele date, a doua ținînd cont în mod suplimentar și de razele de rotunjire la bordul de atac și la cel de fugă. Se indică rezultatele obținute pentru cîteva profile aerodinamice uzuale. Se face o analiză a abaterilor geometrice care apar la aproximarea conturului profilului aerodinamic utilizînd cele două metode. Se studiază efectul acestor abateri geometrice asupra caracteristicilor de portanță, moment și de sensibilitate la cavitație determinate teoretic. Se prezintă o comparație între valorile experimentale și cele determinate teoretic folosind metoda [4] și coeficienții calculați conform metodei propuse pentru profilul NACA 0015, obținîndu-se o bună concordanță.

INTRODUCERE

Profilele aerodinamice sînt date în catalog prin puncte, cunoscîndu-se în cazul profilelor teoretice și ecuațiile care generează conturul [6]. În general, pentru profilele prezentate în catalog, se cunosc caracteristicile aerodinamice globale și mai rar sînt date repartițiile de presiuni și caracteristicile de sensibilitate la cavitație. Dacă geometria profilului se cunoaște este posibil ca pe cale teoretică să se determine caracteristicile aerodinamice globale, distribuția de viteze și presiuni, precum și caracteristicile de sensibilitate la cavitație atît pentru profilul izolat cît și pentru cel dispus în rețea [4], [5].

Scopul acestei lucrări este de a prezenta o metodă de determinare a polinomului trigonometric cu care se poate descrie geometria profilului simetric luînd în considerare toate punctele date în catalog.

GEOMETRIA PROFILULUI

Utilizînd metoda expusă în [4] ecuațiile parametrice care descriu conturul profilului aerodinamic sînt :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi}{l} &= \frac{1}{2}(1+\cos\varphi) \\ \frac{\eta}{l} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)] \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

unde φ — poziția punctului pe cercul unitate care prin transformare conformă ajunge în punctul de coordonate $\frac{\xi}{l}$, $\frac{\eta}{l}$.

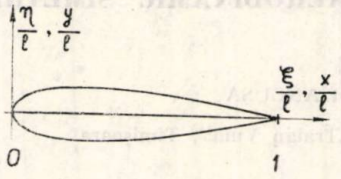


Fig. 1. — Modul de dispunere a profilului.

Se observă imediat că în cazul profilului simetric :

$$a_n = 0 \qquad n = \overline{0, N} \tag{2}$$

Deci pentru profilul simetric ecuațiile parametrice ale conturului său sînt :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi}{l} &= \frac{1}{2}(1+\cos\varphi) \\ \frac{\eta}{l} &= \sum_{n=1}^{N} [b_n \sin(n\varphi)] \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Cunoașterea geometriei sale înseamnă cunoașterea coeficienților b_n, care determină în același timp caracteristicile sale aerodinamice.

DETERMINAREA COEFICIENȚILOR POLINOMULUI TRIGONOMETRIC (METODA I)

Profilul dispus ca în figura 1 are geometria dată prin M puncte $\left(\frac{x_i}{l}, \frac{y_i}{l}\right)$, $i = \overline{1, M}$.

Dacă considerăm polinomul trigonometric (3) cu $N = 6$ rezultă că ar fi suficiente doar 6 puncte pentru cunoașterea geometriei. În realitate în catalog profilele sînt date în mult mai multe puncte, ceea ce ar conduce la un sistem supradeterminat pentru găsirea celor 6 necunoscute b_n. Pe de altă parte utilizarea metodei celor 12 ordonate [3] favorizează anumite puncte din geometria dată în catalog în detrimentul altora.

Din acest motiv am considerat că trebuiesc luate în considerare toate punctele date în catalog și în acest caz am aplicat metoda celor mai mici pătrate [2], [3] pentru determinarea coeficienților b_n.

Conform acestei metode trebuie ca

$$\sum_{i=1}^{M} \left(\frac{\eta}{l}\bigg|_{\varphi_i} - \frac{y_i}{l} \right)^2 = F(b_n), \quad n = \overline{1, 6} \tag{4}$$

să fie minimă în raport cu coeficienții b_n, unghiul φ_i determinîndu-se din relația :

$$\frac{x_i}{l} = \frac{1}{2}(1+\cos\varphi_i). \tag{5}$$

Aceasta înseamnă că

$$\frac{\partial F}{\partial b_n} = 0, \quad n = \overline{1, 6} \tag{6}$$

Exprimînd condițiile (6) și efectuînd calculele se ajunge la :

$$\left.\begin{aligned}
&[\sin\varphi_i \sin\varphi_i]b_1 + [\sin\varphi_i \sin 2\varphi_i]b_2 + [\sin\varphi_i \sin 3\varphi_i]b_3 + [\sin\varphi_i \sin 4\varphi_i]b_4 + \\
&\quad + [\sin\varphi_i \sin 5\varphi_i]b_5 + [\sin\varphi_i \sin 6\varphi_i]b_6 = \left[(\sin\varphi_i)\frac{y_i}{l} \right] \\
&[\sin 2\varphi_i \sin\varphi_i]b_1 + [\sin 2\varphi_i \sin 2\varphi_i]b_2 + [\sin 2\varphi_i \sin 3\varphi_i]b_3 + [\sin 2\varphi_i \sin 4\varphi_i]b_4 + \\
&\quad + [\sin 2\varphi_i \sin 5\varphi_i]b_5 + [\sin 2\varphi_i \sin 6\varphi_i]b_6 = \left[(\sin 2\varphi_i)\frac{y_i}{l} \right] \\
&[\sin 3\varphi_i \sin\varphi_i]b_1 + [\sin 3\varphi_i \sin 2\varphi_i]b_2 + [\sin 3\varphi_i \sin 3\varphi_i]b_3 + [\sin 3\varphi_i \sin 4\varphi_i]b_4 + \\
&\quad + [\sin 3\varphi_i \sin 5\varphi_i]b_5 + [\sin 3\varphi_i \sin 6\varphi_i]b_6 = \left[(\sin 3\varphi_i)\frac{y_i}{l} \right] \\
&[\sin 4\varphi_i \sin\varphi_i]b_1 + [\sin 4\varphi_i \sin 2\varphi_i]b_2 + [\sin 4\varphi_i \sin 3\varphi_i]b_3 + [\sin 4\varphi_i \sin 4\varphi_i]b_4 + \\
&\quad + [\sin 4\varphi_i \sin 5\varphi_i]b_5 + [\sin 4\varphi_i \sin 6\varphi_i]b_6 = \left[(\sin 4\varphi_i)\frac{y_i}{l} \right] \\
&[\sin 5\varphi_i \sin\varphi_i]b_1 + [\sin 5\varphi_i \sin 2\varphi_i]b_2 + [\sin 5\varphi_i \sin 3\varphi_i]b_3 + [\sin 5\varphi_i \sin 4\varphi_i]b_4 + \\
&\quad + [\sin 5\varphi_i \sin 5\varphi_i]b_5 + [\sin 5\varphi_i \sin 6\varphi_i]b_6 = \left[(\sin 5\varphi_i)\frac{y_i}{l} \right] \\
&[\sin 6\varphi_i \sin\varphi_i]b_1 + [\sin 6\varphi_i \sin 2\varphi_i]b_2 + [\sin 6\varphi_i \sin 3\varphi_i]b_3 + [\sin 6\varphi_i \sin 4\varphi_i]b_4 + \\
&\quad + [\sin 6\varphi_i \sin 5\varphi_i]b_5 + [\sin 6\varphi_i \sin 6\varphi_i]b_6 = \left[(\sin 6\varphi_i)\frac{y_i}{l} \right]
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Prin paranteze drepte se notează operația de sumare de la 1 la M. Introducem matricele :

$$E = \begin{Vmatrix}
\sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \sin\varphi_3 & \dots & \sin\varphi_M \\
\sin 2\varphi_1 & \sin 2\varphi_2 & \sin 2\varphi_3 & \dots & \sin 2\varphi_M \\
\sin 3\varphi_1 & \sin 3\varphi_2 & \sin 3\varphi_3 & \dots & \sin 3\varphi_M \\
\sin 4\varphi_1 & \sin 4\varphi_2 & \sin 4\varphi_3 & \dots & \sin 4\varphi_M \\
\sin 5\varphi_1 & \sin 5\varphi_2 & \sin 5\varphi_3 & \dots & \sin 5\varphi_M \\
\sin 6\varphi_1 & \sin 6\varphi_2 & \sin 6\varphi_3 & \dots & \sin 6\varphi_M
\end{Vmatrix} \tag{8}$$

și

$$L = \left\| \frac{y_1}{l} \quad \frac{y_2}{l} \quad \frac{y_3}{l} \quad \dots \quad \frac{y_M}{l} \right\| \tag{9}$$

Matricele transpuse lor sînt E^T și respectiv L^T. Ordinele acestor matrice sînt următoarele: $E(6, M)$, $L(1, M)$, $E^T(M, 6)$ și $L^T(M, 1)$.

Matricea coeficienților sistemului (7) este atunci:

$$C = E \cdot E^T \tag{10}$$

iar matricea coloană a termenilor liberi

$$Tl = E \cdot L^T \tag{11}$$

Problema acum devine simplă reducîndu-se la soluționarea unui sistem liniar de 6 ecuații cu 6 necunoscute.

Rezolvarea sistemului s-a făcut cu ajutorul calculatorului după următoarea schemă logică prezentată în figura 2. Numărul de puncte admis că se dă este $M = 25$, însă evident că acesta poate fi mărit în caz de nevoie. Programele au fost scrise atît în limbaj FORTRAN pentru calculatorul Felix C256 cît și în limbaj BASIC pentru un calculator HP 9845 S. Ele au fost transformate în subprograme aparținînd bibliotecii de calcul a caracteristicilor aerodinamice ale unui profil.

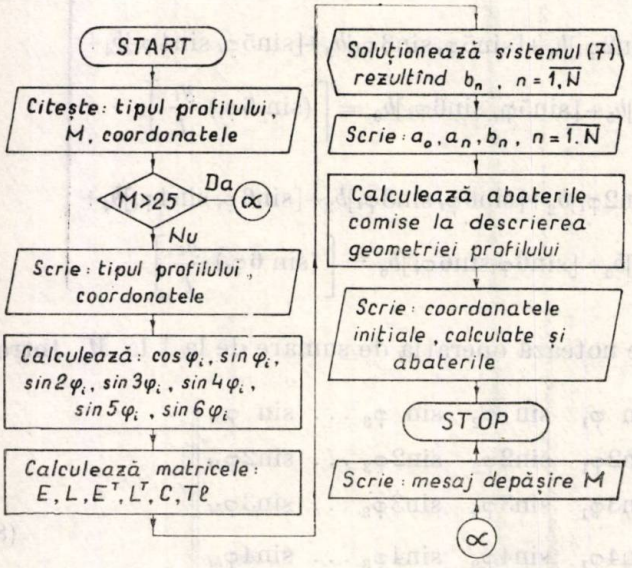

START
Citește: tipul profilului, M, coordonatele
M>25
Da
∝
Nu
Scrie: tipul profilului, coordonatele
Calculează: cos φi, sin φi, sin 2φi, sin 3φi, sin 4φi, sin 5φi, sin 6φi
Calculează matricele: E, L, E^T, L^T, C, Tl
Soluționează sistemul (7) rezultînd bn, n = 1,N
Scrie: a0, an, bn, n = 1,N
Calculează abaterile comise la descrierea geometriei profilului
Scrie: coordonatele inițiale, calculate și abaterile
STOP
Scrie: mesaj depășire M
∝

Fig. 2. — Schema logică a programului elaborat pentru metoda întîia.

În tabelul 1 se prezintă coeficienții polinomului trigonometric determinați conform metodei indicate pentru cîteva tipuri de profile.

Tabelul 1

Coeficienții polinomului trigonometric calculați cu metoda întîia

Tipul profilului \ Coef.	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
Gö 409	$5{,}60985 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}60537 \cdot 10^{-2}$	$-3{,}31205 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}26625 \cdot 10^{-3}$	$-7{,}31759 \cdot 10^{-4}$	$-4{,}97776 \cdot 10^{-4}$
Gö 410	$6{,}30158 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}91900 \cdot 10^{-2}$	$-4{,}05708 \cdot 10^{-4}$	$4{,}42110 \cdot 10^{-4}$	$9{,}64140 \cdot 10^{-5}$	$-5{,}18794 \cdot 10^{-4}$
Gö 459	$5{,}62667 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}65168 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}86758 \cdot 10^{-3}$	$-5{,}16007 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}45169 \cdot 10^{-4}$	$4{,}36710 \cdot 10^{-5}$
NACA 0006	$2{,}61548 \cdot 10^{-2}$	$-8{,}34305 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}18916 \cdot 10^{-4}$	$-3{,}29551 \cdot 10^{-4}$	$-9{,}99265 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}01260 \cdot 10^{-4}$
NACA 0009	$3{,}92459 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}24825 \cdot 10^{-2}$	$-6{,}10295 \cdot 10^{-4}$	$-4{,}94357 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}76772 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}52403 \cdot 10^{-4}$
NACA 0012	$5{,}23128 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}66526 \cdot 10^{-2}$	$-7{,}95299 \cdot 10^{-4}$	$-6{,}24808 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}01304 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}87612 \cdot 10^{-4}$
NACA 0015	$6{,}54051 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}08052 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}01739 \cdot 10^{-3}$	$-7{,}95733 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}62700 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}35205 \cdot 10^{-4}$
NACA 0018	$7{,}84949 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}49703 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}22119 \cdot 10^{-3}$	$-9{,}62423 \cdot 10^{-4}$	$-3{,}49371 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}74251 \cdot 10^{-4}$
NACA 0021	$9{,}15763 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}91526 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}44043 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}12194 \cdot 10^{-3}$	$-3{,}68337 \cdot 10^{-4}$	$-3{,}17631 \cdot 10^{-4}$
NACA 0025	$1{,}09026 \cdot 10^{-1}$	$-3{,}47048 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}69165 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}32873 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}18651 \cdot 10^{-4}$	$-3{,}73228 \cdot 10^{-4}$

Abaterile relative maxime corespunzătoare geometriei calculate cu ajutorul coeficienților indicați în tabelul 1 și cea indicată în catalog [6] nu depășesc valorile indicate în tabelul 2. Trebuiește precizat că pentru profilele NACA la bordul de fugă funcția (3) dă grosimea zero în timp ce în catalog profilul are grosime finită, acolo abaterea fiind maximă. Valorile indicate în tabelul 2 se referă, pentru profilele NACA, la intervalul $\frac{x}{l} \in$ $\in [0\,;\,0{,}95]$

Tabelul 2

Abaterile maxime ce apar la descrierea conturului profilului aerodinamic utilizînd coeficienții dați în tabelul 1.

Tipul profilului	$\varepsilon = \frac{\eta - y}{y}\ \langle\%\rangle$
Gö 409	1,76
Gö 410	2,48
Gö 459	4,032
NACA 0006	0,716
NACA 0009	0,540
NACA 0012	0,349
NACA 0015	0,722
NACA 0018	0,685
NACA 0021	0,490
NACA 0025	0,671

Remarcăm că abaterile relative maxime sînt mici indiferent dacă profilul este empiric sau calculat, ceea ce atestă valabilitatea metodei folosite.

În figura 3 se prezintă o comparație între repartiția de presiuni calculată conform metodei [4] cu ajutorul programului [5] pentru profilul NACA 0015 și repartiția stabilită experimental [6]. Se observă o concordanță bună ceea ce atestă valabilitatea metodei teoretice. În figura 4 se prezintă tot pentru profilul NACA 0015 caracteristica de portanță stabilită teoretic [4] comparativ cu cea experimentală [6], rezultînd așa cum s-a arătat și în [1] că valoarea coeficientului de portanță experimental este circa 0,85 din valoarea teoretică. Caracteristica de portanță este completată în figura 5 cu caracteristica de sensibilitate la cavitație calculată teoretic, caracteristică ce nu este dată în catalog pentru acest profil.

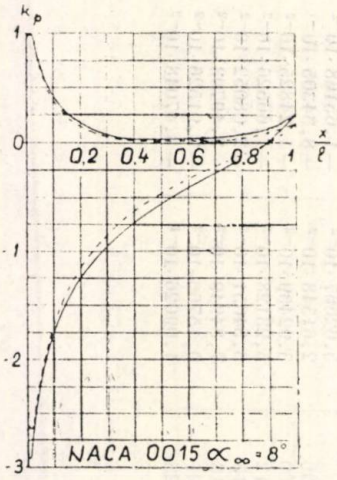


Fig. 3. — Comparație între repartiția de presiuni; —teoretică; — — —experimentală.

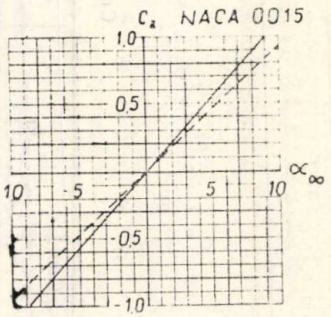


Fig. 4. — Comparație între caracteristica de portanță; —teoretică; — — —experimentală.

Analizînd geometriile calculate cu ajutorul coeficienților stabiliți și prezentați în tabelul 1, s-a observat că abaterile maxime apar în vecinătatea bordurilor de atac și de fugă. Din acest motiv s-a presupus că aceste abateri sînt determinate de nerespectarea rotunjirii profilului la bordul de atac și la cel de fugă. Pentru a rezolva această problemă s-a elaborat o a doua metodă de determinare a coeficienților polinomului trigonometric ce se prezintă în continuare.

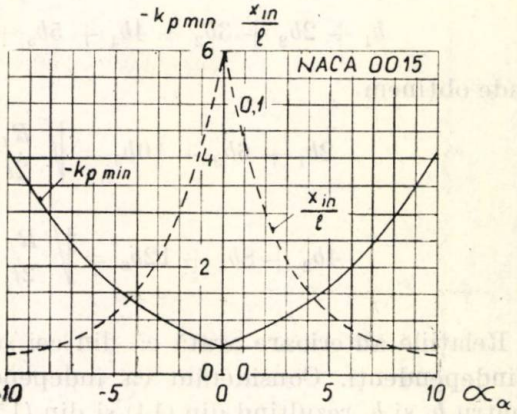


Fig. 5. — Caracteristica de sensibilitate la cavitație teoretică pentru profilul NACA 0015.

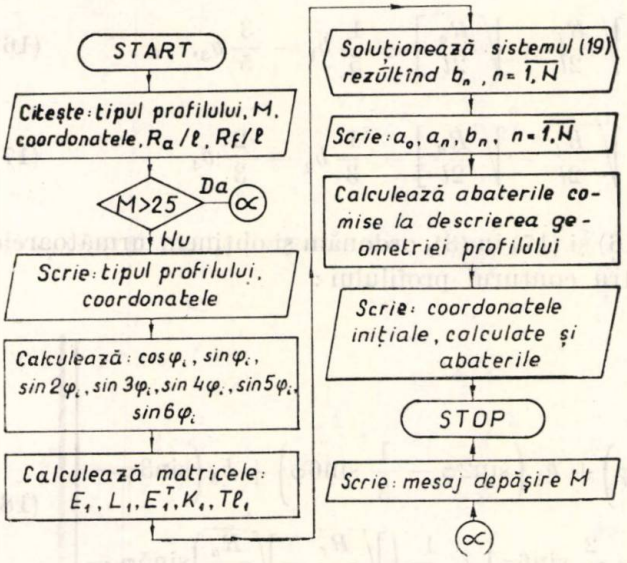

START
Citește: tipul profilului, M, coordonatele, R_a/ℓ, R_f/ℓ
M>25
Da
Nu
Scrie: tipul profilului, coordonatele
Calculează: $\cos\varphi_i$, $\sin\varphi_i$, $\sin 2\varphi_i$, $\sin 3\varphi_i$, $\sin 4\varphi_i$, $\sin 5\varphi_i$, $\sin 6\varphi_i$
Calculează matricele: E_i, L_i, E_i^T, K_i, $T\ell_i$
Soluționează sistemul (19) rezultînd b_n, $n=\overline{1,N}$
Scrie: a_0, a_n, b_n, $n=\overline{1,N}$
Calculează abaterile comise la descrierea geometriei profilului
Scrie: coordonatele inițiale, calculate și abaterile
STOP
Scrie: mesaj depășire M

Fig. 6. — Schema logică a programului elaborat pentru metoda a doua.

DETERMINAREA COEFICIENȚILOR POLINOMULUI TRIGONOMETRIC (METODA II)

Așa cum am arătat mai înainte, apare o tendință de modificare a grosimii la bordul de atac și la cel de fugă. Pentru a remedia acest neajuns se va ține cont că la bordul de atac și la cel de fugă profilul este rotunjit avînd razele relative de rotunjire R_a/l respectiv R_f/l.

Luînd în considerare relațiile (3) și definiția razei de curbură, rezultă pentru razele relative de rotunjire următoarele expresii :

$$b_1 - 2b_2 + 3b_3 - 4b_4 + 5b_5 - 6b_6 = \sqrt{\frac{R_a}{2l}}, \tag{12}$$

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5 + 6b_6 = \sqrt{\frac{R_f}{2l}}, \tag{13}$$

de unde obținem

$$2b_1 + 6b_3 + 10b_5 = \sqrt{\frac{R_f}{2l}} + \sqrt{\frac{R_a}{2l}}, \tag{14}$$

$$4b_2 + 8b_4 + 12b_6 = \sqrt{\frac{R_f}{2l}} - \sqrt{\frac{R_a}{2l}}. \tag{15}$$

Relațiile anterioare arată că din cei șase coeficienți b_n, doar patru sînt independenți. Considerăm ca independenți coeficienții b_1, b_2, b_3 și b_4, pentru b_5 și b_6 rezultînd din (14) și din (15) următoarele expresii :

$$b_5 = \frac{1}{10}\left[\sqrt{\frac{R_f}{2l}} + \sqrt{\frac{R_a}{2l}}\right] - \frac{1}{5}b_1 - \frac{3}{5}b_3, \tag{16}$$

$$b_6 = \frac{1}{12}\left[\sqrt{\frac{R_f}{2l}} - \sqrt{\frac{R_a}{2l}}\right] - \frac{1}{3}b_2 - \frac{2}{3}b_4 \tag{17}$$

Înlocuim relațiile (16) și (17) în (3), ordonăm și obținem următoarele ecuații parametrice pentru conturul profilului :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\xi}{l} &= \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi) \\
\frac{\eta}{l} &= b_1\left(\sin\varphi - \frac{1}{5}\sin 5\varphi\right) + b_2\left(\sin 2\varphi - \frac{1}{3}\sin 6\varphi\right) + b_3\left(\sin 3\varphi - \right. \\
&\left. - \frac{3}{5}\sin 5\varphi\right) + b_4\left(\sin 4\varphi - \frac{2}{3}\sin 6\varphi\right) + \frac{1}{10}\left(\sqrt{\frac{R_f}{2l}} + \sqrt{\frac{R_a}{2l}}\right)\sin 5\varphi + \\
&+ \frac{1}{12}\left(\sqrt{\frac{R_f}{2l}} - \sqrt{\frac{R_a}{2l}}\right)\sin 6\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Coeficienții b_1, b_2, b_3, b_4 se vor determina tot prin metoda celor mai mici pătrate. Din condiții analoage relațiilor (4), (5) și (6) rezultă următo-

5

rul sistem :

$$\left[\left(\sin\varphi_i - \frac{1}{5}\sin 5\varphi_i\right)\left(\sin\varphi_i - \frac{1}{5}\sin 5\varphi_i\right)\right] b_1 + \left[\left(\sin\varphi_i - \frac{1}{5}\sin 5\varphi_i\right)\left(\sin 2\varphi_i - \frac{1}{3}\sin 6\varphi_i\right)\right] b_2 + \left[\left(\sin\varphi_i - \frac{1}{5}\sin 5\varphi_i\right)\left(\sin 3\varphi_i - \frac{3}{5}\sin 5\varphi_i\right)\right] b_3 + \left[\left(\sin\varphi_i - \frac{1}{5}\sin 5\varphi_i\right)\left(\sin 4\varphi_i - \frac{2}{3}\sin 6\varphi_i\right)\right] b_4 = \left[\left(\sin\varphi_i - \frac{1}{5}\sin 5\varphi_i\right)\left(\frac{y_i}{l} + C_1 \sin 5\varphi_i + C_2 \sin 6\varphi_i\right)\right]$$

$$\left[\left(\sin 2\varphi_i - \frac{1}{3}\sin 6\varphi_i\right)\left(\sin\varphi_i - \frac{1}{5}\sin 5\varphi_i\right)\right] b_1 + \left[\left(\sin 2\varphi_i - \frac{1}{3}\sin 6\varphi_i\right)\left(\sin 2\varphi_i - \frac{1}{3}\sin 6\varphi_i\right)\right] b_2 + \left[\left(\sin 2\varphi_i - \frac{1}{3}\sin 6\varphi_i\right)\left(\sin 3\varphi_i - \frac{3}{5}\sin 5\varphi_i\right)\right] b_3 + \left[\left(\sin 2\varphi_i - \frac{1}{3}\sin 6\varphi_i\right)\left(\sin 4\varphi_i - \frac{2}{3}\sin 6\varphi_i\right)\right] b_4 = \left[\left(\sin 2\varphi_i - \frac{1}{3}\sin 6\varphi_i\right)\left(\frac{y_i}{l} + C_1 \sin 5\varphi_i + C_2 \sin 6\varphi_i\right)\right] \quad 19)$$

$$\left[\left(\sin 3\varphi_i - \frac{3}{5}\sin 5\varphi_i\right)\left(\sin\varphi_i - \frac{1}{5}\sin 5\varphi_i\right)\right] b_1 + \left[\left(\sin 3\varphi_i - \frac{3}{5}\sin 5\varphi_i\right)\left(\sin 2\varphi_i - \frac{1}{3}\sin 6\varphi_i\right)\right] b_2 + \left[\left(\sin 3\varphi_i - \frac{3}{5}\sin 5\varphi_i\right)\left(\sin 3\varphi_i - \frac{3}{5}\sin 5\varphi_i\right)\right] b_3 + \left[\left(\sin 3\varphi_i - \frac{3}{5}\sin 5\varphi_i\right)\left(\sin 4\varphi_i - \frac{2}{3}\sin 6\varphi_i\right)\right] b_4 = \left[\left(\sin 3\varphi_i - \frac{3}{5}\sin 5\varphi_i\right)\left(\frac{y_i}{l} + C_1 \sin 5\varphi_i + C_2 \sin 6\varphi_i\right)\right]$$

$$\left[\left(\sin 4\varphi_i - \frac{2}{3}\sin 6\varphi_i\right)\left(\sin\varphi_i - \frac{1}{5}\sin 5\varphi_i\right)\right] b_1 + \left[\left(\sin 4\varphi_i - \frac{2}{3}\sin 6\varphi_i\right)\left(\sin 2\varphi_i - \frac{1}{3}\sin 6\varphi_i\right)\right] b_2 + \left[\left(\sin 4\varphi_i - \right.\right.$$

$$-\frac{2}{3}\sin 6\varphi_i\Big)\Big(\sin 3\varphi_i-\frac{3}{5}\sin 5\varphi_i\Big)\Big]b_3+\Big[\Big(\sin 4\varphi_i-$$
$$-\frac{2}{3}\sin 6\varphi_i\Big)\Big(\sin 4\varphi_i-\frac{2}{3}\sin 6\varphi_i\Big)\Big]b_4=\Big[\Big(\sin 4\varphi_i-$$
$$-\frac{2}{3}\sin 6\varphi_i\Big)\Big(\frac{y_i}{l}+C_1\sin 5\varphi_i+C_2\sin 6\varphi_i\Big)\Big]$$

unde:

$$C_1=-\frac{1}{10}\left(\sqrt{\frac{R_f}{2l}}+\sqrt{\frac{R_a}{2l}}\right) \tag{20}$$

$$C_2=-\frac{1}{12}\left(\sqrt{\frac{R_f}{2l}}-\sqrt{\frac{R_a}{2l}}\right) \tag{21}$$

Introducem matricele

$$E_1=\begin{Vmatrix} \sin\varphi_1-\frac{1}{5}\sin 5\varphi_1 & \sin\varphi_2-\frac{1}{5}\sin 5\varphi_2\ldots\sin\varphi_M-\frac{1}{5}\sin 5\varphi_M \\ \sin 2\varphi_1-\frac{1}{3}\sin 6\varphi_1 & \sin 2\varphi_2-\frac{1}{3}\sin 6\varphi_2\ldots\sin 2\varphi_M-\frac{1}{3}\sin 6\varphi_M \\ \sin 3\varphi_1-\frac{3}{5}\sin 5\varphi_1 & \sin 3\varphi_2-\frac{3}{5}\sin 5\varphi_2\ldots\sin 3\varphi_M-\frac{3}{5}\sin 5\varphi_M \\ \sin 4\varphi_1-\frac{2}{3}\sin 6\varphi_1 & \sin 4\varphi_2-\frac{2}{3}\sin 6\varphi_2\ldots\sin 4\varphi_M-\frac{2}{3}\sin 6\varphi_M \end{Vmatrix} \tag{22}$$

și

$$L_1=\begin{Vmatrix} \frac{y}{l}+C_1\sin 5\varphi_1+C_2\sin 6\varphi_1 \\ \frac{y_2}{l}+C_1\sin 5\varphi_2+C_2\sin 6\varphi_2 \\ \vdots \\ \frac{y_M}{l}+C_1\sin 5\varphi_M+C_2\sin 6\varphi_M \end{Vmatrix} \tag{23}$$

Fie E_1^T matricea transpusă matricei E_1. Ordinele matricelor introduse sînt: $E_1(4, M)$, $L_1(M, 1)$, $E_1^T(M, 4)$.

Tabelul 3

Coeficienții polinomului trigonometric calculați cu metoda a doua

Coeficienții / Date profil	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	ε_{max} ⟨%⟩
NACA 0015 $\frac{R_a}{l} = 0{,}0232$ $\frac{R_f}{l} = 0{,}00042$	$6{,}54074 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}08160 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}01304 \cdot 10^{-3}$	$-8{,}21287 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}54179 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}81481 \cdot 10^{-4}$	0,393
Gö 459 $\frac{R_a}{l} = 0{,}014$ $\frac{R_f}{l} = 0{,}00040$	$5{,}62455 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}65270 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}94735 \cdot 10^{-3}$	$-5{,}25285 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}99882 \cdot 10^{-4}$	$6{,}55440 \cdot 10^{-5}$	2,905
Gö 459 $\frac{R_a}{l} = 0{,}0139$ $\frac{R_f}{l} = 0{,}00040$	$5{,}62421 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}65246 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}95887 \cdot 10^{-3}$	$-5{,}17507 \cdot 10^{-4}$	$-3{,}22211 \cdot 10^{-4}$	$8{,}44808 \cdot 10^{-5}$	2,607
Gö 459 $\frac{R_a}{l} = 0{,}0139$ $\frac{R_f}{l} = 0{,}00042$	$5{,}62452 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}65175 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}94531 \cdot 10^{-3}$	$-5{,}03656 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}96010 \cdot 10^{-4}$	$1{,}01995 \cdot 10^{-4}$	2,617
Gö 459 $\frac{R_a}{l} = 0{,}0139$ $\frac{R_f}{l} = 0{,}00044$	$5{,}62482 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}65106 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}93207 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}90132 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}70486 \cdot 10^{-4}$	$1{,}19038 \cdot 10^{-4}$	2,626

Tabe

Comparație între geometria profilului Gö 459 dată

Datele de catalog	x	0	1,25	2,50	5,00	7,50	10	15
	y	0	1,80	2,65	3,60	4,30	4,85	5,55
Geometrie calculată cu metoda 1	Y_c	0	1,873	2,615	3,603	4,294	4,819	5,555
	$\varepsilon\langle\%\rangle$	0	4,032	−1,312	0,090	−0,141	−0,649	0,084
Geometrie calculată cu metoda 2 $R_a/l = 0{,}014$ $R_f/l = 0{,}0004$	Y_c	0	1,852	2,592	3,583	4,281	4,814	5,562
	$\varepsilon\langle\%\rangle$	0	2,905	−2,186	−0,462	−0,433	−0,745	0,221
Geometrie calculată cu metoda 2 $R_a/l = 0{,}0139$ $R_f/l = 0{,}0004$	Y_c	0	1,847	2,586	3,579	4,279	4,813	5,565
	$\varepsilon\langle\%\rangle$	0	2,607	−2,411	−0,594	−0,494	−0,755	0,263
Geometrie calculată cu metoda 2 $R_a/l = 0{,}0139$ $R_f/l = 0{,}00042$	Y_c	0	1,847	2,587	3,579	4,280	4,814	5,565
	$\varepsilon\langle\%\rangle$	0	2,617	−2,395	−0,571	−0,469	−0,735	0,268
Geometrie calculată cu metoda 2 $R_a/l = 0{,}0139$ $R_f/l = 0{,}00044$	Y_c	0	1,847	2,587	3,580	4,281	4,815	5,565
	$\varepsilon\langle\%\rangle$	0	2,626	−2,379	−0,548	−0,446	−0,715	0,274

Matricea coeficienților sistemului (19) este

$$K_1 = E_1 \cdot E_1^T \tag{24}$$

iar matricea coloană a termenilor liberi este

$$Tl_1 = E_1 \cdot L_1 \tag{25}$$

Ca și mai înainte problema s-a soluționat cu ajutorul calculatorului utilizînd schema logică prezentată în figura 6.

Metoda expusă s-a aplicat pentru profilele Gö 459 și NACA 0015, întrucît acestea au avut abaterile geometrice cele mai mari prezentate în tabelul 2, primul profil aparținînd clasei profilelor empirice, iar al doilea profilelor calculate. În tabelul 3 se prezintă valorile coeficienților b_n calculate cu această a doua metodă pentru profilele indicate. În același tabel se indică valorile razelor relative de rotunjire R_a/l și R_f/l utilizate, precum și abaterea maximă obținută pentru geometria profilului. Remarcăm că valorile indicate pentru raza relativă R_a/l în tabelul 3 sînt mai mici decît cele indicate în [6]. Astfel în [6] se dă pentru profilul NACA 0015 valoarea

lul 4

în catalog și cea calculată cu coeficienții stabiliți anterior

20	30	40	50	60	70	80	90	95	100
6,00	6,35	6,50	5,80	5,05	4,05	2,90	1,60	0,90	0
6,011	6,382	6,265	5,799	5,053	4,069	2,889	1,586	0,915	0
0,181	0,507	−0,557	−0,020	0,057	0,457	−0,366	−0,870	1,634	0
6,024	6,389	6,259	5,789	5,051	4,078	2,898	1,576	0,893	0
0,395	0,608	−0,653	−0,185	0,028	0,690	−0,058	−1,526	−0,749	0
6,027	6,389	6,257	5,788	5,052	4,080	2,898	1,574	0,892	0
0,444	0,616	−0,683	−0,209	0,043	0,732	−0,054	−1,633	−0,889	0
6,026	6,387	6,257	5,789	5,054	4,078	2,895	1,575	0,898	0
0,433	0,590	−0,688	−0,182	0,073	0,703	−0,161	−1,538	−0,208	0
6,025	6,386	6,256	5,791	5,055	4,077	2,892	1,577	0,904	0
0,422	0,566	−0,693	−0,156	0,102	0,675	−0,266	−1,445	0,457	0

lui $R_a/l = 1{,}1 \cdot \left(\frac{d}{l}\right)^2 = 0{,}02475$, iar pentru profilul Gö 459 valoarea $R_a/l =$

$= 1{,}2 \cdot \left(\frac{d}{l}\right)^2 = 0{,}0193548$. Dacă se utilizează pentru R_a/l valorile indicate în [6] abaterile de la geometrie sînt mult mai mari decît valorile indicate pentru abaterile de la geometrie date în tabelul 2. Valorile pentru R_a/l date în tabelul 3 s-au stabilit astfel încît abaterile de la geometria profilului să fie cît mai mici, abaterile maxime fiind indicate în tabelul 3. Rotunjirea la bordul de fugă a fost întrucîtva arbitrară, valoarea lui R_f/l stabilindu-se pentru o aproximare cît mai bună în zona bordului de fugă. Remarcăm că în privința aproximării geometriei profilului abaterile maxime obținute cu metoda a doua s-au redus practic la jumătate față de valorile indicate în tabelul 2. Observația anterioară referitoare la domeniul de valabilitate al abaterii maxime privind profilele NACA rămîne în vigoare.

Pentru a avea o imagine clară asupra modului în care este aproximată geometria profilului, în tabelul 4 se prezintă pentru profilul Gö 459, geometria dată în catalog, calculată cu metoda întîia și cu metoda a doua precum și abaterile corespunzătoare.

Faptul că utilizînd cele două metode obținem două serii de valori pentru coeficienții b_n, a condus la ideea de a verifica influența asupra caracteristicilor energetice și cavitaționale în cele două cazuri. Calculul s-a efectuat teoretic conform metodei [4] și a programului descris în [5] pentru profilul Gö 459.

În tabelul 5 se prezintă comparativ caracteristicile energetice și cavitaționale ale profilului Gö 459 determinate teoretic. Rezultă că efectul luării în considerare a razei de curbură la bordul de atac și de fugă se simte în special asupra caracteristicii de sensibilitate la cavitație, atît în valoarea coeficientului de presiune minim cît și în locul unde apare acest minim.

Tabelul 5

Comparație între caracteristicile energetice și cavitaționale ale profilului Gö 459 determinate teoretic [4, 5] utilizînd coeficienții determinați anterior

Profil	α_∞ ⟨grade⟩	C_z	C_m	$-k_{p\,\min}$	$\frac{x_{in}}{l}$
Gö 459	10	1,12401	0,28885	5,55962	$2,1619 \cdot 10^{-3}$
metoda întîia	8	0,90086	0,23279	3,76044	$3,3943 \cdot 10^{-3}$
	6	0,67661	0,17559	2,35157	$6,0356 \cdot 10^{-3}$
	4	0,45153	0,11754	1,33908	$1,3370 \cdot 10^{-2}$
	2	0,22590	0,05891	0,72044	$4,4483 \cdot 10^{-2}$
	0	0	0	0,41292	$1,3749 \cdot 10^{-1}$
Gö 459	10	1,12192	0,28782	5,63883	$1,9964 \cdot 10^{-3}$
metoda a doua	8	0,89918	0,23196	3,79854	$3,1419 \cdot 10^{-3}$
$\frac{R_a}{l} = 0,014$	6	0,67535	0,17496	2,35832	$5,6218 \cdot 10^{-3}$
	4	0,45069	0,11712	1,32598	$1,2692 \cdot 10^{-2}$
$\frac{R_f}{l} = 0,0004$	2	0,22548	0,05870	0,70732	$4,7725 \cdot 10^{-2}$
	0	0	0	0,41539	$1,4547 \cdot 10^{-1}$
Gö 459	10	1,12192	0,28782	5,66297	$1,9516 \cdot 10^{-3}$
metoda a doua	8	0,89918	0,23195	3,81041	$3,0731 \cdot 10^{-3}$
$\frac{R_a}{l} = 0,0139$	6	0,67535	0,17496	2,36083	$5,5018 \cdot 10^{-3}$
	4	0,45069	0,11712	1,32254	$1,2508 \cdot 10^{-2}$
$\frac{R_f}{l} = 0,0004$	2	0,22548	0,05870	0,70419	$4,9016 \cdot 10^{-2}$
	0	0	0	0,41633	$1,4683 \cdot 10^{-1}$
Gö 459	10	1,12269	0,28819	5,66541	$1,9486 \cdot 10^{-3}$
metoda a doua	8	0,89979	0,23226	3,81169	$3,0692 \cdot 10^{-3}$
$\frac{R_a}{l} = 0,0139$	6	0,67581	0,17519	2,36125	$5,4921 \cdot 10^{-3}$
	4	0,45100	0,11727	1,32252	$1,2511 \cdot 10^{-2}$
$\frac{R_f}{l} = 0,00042$	2	0,22564	0,05878	0,70458	$4,9275 \cdot 10^{-2}$
	0	0	0	0,41659	$1,4611 \cdot 10^{-1}$
Gö 459	10	1,12343	0,28856	5,66779	$1,9461 \cdot 10^{-3}$
metoda a doua	8	0,90039	0,23255	3,81293	$3,0652 \cdot 10^{-3}$
$\frac{R_a}{l} = 0,0139$	6	0,67625	0,17541	2,36166	$5,4921 \cdot 10^{-3}$
	4	0,45129	0,11742	1,32250	$1,2514 \cdot 10^{-2}$
$\frac{R_f}{l} = 0,00044$	2	0,22578	0,05885	0,70496	$4,9531 \cdot 10^{-2}$
	0	0	0	0,41684	$1,4543 \cdot 10^{-1}$

CONCLUZII

Se prezintă două metode de determinare a coeficienților polinomului trigonometric pentru un profil simetric, luînd în considerare toate punctele sale, metoda a doua luînd în considerare în plus și razele relative de rotunjire la bordul de atac și la cel de fugă.

Ambele metode au fost programate pe calculatoare de tip Felix C 256 și HP 9845 în limbaj FORTRAN și respectiv BASIC.

S-a aplicat metoda întîia la un număr de zece profile indicîndu-se valorile coeficienților b_n obținuți (tabelul 1), precum și abaterile maxime ce apar (tabelul 2).

Se prezintă comparativ pentru un profil NACA 0015 repartiția de presiuni ($\alpha_\infty = 8°$) și caracteristica de portanță stabilite pe cale teoretică [4, 5] și experimental [6].

Se completează caracteristicile aerodinamice date în catalog [6] pentru profilul NACA 0015 cu caracteristica de sensibilitate la cavitație stabilită teoretic (fig. 5).

Se analizează influența luării în considerare a razei relative de rotunjire la bordul de atac și la cel de fugă asupra geometriei profilului (tabelul 3 și 4) arătîndu-se că acestea influențează în special asupra caracteristicilor cavitaționale (tabelul 5).

Utilizînd metoda a doua abaterile geometriei calculate s-au redus practic la jumătate față de prima metodă.

Folosirea unor raze de rotunjire incorecte conduce însă la abateri mai mari în geometria profilului decît dacă se folosește metoda întîia.

Apar diferențe între valorile razelor de rotunjire indicate în catalog [6] și cele utilizate în calcul.

Primit în redacție la 29 iulie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. V. ANCUȘA, *Determinarea coeficienților polinomului trigonometric pentru un profil aerodinamic*, Buletinul I. P. „Traian Vuia" Timișoara, Seria Mecanică, **19(33)**, 2 (1974)
2. P. F. FIL'ČAKOV, *Čislennye i grafičeskie metody prikladnoj matematiki*, Naukova Dumka, Kiev, 1970, p. 662–665.
3. R. W. HAMMING, *Numerical Methods for Scientist and Engineers*, Mc. Graw Hill Book Company Inc., New York, San Francisco, Toronto, London, 1962, § 6.5, cap. 17.
4. O. POPA, *The Determination of a General Relation Between the Aerodynamic Properties of a Single Airfoil and Those of the Same Airfoil Arranged in an Arbitrary Cascade*, Proceedings of the Fourth Conference on Fluid Machinery, Budapest, September 1972, p. 1015–1030.
5. O. POPA, V. ANCUȘA, M. TĂMAȘ, *Determinarea caracteristicilor hidrodinamice și cavitaționale ale unui profil izolat de formă arbitrară utilizînd un calculator electronic numeric*, Buletinul I. P. „Traian Vuia" Timișoara, Seria Mecanică, **18(32)**, 2 (1973).
6. F. W. RIEGELS, *Aerodynamische Profile*, R. Oldenbourg, München, 1958.

METODĂ ANALITICĂ DE PROIECTARE AERODINAMICĂ A ELICEI TRACTIVE

de S. GĂLEȚUȘE

Institutul Politehnic, București

Pentru un calcul preliminar, rapid, al unei elici tractive se prezintă o metodă aproximativă analitică bazată pe caracteristicile unei elici fictive cu număr infinit de pale. S-au utilizat rezultate numerice pentru elicea cu număr finit de pale și s-a dedus o formulă pentru calculul coeficientului global de corecție și a razei echivalente a elicei fictive.

NOTAȚII

φ — unghi de așezare față de planul de rotație;
α_{ef} — incidența efectivă față de axa de portanță nulă;
W — viteza axială
Ω — viteza unghiulară de rotație
V — viteza totală reală
v, ω — viteze induse de pînza de vîrtejuri
R — raza discului elicei
$\Lambda_0 = W/R\Omega = \operatorname{tg} B_0$ — pas geometric la extremitate
$\Lambda = (W + w)/R(\Omega - \omega)$ — pasul aerodinamic la extremitate
$\operatorname{tg}\beta = (W + w)/r(\Omega - \omega)$ — pas aerodinamic local
C_z — coeficient de portanță
C_x — coeficient de rezistență
T — tractiva elicei
M — momentul rezistent
c — coarda profilului
N — nr. de pale
$\bar{w} = w/W$
$\bar{\omega} = \omega/\Omega$
$\bar{c} = c/R$
$\bar{r} = r/R$
$\sigma = Nc/2\pi r$
$\bar{T} = 2T/\rho(R\Omega)^2\pi R^2$
$\bar{M} = 2M/\rho(R\Omega)^2\pi R^2 \cdot R$

Într-o lucrare anterioară [1] s-au dedus formulele pentru vitezele induse $\bar{w}$, $\bar{\omega}$ în cazul elicei cu număr finit de pale (valabile și în cazul elicii reale, cu fiecare)

$$\frac{\bar{w}}{1 + \bar{w}} = \frac{\sigma C_z \cos\beta}{4\varkappa \sin^2\beta}, \quad \frac{\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}} = \frac{\sigma C_z}{4\varkappa \cos\beta}, \tag{1}$$

unde $\varkappa$ este coeficientul de corecție al lui Prandtl [2],

$$\varkappa = \frac{2}{\pi} \arccos e^{-\frac{\Lambda}{2}\frac{(1-\bar{r})}{\sin B}}. \tag{2}$$

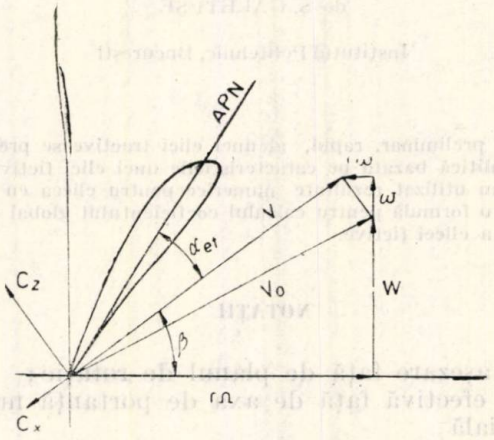


Fig. 1

Din prima relație (1) se poate deduce portanța elementară pentru un element de pală dr

$$dP = \frac{4\pi\rho\varkappa(W + w)wr\,dr}{\cos\beta}. \tag{3}$$

Cu această expresie (2) și ținînd seama de relația geometrică (fig. 1)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{rw}{v} \tag{4}$$

se pot deduce tracțiunea adimensională și momentul adimensional sub forma

$$\begin{aligned} \bar{T} &= 8\Lambda_0^2\left[\int_0^1 \varkappa(1 + \bar{w})\bar{w}\bar{r}\,d\bar{r} - \frac{\mu_m}{\Lambda_0}\int_0^1 \varkappa(1 + \bar{w})\bar{r}^2\bar{\omega}\,d\bar{r}\right], \\ \bar{M} &= 8\Lambda_0\left[\int_0^1 \varkappa(1 + \bar{w})\omega\bar{r}^3\,d\bar{r} + \mu_m\Lambda_0\int_0^1 \varkappa(1 + \bar{w})\bar{w}\bar{r}^2\,d\bar{r}\right], \end{aligned} \tag{5}$$

unde μ_m este raportul C_x/C_z la finețea maximă a profilului aerodinamic utilizat (s-a presupus constant în lungul razei). Condiția de optim al elicei

tractive, chiar dacă se ia în considerare frecarea rămîne aproximativ aceeași [1], [3] cu cea de la elicea ideală și anume randamentul indus η_i^* să fie constant în lungul razei.

În plus profilul trebuie să fie plasat peste tot la incidența efectivă corespunzătoare finețeI maxime. În aceste condiții vitezele $\bar{w}$, $\bar{\omega}$ funcție de randamentul indus sînt

$$\bar{w} = \frac{(1 - \eta_i^*)\bar{r}\eta_i^*}{\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2}\bar{r}^2}, \quad \bar{\omega} = \frac{(1 - \eta_i^*)\Lambda_0^2}{\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2}\bar{r}^2}. \tag{6}$$

Tracțiunea adimensională $\bar{T}$ și momentul adimensional $\bar{M}$ pot fi calculate, după înlocuirea relațiilor (6) în (5), numai prin integrare numerică deoarece $\varkappa$ are forma destul de complicată (2). Pentru a se putea efectua un calcul rapid în vederea proiectării aerodinamice a elicei tractive se propune o cale aproximativă utilizînd caracterisitcile unei elici fictive cu număr infinit de pale. Pentru aceasta se consideră integralele (5) sub forma

$$\bar{T} = K\bar{T}_e, \quad \bar{M} = K\bar{M}_e, \tag{7}$$

în care $\bar{T}_e$, $\bar{M}_e$ corespund elicei echivalente ($N = \infty$, $\varkappa = 1$)

$$\bar{T}_e = \frac{4\Lambda_0^2(1 - \eta_i^*)}{\eta_i^{*2}}(\mathscr{A} - \mu_m\mathscr{B}), \quad \bar{M}_e = \frac{4\Lambda_0^2(1 - \eta_i^*)}{\eta_i^{*3}}(\mathscr{A} + \mu_m\mathscr{C}), \tag{8}$$

unde $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ sînt

$$\mathscr{A} = \frac{\Lambda_0^2(2 - \eta_i^*) + \eta_i^{*2}}{\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2}} - \frac{(2 - \eta_i^*)\Lambda_0^2}{\eta_i^{*2}} \ln\frac{\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2}}{\Lambda_0^2},$$

$$\mathscr{B} = \Lambda_0 \frac{\Lambda_0^2(3 - \eta_i^*) + 2\eta_i^{*2}}{\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2}} - \frac{\Lambda_0^2(3 - \eta_i^*)}{\eta_i^{*2}} \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta_i^*}{\Lambda_0}, \tag{9}$$

$$\mathscr{C} = \frac{\Lambda_0^4(9\eta_i^* - 15) + 2\Lambda_0^2\eta_i^{*2}(3\eta_i^* - 5) + 2\eta_i^{*4}}{3\eta_i^*\Lambda_0(\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2})} + \frac{\Lambda_0^2}{\eta_i^{*2}}(5 - 3\eta_i^*)\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta_i^*}{\Lambda_0}.$$

Randamentul elicei echivalente devine atunci

$$\eta = \eta_i^* \frac{\mathscr{A} - \mu_m\mathscr{B}}{\mathscr{A} + \mu_m\mathscr{C}}. \tag{10}$$

Pentru a putea propune o relație analitică a coeficientului K s-au dedus valorile acestuia prin calculul numeric al integralelor (5) și s-au notat

$$KT = \frac{\bar{T}}{\bar{T}_e}, \quad KM = \frac{\bar{M}}{\bar{M}_e}. \tag{11}$$

Analizînd valorile acestora (tabelul 1) se propune pentru K forma

$$K = \int_0^1 \left(1 - \frac{1,5}{A}\,\bar{r}\right) \varkappa \, d\bar{r}, \tag{12}$$

Tabelul 1

Comparația între coeficienții de corecție calculați pe diferite căi.

	η_i^*	KT numeric	KM numeric	K relația (14)	K relația (15)
$N = 2$	0,6	0,6349	0,6341	0,6285	0,6326
$\Lambda_0 = 0,2$	0,7	0,6734	0,6723	0,6688	0,6746
	0,8	0,7315	0,7304	0,7017	0,7081
	0,9	0,7326	0,7311	0,7291	0,7354
$N = 2$	0,6	0,7860	0,7839	0,7882	0,7938
$\Lambda_0 = 0,1$	0,7	0,8137	0,8113	0,8153	0,8204
	0,8	0,8359	0,8324	0,8363	0,8409
	0,9	0,8518	0,8491	0,8531	0,8572
$N = 3$	0,6	0,7172	0,7164	0,7357	0,742
$\Lambda_0 = 0,2$	0,7	0,7522	0,7511	0,7666	0,7726
	0,8	0,7802	0,7790	0,7914	0,7969
	0,9	0,8029	0,8016	0,8115	0,8166

unde A este

$$A = \frac{N}{2 \sin B}. \tag{13}$$

Integrala (12) poate fi calculată analitic și se obține

$$K = 1 - \frac{0,75}{A} - \frac{2}{\pi A}\left(1 - \frac{1}{e^A}\right)\left(1 - \frac{1,5}{A} + \frac{1,5}{A^2}\right) -$$

$$- \frac{1}{9\pi A}\left(1 - \frac{1}{e^{3A}}\right)\left(1 - \frac{1,5}{A} + \frac{1,5}{3A^2}\right) - \tag{14}$$

$$- \frac{0,03}{\pi A}\left(1 - \frac{1}{e^{5A}}\right)\left(1 - \frac{1,5}{A} + \frac{1,5}{5A^2}\right) + \frac{3}{\pi A^2 e^A} + \frac{1}{6\pi A^2 e^{3A}} + \frac{0,045}{\pi A^2 e^{5A}}.$$

Ținînd seama de valorile fiecărui termen se propune o formă simplificată

$$K = 1 - \frac{0,75}{A} - \frac{2}{\pi A}\left(1 - \frac{1}{e^A}\right)\left(1 - \frac{1,5}{A} + \frac{1,5}{A^2}\right). \tag{15}$$

Din tabelul 1 se constată că formulele propuse (14) și eventual cea simplificată (15) dau valori acceptabile față de valorile obținute numeric.

Modul de utilizare a metodei este următorul:

— Să presupunem că tracțiunea necesară este T_1 pentru o viteză de zbor W. Dînd o anumită valoare a razei R și cunoscînd turația la axul elicei se determină Λ_0 și $\bar{T}_1$. Eventual tracțiunea $\bar{T}_1$ se corectează ținînd seama de existența butucului (pînă la raza r_b),

$$\bar{T} = \frac{\bar{T}_1}{1 - \bar{r}_b^2}; \tag{16}$$

— Pentru tracțiuni absolute egale T se calculează tracțiunea adimensională $\bar{T}_e$ a elicei fictive (cu număr infinit de pale)

$$\bar{T}_e = \frac{\bar{T}}{K}, \tag{17}$$

unde K se calculează cu formula (15);

— Raza elicei echivalente și viteza W_e pentru care avem același pas de deplasare Λ_0 sînt

$$R_e = R\sqrt[4]{K}, \quad W_e = W\frac{R_e}{R}; \tag{18}$$

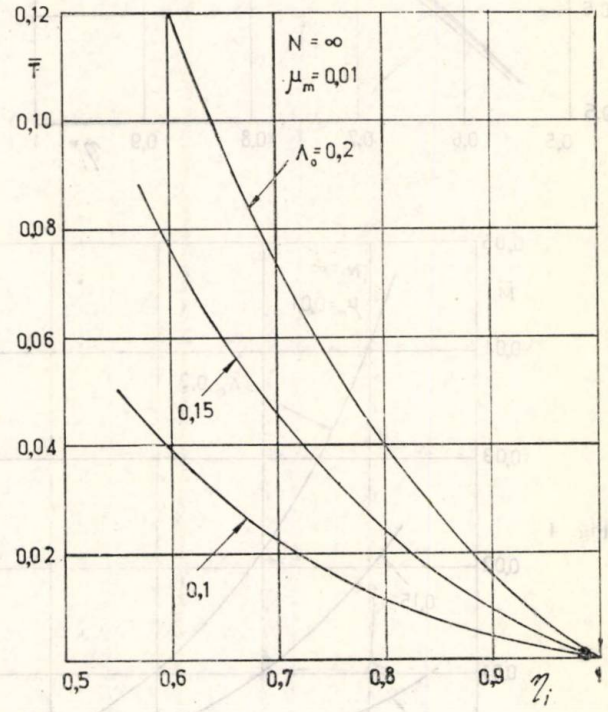


Fig. 2

— Cu ajutorul primei formule (8) sau din diagrame de tipul celei prezentate în figura 2 se determină η_i^* pentru $\bar{T}_e$ dat de (17);

În condițiile Λ_0 același și η_i^* același toată geometria unghiurilor este identică (pentru $\bar{r} \in [0,1]$) pentru elicea reală și cea fictivă.

— Randamentul global η este deasemeni același pentru cele două elici $\eta = \eta_e$. Se poate calcula cu formula (10) sau se obține din figura 3;

— Cu formula doua (8) se poate acum calcula $\overline{M}_e$ sau obține grafic din figura 4.

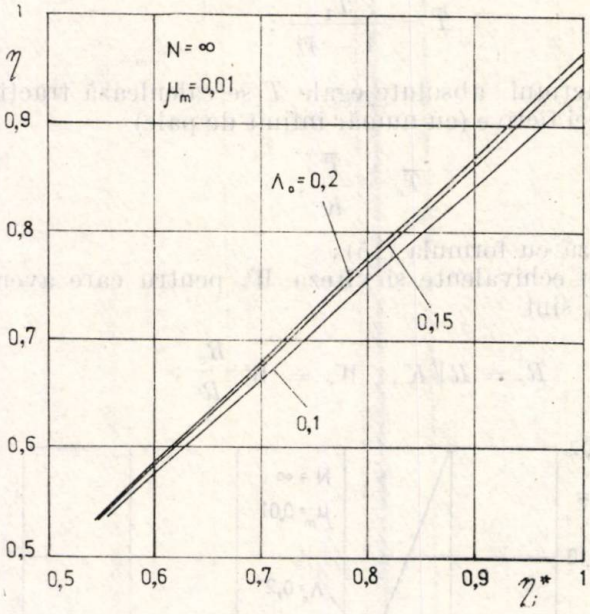


Fig. 3

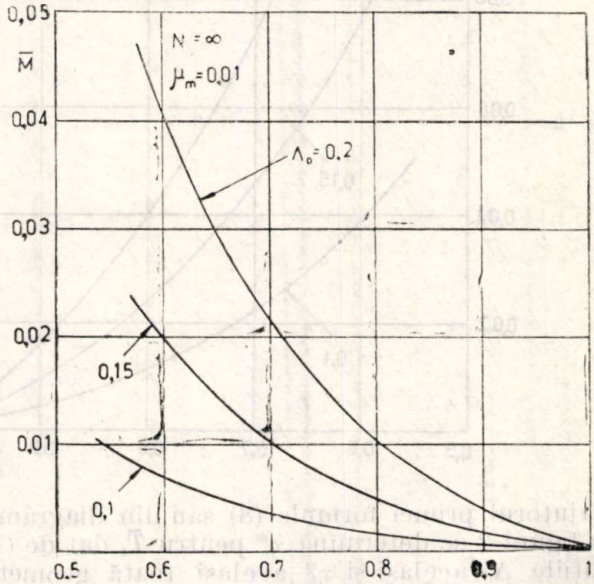


Fig. 4

— Se determină M_e ţinînd seama de definiţia formei adimensionale $\bar{M}_e$;

— Acum se poate calcula momentul M pentru elicea reală

$$M = M_e \frac{R}{R_e} \tag{19}$$

şi puterea necesară la arborele elicei.

— Se reia calculul pentru mai multe valori iniţiale R pentru a obţine un grafic putere necesară funcţie de R. Acest grafic prezintă de regulă un minim care determină soluţia problemei.

Se poate întîmpla ca din consideraţii tehnice (de exemplu garda la sol sau evitarea funcţionării în domeniul compresibil) să se aleagă o altă rază R puţin diferită de cea optimă (η maxim).

Avînd datele finale R, Λ_0, η_i^* se obţine răsucirea palei faţă de planul de rotaţie din

$$\varphi = \beta + \alpha_{\mu m} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\Lambda_0}{\bar{r}\,\eta_i^*}\right) + \alpha_{\mu m}, \tag{20}$$

unde $\alpha_{\mu m}$ este incidenţa efectivă corespunzătoare lui (C_x/C_z) minim şi variaţia corzii în lungul razei

$$\bar{c} = \frac{8\pi\varkappa(1 - \eta_i^*)\Lambda_0^2\bar{r}}{NC_z(\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2}\bar{r}^2)\sqrt{\Lambda_0^2 + \eta_i^{*2}\bar{r}^2}} \tag{21}$$

unde C_z se va lua tot pentru (C_x/C_z) minim.

Primit în redacţie la 10 aprilie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. S. GĂLEŢUŞE, *Asupra adaptării optime a elicei la avion*, St. cerc. mec. apl., **40**, *6* (1981).
2. H. GLAUERT, *Airplane Propellers*, în *Aerodynamic Theory*, vol. **IV**, ed. W. F. Durand, Berlin, 1935.
3. E. CARAFOLI, *Elici aeriene*, Litografia Institutului Politehnic Bucureşti, 1954.

CIOCNIREA SISTEMELOR DE RIGIDE ARTICULATE CILINDRIC

de ȘT. STAICU, R. DAMIAN și M. BUGARU

Institutul Politehnic București

Lucrarea determină, sub formă matriceală, ecuațiile ciocnirii unui sistem plan de rigide articulate, prin metoda grafului asociat. Aplicînd principiul vitezelor virtuale se stabilește o relație matriceală care permite calculul vitezelor pierdute pe perioada ciocnirii.

1. INTRODUCERE

În lucrare se stabilesc relațiile matriceale ale ciocnirii unui sistem plan deschis format din n corpuri, de mase m_s, care sînt legate prin articulații cilindrice O_s, utilizînd metoda grafului asociat.

Să considerăm un reper fix $O_0x_0y_0z_0$ (T_0) față de care se deplasează sistemul de corpuri $T_s (s = 1, 2, \ldots, n)$ solidare cu triedrele $O_sx_sy_sz_s$ (fig. 1). Sistemele de referință au originile O_s în planul director al mișcărilor, care coincide cu planul fix $O_0x_0y_0$.

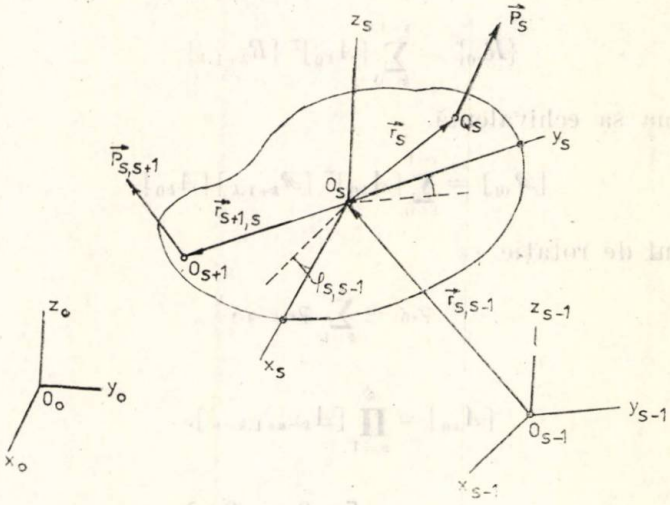


Fig. 1

Poziția rigidului T_s în raport cu reperul mobil T_{s-1} este precizată de coordonatele relative constante $x_{s,s-1}$, $y_{s,s-1}$ ale originii O_s și de unghiul relativ de rotație $\varphi_{s,s-1}$ dintre O_sx_s și $O_{s-1}x_{s-1}$. Parametrii absoluți ai aceluiași rigid T_s vor fi coordonatele x_{s0}, y_{s0} și unghiul φ_{s0} format de axele O_sx_s și O_0x_0. Ei formează matricele coloane

$$\{r_{s0}\} = \begin{bmatrix} x_{s0} \\ y_{s0} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_{s0}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{s0} \end{bmatrix}, \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

care pot constitui blocurile matricelor

$$\{R_{s0}\} = \left[\begin{array}{c} \{r_{s0}\} \\ \hline 0 \end{array}\right], \qquad \{\Lambda_{s0}\} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \{\lambda_{s0}\} \end{array}\right]. \tag{2}$$

Matricea ortogonală $[A_{s,s-1}]$ de trecere din reperul T_{s-1} în cel alăturat T_s este

$$[A_{s,s-1}] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_{s,s-1} & 0 \\ \hline 0 & [\alpha_{s,s-1}] \end{array}\right], \tag{3}$$

unde

$$[\alpha_{s,s-1}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{s,s-1} & \sin\varphi_{s,s-1} & 0 \\ -\sin\varphi_{s,s-1} & \cos\varphi_{s,s-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Poziția absolută a rigidului T_s este dată de matricea de poziție a originii O_s

$$\{R_{s0}\} = \sum_{k=0}^{s-1} [A_{k0}]^T \{R_{k+1,k}\} \tag{5}$$

sau de forma sa echivalentă

$$[\mathcal{R}_{s0}] = \sum_{k=0}^{s-1} [A_{k0}]^T [\mathcal{R}_{k+1,k}] [A_{k0}] \tag{6}$$

și de unghiul de rotație

$$\varphi_{s0} = \sum_{k=1}^{s} \varphi_{k,k-1}, \tag{7}$$

unde

$$[A_{k0}] = \prod_{u=1}^{k} [A_{k-u+1,k-u}]. \tag{8}$$

Operatorul

$$[\mathcal{R}_{k+1,k}] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline r_{k+1,k} & 0 \end{array}\right] \tag{9}$$

conține matricea antisimetrică

$$[\hat{r}_{k+1,k}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_{k+1,k} \\ 0 & 0 & -x_{k+1,k} \\ -y_{k+1,k} & x_{k+1,k} & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Viteza absolută a solidului T_s în punctul său O_s este exprimată de vectorul dual

$$\{v_{s0}\} = \left[\frac{\{\omega_{s0}\}}{\{v_{s0}\}}\right], \tag{1}$$

unde $\{v_{s0}\}$ este viteza articulației O_s, iar $\{\omega_{s0}\}$ este viteza unghiulară în jurul acestei articulații.

Matricea coloană $\{V_{s0}\}$ este exprimată în funcție de vitezele relative $\{V_{k,k-1}\}$ ale rigidelor T_k prin relația fundamentală [1]:

$$\{V_{s0}\} = \sum_{k=1}^{s-1} [A_{sk}](\{V_{k,k-1}\} + [\Omega_{k,k-1}] \sum_{q=k}^{s-1} [A_{qk}]^T \{R_{q+1,q}\}) + \{V_{s,s-1}\}, \tag{12}$$

unde matricele

$$[\Omega_{k,k-1}] = \left[\begin{array}{c|c} [\hat{\omega}_{k,k-1}] & 0 \\ \hline 0 & [\hat{\omega}_{k,k-1}] \end{array}\right], \quad \{\Omega_{k,k-1}\} = \left[\begin{array}{c} \\ \hline \{\omega_{k,k-1}\} \end{array}\right] \tag{13}$$

conțin matricele caracteristice ale vitezei unghiulare $\vec{\omega}_{k,k-1}$:

$$\hat{\omega}_{k,k-1}] = \dot{\varphi}_{k,k-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{\omega_{k,k-1}\} = \varphi_{k,k-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

2. ECUAȚIILE MATRICEALE ALE CIOCNIRII

Pentru a simplifica studiul ciocnirii sistemului se construiește gradul asociat, reprezentînd corpurile prin puncte materiale, iar legăturile prin segmente care unesc punctele respective (fig. 2).

Razei 10 a grafului îi corespunde o restricție exterioară $l_{10} = 2$, iar fiecărei laturi $s, s-1$ îi revine restricția interioară $l_{s+1,s} = 2$, deoarece legăturile sînt articulații cilindrice. Atunci mobilitatea lanțului cinematic va fi

$$\mu_{1n} = 3n - l_{10} - \sum_{s=1}^{n-1} l_{s+1,s} = n. \tag{15}$$

Prespunînd că legăturile sînt nedeformabile, rezultă că imaginea sistemului mecanic în spațiul grafului asociat corespunde unui sistem de particule legate prin fire inextensibile.

Considerînd cunoscute percuțiile $\vec{p}_s$ aplicate corpurilor T_s, se pot stabili niște

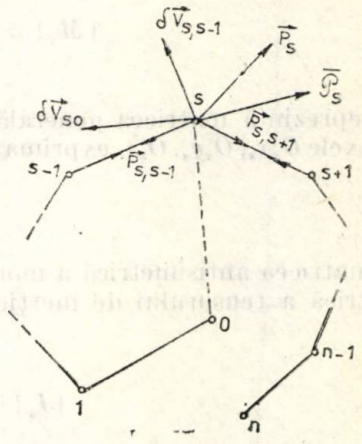


Fig. 2

relații care să permită studiul ciocnirii sistemului de rigide, dacă se utilizează metoda vitezelor virtuale.

Se notează cu

$$\{U_s\} = \left[\begin{array}{c} \{u_s\} \\ \hline 0 \end{array}\right] = [\alpha_s \quad \beta_s \, 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{16}$$

versorul direcției percuției $\vec{p}_s$ și cu

$$\{R_s\} = \left[\begin{array}{c} \{r_s\} \\ \hline 0 \end{array}\right] = [x_s \quad y_s \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{17}$$

vectorul de poziție al punctului său de aplicație O_s.

Torsorul percuțiilor exterioare aplicate rigidului T_s, calculat în O_s, poate fi reprezentat prin vectorul dual

$$\{P_s\} = p_s[R_s]\{U_s\}, \tag{18}$$

unde operatorul

$$[R_s] = \left[\begin{array}{c|c} [e] & 0 \\ \hline [\hat{r}_s] & 0 \end{array}\right] \tag{19}$$

conține matricea diagonală unitate $[e]$ și matricea antisimetrică $[\hat{r}_s]$.

Vectorii unici $\{P_s\}$ pot fi acum aplicați în punctele s ale grafului asociat sistemului real sub forma unor percuții duale.

În continuare se calculează, față de același punct O_s, torsorul percuțiilor de inerție aplicate solidului T_s pe perioada ciocnirii. Vectorii componenți ai acestui torsor pot fi exprimați sub forma unitară a unui vector dual [1]:

$$\{\mathscr{P}_s\} = -[M_s]\,\delta[V_{s0}], \tag{20}$$

unde

$$[M_s] = \left[\begin{array}{c|c} [m_s] & [m_s][\hat{r}_s^C]^T \\ \hline [m_s][\hat{r}_s^C] & [J_s] \end{array}\right] \tag{21}$$

reprezintă matricea generală de inerție a rigidului considerat, relativ la axele O_sx_s, O_sy_s, O_sz_s exprimată în funcție de matricea masei

$$[m_s] = m_s[e]. \tag{22}$$

matricea antisimetrică a momentului static $[m_c][\hat{r}_s^C]$ și de matricea simetrică a tensorului de inerție

$$[J_s] = \begin{bmatrix} J_x^s & -J_{xy}^s & 0 \\ -J_{yx}^s & J_y^s & 0 \\ 0 & 0 & J_z^s \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Percuția de inerție $\{\mathscr{P}_s\}$ acționează în graful asociat asupra unei particule de masă $[M_s]$ care își modifică viteza, pe perioada ciocnirii, prin saltul $\delta\{V_{s0}\}$.

Să presupunem acum că sistemul material realizează o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, în timpul căreia coordonatele relative $x_{s,s-1}, y_{s,s-1}, \varphi_{s,s-1}$ ale punctului reprezentativ s capătă variații virtuale. Viteza virtuală a rigidului T_s în punctul său O_s în raport cu T_{s-1}, realizată în deplasarea virtuală a subsistemului $T_s, T_{s+1}, \ldots, T_n$, va fi exprimată de vectorul dual

$$\{V^v_{s,s-1}\} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \{\omega^v_{s,s-1}\} \end{array}\right]. \tag{24}$$

Vitezele virtuale relative $\{V^v_{s,s-1}\}$ sînt vectori legați de punctele s din graful asociat și sînt orientate perpendicular pe laturile $s, s-1$.

Aplicînd metoda vitezelor virtuale, condiția de echilibru dinamic a sistemului de solide, pe perioada ciocnirii, este ca puterea virtuală a tuturor percuțiilor exterioare $\vec{p}_s$, aplicate în punctele Q_s ale corpurilor și a percuțiilor de inerție, corespunzătoare unei deplasări virtuale a subsistemului $T_s, T_{s+1} \ldots, T_n$, compatibilă cu toate legăturile, să fie egală cu zero.

Condiția enunțată se exprimă prin relația generală

$$\sum_{\sigma=1}^{n} \{V^v_{\sigma,s-1}\}^T (p_\sigma[R_\sigma]\{U_\sigma\} - [M_\sigma]\delta\{V_{\sigma 0}\}) = 0 \quad (s=1, 2, \ldots, n), \tag{25}$$

unde viteza virtuală $\{V^v_{\sigma,s-1}\}$ are expresia

$$\{V^v_{\sigma,s-1}\}^T = [A_{\sigma s}](\{V^v_{s,s-1}\} + \sum_{q=s}^{\sigma-1} [A_{qs}]^T [\mathscr{R}_{q+1,q}]^T [A_{qs}]\{\Omega_{s,s-1}\}). \tag{26}$$

Dezvoltînd calculele, relațiile (25) pot fi scrise și astfel

$$\sum_{\sigma=s}^{n} \{v^v_{\sigma,s-1}\}^T (p_\sigma\{u_\sigma\} - [m_\sigma](\delta\{v_{c0}\} + [\hat{r}^C_\sigma]^T \delta\{\omega_{\sigma 0}\})) +$$

$$+\{\omega^v_{s,s-1}\}^T \sum_{\sigma=s}^{n} [\alpha_{\sigma s}]^T (p_\sigma[\hat{r}_\sigma]\{u_\sigma\} - [J_\sigma]\delta\{\omega_{\sigma 0}\} - [m_\sigma][\hat{r}^C_\sigma]\delta\{v_{\sigma 0}\} = 0, \tag{27}$$

unde

$$\{v^v_{\sigma,s-1}\} = [\alpha_{\sigma s}] \sum_{q=s}^{\sigma-1} [\alpha_{qs}]^T [\hat{r}_{q+1,q}]^T [\alpha_{qs}] \{\omega^v_{s,s-1}\}]$$

$$\delta\{v_{\sigma 0}\} = \sum_{k=1}^{\sigma-1} [\alpha_{\sigma k}][\hat{r}_{k+1,k}]^T \delta\{\omega_{k0}\}. \tag{28}$$

Dacă se introduc vitezele (28) în (27) se obține relația

$$\sum_{\sigma=s}^{n}[m_\sigma][\alpha_{\sigma s}]^T\left(\sum_{q=s}^{\sigma-1}[\alpha_{cq}][\hat{r}_{q+1,q}][\alpha_{\sigma q}]^T[\hat{r}^C_\sigma]\,\delta\{\omega_{\sigma 0}\}+\right.$$

$$+\left.\left([\hat{r}^C_\sigma]+\sum_{q=s}^{\sigma-1}[\alpha_{\sigma q}][\hat{r}_{q+1,q}][\alpha_{\sigma q}]^T\right)\sum_{1}^{\sigma-1}[\alpha_{\sigma k}][\hat{r}_{k+1,k}]^T\,\delta\{\omega_{k0}\}\right)+$$

$$+\sum_{\sigma=s}^{n}[\alpha_{\sigma s}]^T[J_\sigma]\,\delta\{\omega_{\sigma 0}\}=$$

$$=\sum_{\sigma=s}^{n}p_\sigma[\alpha_{\sigma s}]^T\left([\hat{r}_\sigma]+\sum_{q=s}^{\sigma-1}[\alpha_{\sigma q}][\hat{r}_{q+1,q}][\alpha_{\sigma q}]^T\right)\{u_\sigma\},\quad (s=1,2,\ldots,n),\quad (29)$$

în care necunoscutele sînt tocmai vitezele unghiulare pierdute $\delta\{\omega_{s0}\}=$ $=\delta\{\lambda_{s0}\}$.

Să observăm că sistemul (29) poate fi scris restrîns sub forma unei ecuații matriceale

$$[M]\,\delta\{\dot{\lambda}\}=[N][p]\{u\},\qquad (30)$$

unde

$$[M]=\begin{bmatrix}
[M_{11}] & [M_{21}]^T & \ldots & [M_{\sigma 1}]^T & \ldots & [M_{n1}]^T\\
[M_{21}] & [M_{22}] & [M_{32}]^T\ \ldots & [M_{\sigma 2}]^T & \ldots & [M_{n2}]^T\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
[M_{\sigma 1}] & [M_{\sigma 2}] & \ldots\ [M_{\sigma s}]\ldots[M_{\sigma\sigma}] & [M_{\sigma+1,\sigma}]^T & \ldots & [M_{n\sigma}]^T\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
[M_{n1}] & [M_{n2}] & \ldots & [M_{n\sigma}] & \ldots & [M_{nn}]
\end{bmatrix}\qquad (31)$$

este matricea simetrică generală de inerție, exprimată în funcție de blocurile de matrice simetrice

$$[M_{\sigma s}]=m_\sigma[\hat{r}^C_\sigma][\alpha_{\sigma s}][\hat{r}_{s+1,s}]^T+[\hat{r}_{\sigma+1,\sigma}][\alpha_{\sigma s}][\hat{r}_{s+1,s}]^T\sum_{k=\sigma+1}^{n}m_k\qquad (32)$$

$$[M_{\sigma\sigma}]=[J_\sigma]+[\hat{r}_{\sigma+1,\sigma}][\hat{r}_{\sigma+1,\sigma}]^T\sum_{k=\sigma+1}^{n}m_k,$$

iar

$$\{\lambda\}^T=[\{\lambda_{10}\}^T\{\lambda_{20}\}^T\ldots\{\lambda_{\sigma 0}\}^T\ldots\{\lambda_{n0}\}^T]\qquad (33)$$

reprezintă matricea absolută de poziție a sistemului, care conține blocurile

$$\{\lambda_{\sigma 0}\}^T=\left[0\quad 0\quad\sum_{k=1}^{\sigma}\varphi_{k\,k-1}\right]^T.\qquad (34)$$

Matricea triunghiulară

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_{11}]\,[N_{21}] & \dots & [N_{o1}] & \dots & [N_{n1}] \\ [N_{22}]\,[N_{32}] & \dots & [N_{o2}] & \dots & [N_{n2}] \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [N_{ss}][N_{s+1,s}]\dots & [N_{os}] & \dots & [N_{ns}] \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [N_{n-1,n-1}][N_{n,n-1}] \\ [N_{nn}] \end{bmatrix} \tag{35}$$

depinde de configuraţia sistemului de corpuri la începutul cioncirii şi de poziţiile punctelor de impact, prin intermediul blocurilor antisimetrice

$$[N_{os}] = [\hat{r}_{s+1,s}][\alpha_{os}]^T$$
$$[N_{ss}] = [\hat{r}_s]. \tag{36}$$

Matricea diagonală

$$[p] = \begin{bmatrix} p_1[e] & & & & \\ & p_2[e] & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & p_n[e] \end{bmatrix} \tag{37}$$

şi matricea coloană

$$\{u\} = [\{u_1\}^T \{u_2\}^T \dots \{u_s\}^T \dots \{u_n\}^T]^T, \tag{38}$$

precizează intensităţile şi direcţiile percuţiilor exterioare.

Observaţii.

a) Sistemul de ecuaţii (30) furnizează vitezele unghiulare pierdute pe perioada ciocnirii

$$\delta\{\dot{\lambda}\} = [M]^{-1}[N][p]\{u\}. \tag{39}$$

b) Dacă sistemul mecanic este supus mai multor legături exterioare, între vitezele pierdute $\delta\{\omega_{s0}\}$ se stabilesc relaţii cinematice suplimentare care se adaugă la sistemul general (30). În acest caz, necunoscutele vor fi reprezentate de vitezele $\delta\{\omega_{s0}\}$ şi de percuţiile din legăturile exterioare ale sistemului.

3. APLICAŢIE

Vom considera ca aplicaţie modelarea ciocnirii unui braţ de robot manipulator format din bara 1 ($l_1 = 0{,}6$ m ; $m_1 = 8$ kg) şi bara 2 ($l_2 = 0{,}15$ m ; $m_2 = 2$kg). Braţul este supus unor percuţii aplicate normal pe bare în capetele acestora, avînd intensităţile $p_1 = 10$ Ns, $p_2 = p_1 \cdot p_{21}$.

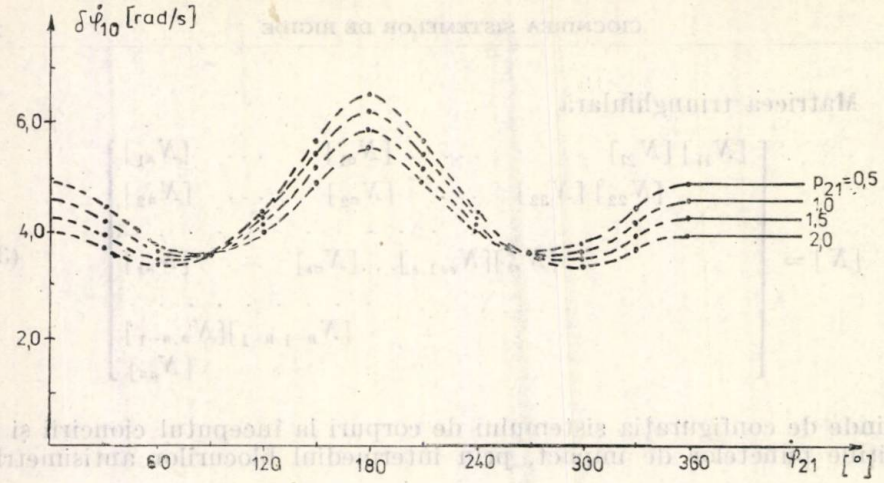

$\delta\dot{\varphi}_{10}$ [rad/s]
6,0
4,0
2,0
60
120
180
240
300
360
φ_{21} [°]
p_{21}=0,5
1,0
1,5
2,0

Fig. 3

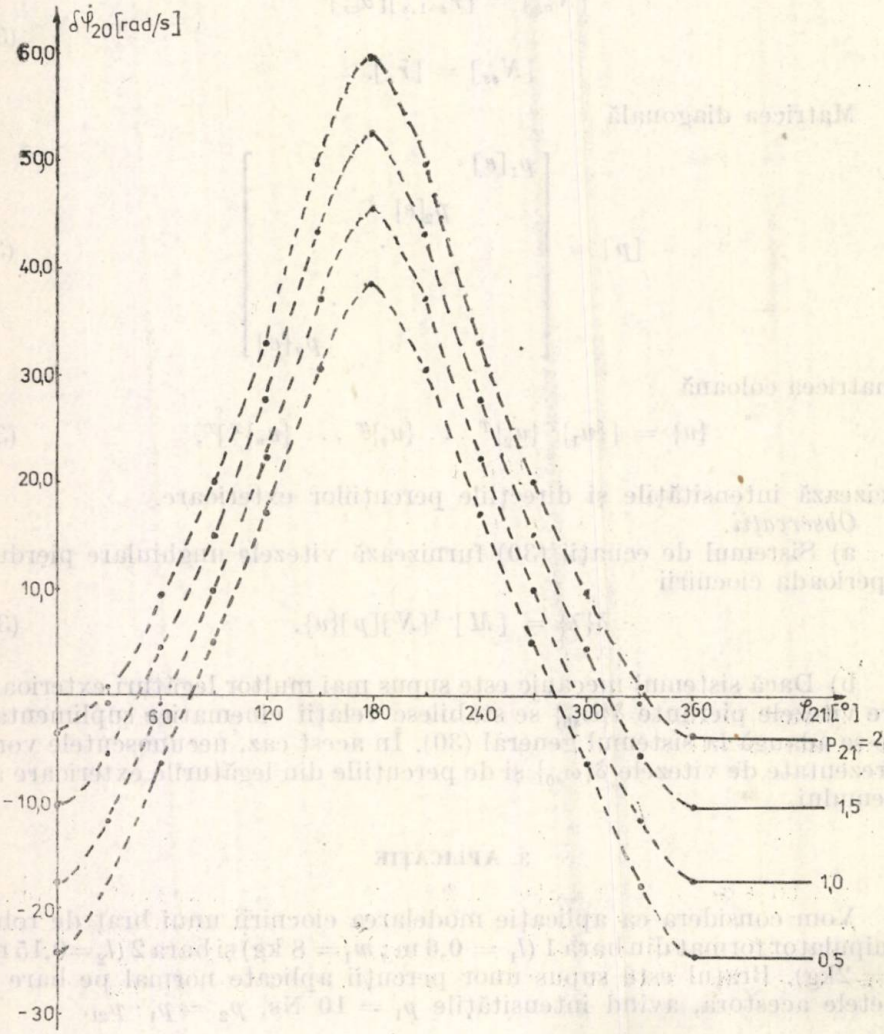

$\delta\dot{\varphi}_{20}$[rad/s]
60,0
50,0
40,0
30,0
20,0
10,0
-10,0
-20
-30
60
120
180
240
300
360
φ_{21}[°]
p_{21}=2,0
1,5
1,0
0,5

Fig. 4

Calculul numeric este efectuat cu ajutorul unui program impuls.

În figurile 3 și 4 sînt reprezentate variațiile salturilor vitezelor unghiulare absolute ale barelor în funcție de unghiul dintre bare $\varphi_{21} = \varphi_{20} - \varphi_{10}$, pentru diferite valori ale raportului p_{21} al celor două percuții.

```
A>type imp.pas
program impuls;
 const
  m1=8.0;
  m2=2.0;
  c=0.5;
  p1=10.0;
  l1=0.6;
  l2=0.15;
 var
  x,y,j1,j2,p2,fi21,dfi1,dfi2:real;
  fip21,i,k:integer;
  begin
  j1:=m1*sqr(l1)/3;
  j2:=m2*sqr(l2)/3;
  for k:=1 to 4 do
  begin
   p2:=k*c;
   writeln(lst, p2= ,p2:5:3);
   for i:=1 to 12 do
   begin
    fip21:=30*i;
    fi21:=pi*i/6;
    x:=p2*l2*m2*l1*l2*cos(fi21)/j2/2;
    y:=sqr(m2*l1*l2*cos(fi21))/j2/4;
    dfi1:=(p1*l1+p2*l2*cos(fi21)-x)/(j1+m2*sqr(l1)-y);
    dfi2:=(p2*l2-0.5*m2*l1*l2*cos(fi21)*dfi1)/j2;
    writeln(lst,'fi21=',fip21:4);
    writeln(lst,'dfi1=',dfi1, dfi2=, dfi2);
   end;
  end;
```

Se observă că cele două salturi de viteză $\delta\dot{\varphi}_{10}$ și $\delta\dot{\varphi}_{20}$ își ating maximele simultan pentru unghiul relativ $\varphi_{21} = \pi$ și că diagramele $\delta\dot{\varphi}_{10}$ trec în permanență prin punctele corespunzătoare unghiului $\varphi_{21} = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_{21} = \frac{3\pi}{2}$, oricare ar fi parametrul p_{21}.

Primit în redacție la 17 noiembrie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. STAICU, *Aplicații ale calculului matriceal în mecanica solidelor*. Edit. Academiei, București, 1986.
2. R. VOINEA, D. VOICULESCU, F. P. SIMION, *Introducere în mecanica solidului cu aplicație în inginerie*, Edit. Academiei, București, 1989.
3. C. IACOB, *Mecanica teoretică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.
4. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1983.
5. D. MANGERON, N. IRIMCIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, Edit. tehnică, București, 1978.
6. GH. SILAȘ, I. GROȘANU, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1981.
7. GH. SILAȘ, L. BRÎNDEU, *Sisteme vibropercutante*, Edit. tehnică, București, 1986.
8. M. ATANASIU, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1973.
9. P. P. TEODORESCU, *Sisteme mecanice. Modele clasice*, Edit. tehnică, București, 1988.

STABILIREA PARAMETRILOR CONSTRUCTIVI ȘI FUNCȚIONALI AI GRANULATOARELOR CU TALER

de GH. I. ENE

Institutul Politehnic București

În lucrare se prezintă modul de determinare a diferiților parametri constructivi și funcționali ai granulatoarelor cu taler : dimensiunile talerului (diametru, înălțimea bordurii), turația și înclinarea talerului, debitul și puterea necesară acționării, precum și influența acestora asupra calității granulelor.
În final se prezintă unele considerații privind conducerea procesului de granulare, și anume, influența locului de alimentare a materialului pulverulent, precum și a locului de alimentare a lichidului de umezire și a fineței de pulverizare a acestuia asupra caracteristicilor (mărime, compactitate etc.).

1. GRANULATOARE CU TALER. GENERALITĂȚI

Deși granulatoarele cu taler au un debit mai redus decît granulatoarele cu tambur rotativ, totuși acest tip constructiv a început să se utilizeze pe scară largă, în ultimul timp, datorită multiplelor sale avantaje [4] ;

- permit obținerea de granule cu un spectru granulometric restrîns (monodisperse) ;
- procesul de granulare se reglează relativ ușor prin modificarea turației talerului și a înclinării acestuia ;
- au un gabarit mai redus și necesită investiții mai mici ;
- necesită cheltuieli mai reduse de întreținere și exploatare ;
- aptitudinea la granulare a materialului se determină lesne, în condiții de laborator ;
- se pot granula materiale diverse ;
- posibilitatea granulării umede sau uscate.

Granulatoarele de acest tip se utilizează în diferite domenii ; industria cimentului, industria îngrășămintelor chimice, industria metalurgică etc.

Organul de lucru al acestui tip constructiv de granulator (fig. 1) este un taler circular, cu bordură, a cărui înclinare față de orizontală poate fi reglată după necesități. Talerul se rotește în jurul axei sale geometrice antrenat fiind de către un motor electric prin intermediul unei transmisii care asigură reducerea turației. Modificarea turației talerului se realizează, de obicei, prin schimbarea raportului de transmisie al transmisiei cu curele trapezoidale (v. fig. 1).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 3—4, 1991, P. 231—239

Talerul, aflat în mișcare de rotație, este alimentat cu materialul care urmează să fie granulat și cu apă pulverizată la finețea necesară. Pe taler, materialul descrie traiectorii de formă caracteristică.

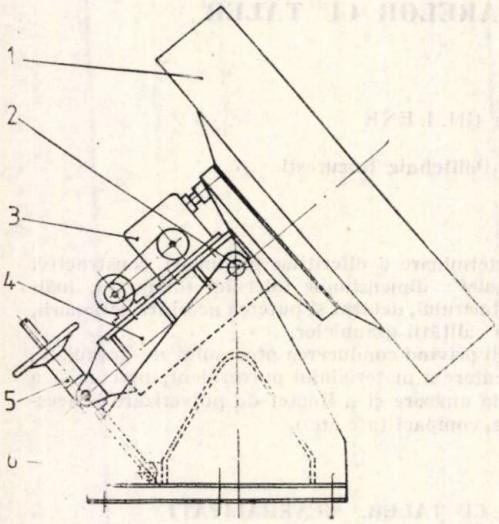


Fig. 1. — Granulator cu taler: 1 — taler; 2 — articulație; 3 — grup de acționare (motor electric — transmisie cu curele trapezoidale — reductor de turație — pinion — coroană dințată cu dantură interioară, fixată de talar); 4 — suportul grupului de acționare; 5 — dispozitivul de reglare a înclinării talerului; 6 — batiu.

Granulele care capătă dimensiunea corespunzătoare parametrilor care caracterizează procesul (turația și înclinarea talerului), deversează peste bordură. Talerul are un efect de clasare automat, în sensul că nu deversează decît granulele care au ajuns la dimensiunea necesară (corespunzătoare valorilor parametrilor reglați). Pentru ca procesul de granulare să decurgă uniform este necesar să se evite formarea crustelor de material pe taler și pe bordură. În acest scop, granulatorul este prevăzut cu răzuitoarele corespunzătoare (acestea nu sînt prezentate în figura 1).

2. STABILIREA PARAMETRILOR CONSTRUCTIVI ȘI FUNCȚIONALI AI GRANULATOARELOR CU TALER

DIMENSIUNILE TALERULUI

O influență deosebită asupra procesului de granulare o au parametrii constructivi ai granulatorului: diametrul talerului și înălțimea bordurii. Aceștia influențează de asemenea debitul granulatorului.

Corelarea debitului cu diametrul talerului este dată, în cazul granulării materiilor prime pentru fabricarea clincherului de ciment, de relația [2, 4, 5]:

$$Q = 1{,}5\ D^2 \qquad (1)$$

unde Q este debitul granulatorului t/h; D — diametrul talerului, m.

Pentru un debit impus, se poate determina, cu relația (1), diametrul talerului.

Înălțimea bordurii este, pentru granulatoarele cu taler existente,

$$H = (0{,}20 \ldots 0{,}23)D. \qquad (2)$$

Cu cît diametrul talerului este mai mare cu atît crește lungimea drumului parcurs de granule și înălțimea de la care acestea se rostogolesc pe suprafața înclinată a talerului. Ca urmare granulele obținute au o porozitate mai redusă (sînt mai compactate) și deci sînt mai sensibile la șocul termic. Din această cauză creșterea diametrului este limitată.

Influența valorii diametrului asupra porozității, și deci și asupra șocului termic (la granularea aceluiași material pulverulent și la aceeași turație și înclinare a talerului) este ilustrată în tabelul 1[5].

Tabelul 1

Tipul granulatorului		Porozitatea	Rezistența la șoc termic la 900°C
Granulator de laborator	$D = 0{,}4$ m	0,30 0,35	Foarte bună
	$D = 0{,}8$m	0,25 0,30	Bună
Granulator industrial	$D = 4{,}0$m	0,20	Nulă

Riscul dezintegrării sub efectul șocului termic este foarte mare dacă porozitatea granulelor este sub 0,30.

Pentru a se evita îndesarea (compactarea) și chiar spargerea granulelor ca urmare a lovirii lor de bordură în urma rostogolirii pe taler este necesar ca simultan cu creșterea diametrului să se reducă înclinarea talerului față de orizontală, ceea ce conduce la scăderea debitului granulatorului.

ÎNCLINAREA TALERULUI

Înclinarea talerului față de orizontală este de 35 ... 55° [1, 2] și este influențată de unghiul de frecare internă al amestecului de granule și material pulverulent existent pe taler. Unghiul de frecare a amestecului depinde de proporția în care pulberea se găsește în amestec, mobilitatea granulelor reducîndu-se chiar atunci cînd în amestec se găsește un procent redus de pulbere (v. tabelul 2[4, 5]).

Tabelul 2

Amestec 100%		Unghiul de frecare internă φ, grade	Coeficientul de frecare internă $f = \operatorname{tg}\varphi$
Pulbere %	Granule %		
100	0	34	0,67
50	50	34	0,67
25	75	31	0,60
10	90	27	0,50
<10	>90	10...20	≈0,25

Deoarece unghiul de frecare internă al materialului pulverulent este mai mare decît cel al granulelor, pulberea este antrenată de taler urcînd împreună cu acesta iar granulele se adună în partea inferioară a talerului, lîngă bordură. Granulele care au atins mărimea corespunzătoare parametrilor procesului trec peste bordură fiind evacuate, iar cele mici continuă procesul de granulare pînă ajung la mărimea necesară (acesta este efectul de clasare naturală, caracteristic granulatorului cu taler).

Dacă înclinarea talerului este redusă înălțimea de rostogolire al granulelor este mică (prin urmare granulele au o porozitate mai redusă), dar timpul de retenție pe taler este mare (ceea ce face ca granulele să-și sporească mărimea). Dacă talerul are o înclinare mare lucrurile se petrec invers : granulele se îndeasă (se compactează) ca urmare a rostogolirii de la o înălțime mare dar mărimea lor este mai redusă ca urmare a unui timp mai mic de retenție pe taler. Pe de altă parte, în acest ultim caz, există riscul ca odată cu granulele să se evacueze de pe taler și o anumită cantitate de pulbere.

Unghiul de înclinare al talerului și înălțimea bordurii determină capacitatea de lucru a granulatorului (volumul ocupat de material). Cu creșterea capacității crește cantitatea de material și deci apăsarea specifică a granulelor pe suprafața talerului. Debitul granulatorului crește cu apăsarea specifică pînă cînd aceasta atinge valoarea de 0,2 t/m^2. La creșterea în continuare a apăsării debitul scade ca urmare a reducerii mobilității granulelor (se înrăutățește separarea granulelor din materialul mărunt) [4].

TURAȚIA TALERULUI

Asupra granulei care se găsește pe talerul în mișcare de rotație acționează următoarele forțe : greutatea granulei, forța centrifugă și forța de frecare. Datorită forței centrifuge și a forței de frecare granula aderă la taler și se ridică împreună cu acesta pînă la o anumită înălțime de unde, sub acțiunea greutății proprii, se rostogolește pe taler în partea inferioară a acestuia (la bordură). Forma traiectoriei granulei pe taler (caracteristică acestui tip de granulator) depinde de natura materialului (granulația materialului alimentat, unghiul de frecare internă, forma particulelor, rugozitatea acestora etc.) și de parametrii funcționali (turația și înclinarea talerului).

În figura 2 sînt prezentate forțele care acționează asupra unei granule care se găsește pe talerul în mișcare de rotație (T_1 și T_2 fiind componentele forței de frecare iar N, reacțiunea normală). Poziția granulei pe taler este determinată de unghiul β și de distanța r față de centrul talerului.

Scriind ecuația de proiecție a forțelor pe axele sistemului de coordonate xoy se obține :

$$mr\,\omega^2 \sin\beta - T_2 = 0$$

$$mr\omega^2\cos\beta - mg\sin\alpha + T_1 = 0 \qquad (3)$$

unde ω este viteza unghiulară a talerului.

Pentru ca granula să fie antrenată de către taler trebuie îndeplinită condiţia

$$\sqrt{T_1^2 + T_2^2} \leqslant fN \tag{4}$$

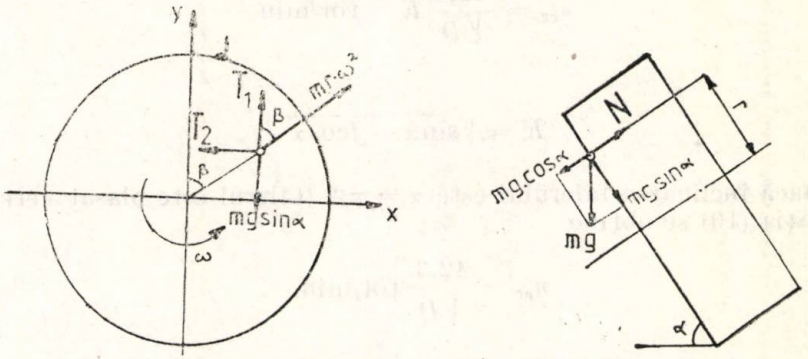


Fig. 2. — La determinarea turaţiei talerului

unde coeficientul de frecare dintre granulă şi taler (egal cu coeficientul de frecare internă, deoarece talerul este acoperit cu material) este

$$f = \operatorname{tg}\varphi \quad (\varphi - \text{unghiul de frecare internă}) \tag{5}$$

iar reacţiunea normală

$$N = mg\cos\alpha \tag{6}$$

Ţinînd seama de relaţiile (3) şi (6), expresia (5) devine

$$\sqrt{(mr\omega^2\cos\beta + mg\sin\alpha)^2 + (mr\omega^2\sin\beta)^2} \leqslant f\,mg\cos\alpha$$

sau

$$\sqrt{\left(-\frac{r\omega^2}{g}\cos\beta + \sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{r\omega^2}{g}\sin\beta\right)^2} \leqslant f\cos\alpha. \tag{7}$$

Granula este ridicată cu atît mai sus (β este cu atît mai mic) cu cît turaţia talerului este mai mare. Atunci cînd se atinge valoarea $\beta = 0$, granula nu se mai rostogoleşte pe taler spre partea lui inferioară ci roteşte solidar cu acesta (talerul roteşte cu turaţia critică).

În acest caz, din relaţia (7) rezultă

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{r}} \tag{8}$$

Dacă granula se găseşte pe periferia talerului (la bordură) atunci $r = D/2$ şi se obţine expresia turaţiei critice a talerului

$$n_{cr} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{D/2}} \text{ rot/min.} \tag{9}$$

Dacă în relația (9) se înlocuiește accelerația gravitației cu $g = 9{,}81 \text{m/s}^2$ iar D (diametrul talerului) se exprimă în metri, rezultă

$$n_{cr} = \frac{42{,}3}{\sqrt{D}} K \quad \text{rot/min} \tag{10}$$

unde

$$K = \sqrt{\sin\alpha - f\cos\alpha} \tag{11}$$

Dacă înclinarea talerului este $\alpha = \pi/2$ (talerul este plasat vertical), din relația (10) se obține

$$n_{cr} = \frac{42{,}3}{\sqrt{D}} \text{ rot/min.} \tag{12}$$

În acest caz granula rotește solidar cu bordura (relația (12) este de fapt expresia turației critice a morilor tubulare cu bile).

Pentru o bună funcționare a granulatorului turatia talerului trebuie să fie sub turația critică și anume [5]

$$n = 0{,}75\ n_{cr} \tag{13}$$

Relația (13) este utilă pentru evaluarea turației talerului atunci cînd se proiectează granulatorul însă, pentru granulatoare existente, este recomandabil ca turația să fie ajustată în urma unor încercări experimentale.

Relațiile (10) și (11) arată că pentru o bună funcționare a granulatorului, turația și înclinarea și diametrul talerului trebuiesc corelate reciproc. La turații prea mici granulele nu sînt ridicate pînă la o înălțime suficientă iar la turații prea mari se string lîngă bordură. În amblele situații debitul granulatorului scade ca urmare a utilizării necorespunzătoare a suprafeței de lucru a talerului.

DEBITUL GRANULATORULUI

Debitul granulatorului cu taler poate fi evaluat, pentru granularea materiilor prime din industria cimentului, cu relația (1). Se poate utiliza, de asemenea, relația (2):

$$Q = 2{,}5\ D^{1{,}33}\ Hv\rho_a \quad \text{t/h} \tag{14}$$

unde D este diametrul talerului m; H — înălțimea bordurii, m; v — viteza periferică a talerului, m/s (pentru granulatoarele existente $v = 1{,}6 \ldots 2{,}0$ m/s); ρ_a — denistatea aparentă (în grămadă) a granulelor, t/m^3 (pentru granule din materii prime pentru fabricarea cimentului $\rho_a = 1{,}1 \ldots 1{,}2$ t/m^3).

În cazul în care se cunoaște debitul unor granulatoare existente se poate determina debitul granulatorului ce urmează a fi proiectat utilizînd relații de similitudine (v. de exemplu, [1]). Pentru granulatoare existente debitul se poate determina prin încărcări experimentale.

Debitul calculat cu relațiile (1) și (14) (pentru granularea materiilor prime din industria cimentului) concordă destul de bine cu valorile de catalog ale debitului unor granulatoare existente.

PUTEREA NECESARĂ ACȚIONĂRII TALERULUI

Puterea necesară pentru acționarea granulatorului cu taler poate fi evaluată cu relația :

$$N = aD^2 \quad \text{kW} \tag{15}$$

unde D este diametrul talerului, m ; a — factorul de putere ($a = 1{,}1 \ldots 1{,}5$ kW/m^2, pentru granularea materiilor prime din industria cimentului).

Puterea calculată cu relația (15)(pentru materiile prime din industria cimentului) se apropie foarte mult de valorile de catalog ale puterii unor granulatoare existente.

3. CONDUCEREA PROCESULUI DE GRANULARE

Deoarece timpul de retenție al materialului pe taler este relativ scurt, acest tip de granulator este foarte sensibil în ceea ce privește alimentarea (dozarea) materialului pulverulent. Dacă alimentarea materialului pulverulent pe taler se realizează cu un debit redus se obțin granule mai compactate (deci mai sensibile la șocul termic), iar dacă se realizează cu un debit ridicat se obțin granule friabile (cu rezistență mecanică redusă), uneori însoțite, la evacuare, de pulbere.

Spectrul granulometric al granulelor obținute depinde de modul de umezire a materialului pulverulent. La umezirea prealabilă parțială sau completă (umezirea prealabilă se utilizează pentru a evita degajările de praf la alimentarea materialului pulverulent pe taler), se obțin granule cu un spectru granulometric larg, iar la umezirea pe taler se obțin granule monodisperse (foarte apropiate ca mărime).

Alimentarea cu apă trebuie reglată foarte precis deoarece la un exces de apă se formează pe taler bulgări mari din cauza aglomerării (lipirii) granulelor, iar la un deficit de apă se obțin granule foarte mărunte, friabile și cu un conținut ridicat de praf. Deoarece diferența de umiditate între aceste situații extreme este de numai aproximativ 2% rezultă necesitatea dozării uniforme a materialului pulverulent alimentat (în scopul păstrării constante a raportului dintre cantitatea de material alimentat și cea de apă). Se preferă utilizarea dozatoarelor gravimetrice în locul celor volumetrice [4, 5].

Finețea de pulverizare a lichidului de umezire influențează, de asemenea, asupra procesului de granulare. Cu cît materialul pulverulent alimentat este mai fin măcinat și mai puțin plastic (cu foarte puțin liant), cu atît pulverizarea lichidului trebuie să fie mai fină. Cu cît pulverizarea lichidului este mai fină, cu atît granulele obținute sînt de mărime mai redusă (granularea se produce ca urmare a tensiunii superficiale a picăturilor de lichid pulverizat).

Dacă materialul pulverulent conține liant (argilă de exemplu), pulverizarea lichidului poate fi grosieră (duș cu orificii pînă la 8 mm diametru). În acest caz granulele obținute sînt mari (granularea realizîndu-se, îndeosebi, prin înfășurare de învelișuri succesive).

Temperatura materialului pulverulent alimentat trebuie să fie apropiată de temperatura camerei. Materialul cald „respinge" apa (se umezește greu) și nu se granulează bine.

O influență deosebită asupra procesului de granulare o au zonele în care se realizează alimentarea cu material pulverulent și cu lichidul de umezire.

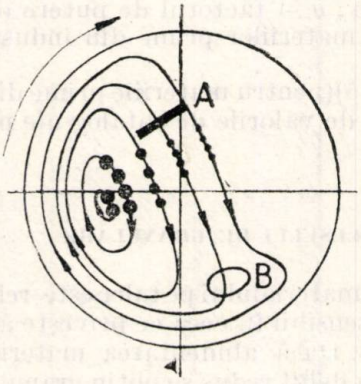


Fig. 3. — Plasarea zonelor de alimentare a apei și a materialului pulverulent pe suprafața talerului: *A* — zona de pulverizare a apei; *B* — zona de alimentare a materialului pulverulent.

Experiența arată că zona de alimentare cu material cea mai favorabilă granulării este situată la partea inferioară a traiectoriilor granulelor (zona *B*, figura 3).

Pulverizarea lichidului de umezire trebuie să se facă în zona *A* (v. fig. 3) deoarece în acest caz granulele care ajung în zona B sînt acoperite

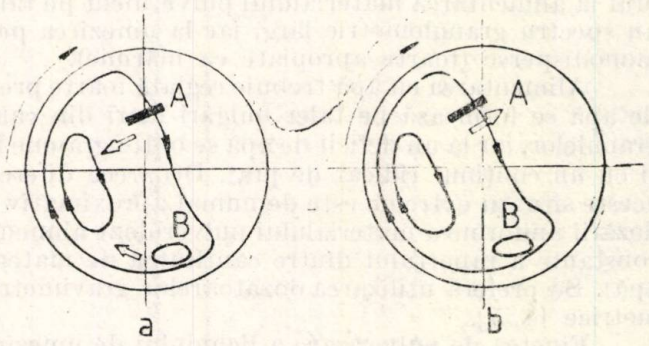


Fig. 4. — Variația mărimii granulelor ca urmare a deplasării zonelor de alimentare a apei și a materialului pulverulent: *A* — zona de pulverizare a apei; *B* — zona de alimentare a materialului pulverulent; *a* — mărimea granulelor crește; *b* — mărimea granulelor scade.

deja cu o peliculă de apă care permite înglobarea de noi particule de material. Distanța dintre zonele *A* (de pulverizare a apei) și *B* (de alimentare a materialului pulverulent) depinde de viteza de rostogolire a granulelor și de capacitatea granulelor de a absorbi apa (deci de porozitatea lor).

Granulele se eșalonează în sensul creșterii mărimii lor de la centru spre periferia talerului (v. fig. 3). Deci locul în care se pulverizează apa (*A*,

fig. 2) trebuie să se găsească în zona talerului unde granulele sînt cele mai mici, deoarece acestea sînt cele care trebuie să-și sporească mărimea înglobînd noi particule.

S-a constat experimental că la deplasarea zonelor de alimentare cu material pulverulent și de pulverizare a apei spre periferia talerului (adică acolo unde se găsesc granulele mari) se obțin granule de dimensiuni mari, iar atunci cînd alimentarea pulberii și apei se face în partea centrală a talerului, se obțin granule mici (fig.4.)

4. CONCLUZII

Procesul de granulare pe granulatorul cu taler este influențat de parametrii constructivi și funcționali: dimensiunile talerului (diametrul și înălțimea bordurii), înclinarea și turația talerului, locul de alimentare a materialului pulverulent și locul și finețea de pulverizare a apei.

Pentru a se obține granule de calitate (cu aspectrul granulometric, rezistență mecanică și insensibilitate la șoc termic la valorile corespunzătoare cerute de procesul tehnologic) și la un debit impus este ncesară o corelare judicioasă a tuturor parametrilor enumerați anterior. Această corelare este dificil de realizat datorită influențelor; adesea contradictorii, a diferiților parametri. Din această cauză este necesar ca la proiectarea granulatorului să se adopte soluții constructive care să permită ajustarea (reglarea) în exploatare a unora din acești parametri (de obicei înclinarea și turația talerului), astfel încît granulatorul să producă granule de calitatea cerută de procesul tehnologic.

Primit în redacție la 21 aprilie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. M. RENERT, *Calculul și construcția utilajului chimic*, vol. II, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.
2. E. BEILICH, D. BECHERESCU, M. THALER, *Cuptoare și utilaje în industria silicaților*, vol. II, *Mașini și aparate*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1973.
3. I. TEOREANU, D. BECHERESCU, E. BEILICH, H. REHNER, *Instalații termotehnologice (lianți, sticlă, ceramică)*, Edit. tehnică, București. 1973.
4. N. G. VILESOV, V. IA. SKRIPKOV, V. L. LOMAZOV, I. M. TANCENKO, *Protessî granulirovaniia v promîslenosti*, Izd. Tehnika, Kiev, 1976.
5. M. PAPADAKIS, I. P. BOMBLED, *La granulation des matières premières de cimenterie*, Revue des matériaux de construction, 549.

OPTIMIZAREA VARIATORULUI TOROIDAL DIN PUNCT DE VEDERE AL SPINULUI

de I. M. CIORNEI

Universitatea „Ștefan cel Mare", Suceava

Lucrarea cuprinde metodologia de calcul a spinului în variatoarele toroidale, indicînd, totodată, și direcțiile principale de reducere a lui: în final se prezintă două noi variante, îmbunătățite și cu spin redus, care au și fost brevetate în România.

GENERALITĂȚI

Este unanim recunoscut faptul că, variatoarele elastohidrodinamice se întîlnesc într-un număr mare de variante constructive, în care s-a înglobat o imensă cantitate de fantezie inginerească. Întrucît din punct de vedere al contactului cele mai utilizate sînt cele cu contact punctual, ele au fost analizate, [2], din punct de vedere al reducerii spinului, mișcare parazită, indicîndu-se relații de calcul al acestuia. Din această categorie fac parte variatoarele toroidale, sferice și frontal cu bile; prezenta lucrare se ocupă de cele toroidale.

Variatoarele toroidale sînt caracterizate prin aceea că elementele active, cu căi de rulare de diametru variabile, au formă toroidală.

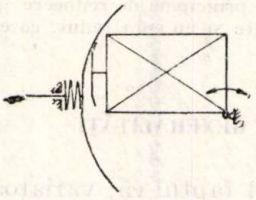
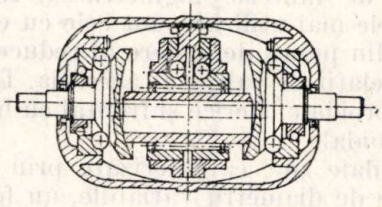
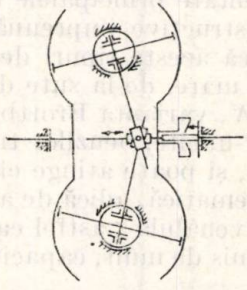
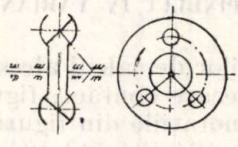
În tabelul 1 sînt prezentate principalele tipuri de variatoare toroidale, prin cîteva variante constructive, împreună cu caracteristicile tehnice de funcționare. Se observă că aceste tipuri de variatoare pot transmite puteri într-o gamă destul de mare, de la sute de watti, varianta Mosorul și Krauss, pînă la sute de kW, varianta Brottby, ultimele utilizate la acționarea pompelor, mașinilor-unelte, benzilor transportoare etc. Gama de reglaj are valori, uzual, de 6, și poate atinge chiar 10, varianta Brottby, justificîndu-se analiza lor cinematică, adică de a stabili dimensiuni geometrice și o gamă de reglaj convenabilă, astfel ca spinul, mișcare parazită, [2] [3] să nu afecteze, nepermis de mult, capacitatea de transmitere.

ESTIMAREA SPINULUI ÎN VARIANTA CLASICĂ

Pentru deducerea relațiilor de calcul ale spinului se atașează un sistem de coordonate, pentru fiecare contact, figura 1a, contact intrare, și figura 1b, contact ieșire. Cu notațiile din figurile menționate mai sus, cu metodologia deja prezentată, [2] [3] [4] [8], rezultă pentru contactul de intrare:

$$\bar{\omega}_1 = -\omega_1 \sin\beta\bar{i} + \omega_1 \cos\beta\bar{k}$$

Tabel 1 - Clasificarea variatoarelor toroidale

Varianta	Schema de principiu	Putere kW	Gamă de reglare	Felul contactului	Obs.
Fără element intermediar [9]		Mică	6	Punctual	
Cu un element intermediar (Mosorul, Kraus) [11]		Mică	6	Punctual	
Cu două elemente intermediare (Matron, Artor Brottby) [12] [14] [15]		0,2 - 7,3	6 - 10	Punctual	
Cu mai multe elemente intermediare (Sadi, Hayes, Austin, Perbury) [10][13][17]		150	4,75	Punctual	

$$\bar{\omega}_3 = -\omega_3 \bar{i}$$

$$\bar{r} = \left(\rho\cos\theta - R\operatorname{tg}\beta + \frac{R_1}{\cos\beta} - 2R_1\cos\beta \right) \bar{i} + \sin\theta\bar{j} - R\bar{k}.$$

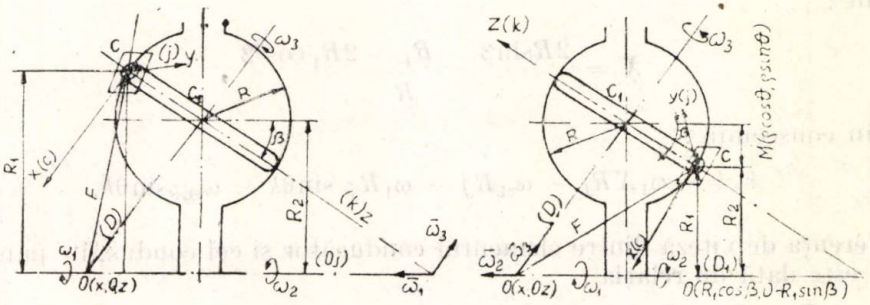


Fig. 1. — Estimarea spinului în varianta clasică : *a*, contact de intrare ; *b*, contact de ieșire.

Viteza punctului M pe elementul conducător are expresia

$$\bar{v}_1 = \bar{\omega}_1 x \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\omega_1\sin\beta & 0 & \omega_1\cos\beta \\ \rho\cos\theta - R\operatorname{tg}\beta + \dfrac{R1}{\cos\beta} - 2R_1\cos\beta\,; \rho\sin\theta & & -R \end{vmatrix} =$$

$$= -\omega_1\sin\theta\cos\beta\bar{i} - [\omega_1 R\sin\beta - \omega_1\rho\cos\beta\cos\theta + \omega_1 R\sin\beta - \omega_1 R_1 +$$

$$+ 2\omega_1 R_1\cos^2\beta]\bar{j} - \omega_1\rho\sin\beta\sin\theta\bar{k}\,;$$

$$\bar{v}_3 = \bar{\omega}_3 x \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ \rho\cos\theta - R\operatorname{tg}\beta + \dfrac{R_1}{\cos\beta} - 2R_1\cos\beta\,; \rho\sin\theta & & -R \end{vmatrix} =$$

$$= -\omega_3 R\bar{j} - \omega_3\rho\sin\theta\bar{k}$$

Întrucît elementului condus i se aplică un cuplu de frînare, apare o viteză de alunecare. În centrul contactului, punctul C, cînd $\rho = 0$, au loc relațiile :

$$\bar{v}_{10} = -(2\omega_1 R\sin\beta - \omega_1 R_1 + 2\omega_1 R_1\cos^2\beta)\,\bar{j}$$

$$\bar{v}_{30} = -\omega_3 R\bar{j}$$

$$\bar{v}_{10} = \bar{V}_{30} + \bar{V}_{SLO}\,;\ \bar{V}_{SLO} = \bar{v}_{10} - \bar{v}_{30} = \omega_{SL} R\bar{j}.$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_1(2R\sin\beta - R_1 + 2R_1\cos^2\beta) + \omega_{SL}R}{R} = \omega_1 X + \omega_{SL}.$$

unde :

$$X = \frac{2R\sin\beta - R_1 + 2R_1\cos^2\beta}{R},$$

și în consecință :

$$\bar{v}_3 = -\omega_1 XR\bar{j} - \omega_{SL}R\bar{j} - \omega_1 R\rho\sin\theta\bar{k} - \omega_{SL}\rho\sin\theta\bar{k}.$$

Diferența de viteză dintre elementul conducător și cel condus, în punctul M, este dată de relația :

$$\Delta\bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V}_3 = -\omega_1\rho\cos\beta(\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j}) + [-2\omega_1 R\sin\beta +$$

$$+ \omega_1 R_1 - 2\omega_1 R_1\cos^2\beta + \omega_1 XR + \omega_{SL}R]\bar{j} - (\omega_1\rho\sin\beta + \omega_1 X\rho + \omega_{SL}\rho)\sin\theta\bar{k}.$$

Se observă că vectorul $\Delta\bar{v}$ are componentele :

$$\Delta\bar{v} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C},$$

vectorul $\bar{A}$, dat de relația :

$$\bar{A} = -\omega_1\rho\cos\beta(\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j}),$$

are direcția vectorului unitar $(\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j})$ care, este situat în planul de contact, perpendicular pe vectorul de poziție al punctului M ; el reprezintă, pe aria de contact, o viteză relativă de pivotare, cunoscută, și sub numele de spin.

Vectorul $\bar{B}$, dat de relația :

$$\bar{B} = -(+2\omega_1 R\sin\beta - \omega_1 R_1 + 2\omega_1 R_1\cos^2\beta - \omega_1 XR - \omega_{SL}R)\bar{j},$$

reprezintă o viteză de alunecare relativă, orientată în sens opus direcției de rostogolire.

Vectorul $\bar{C}$, dat de relația :

$$\bar{C} = (-\omega_1\rho\sin\beta + \omega_1 X\rho + \omega_{SL}\rho)\sin\theta\bar{k},$$

indică o viteză de comprimare în zona de intrare a contactului, și de decomprimare în zona de ieșire din contact. Ea este cauzată de deformațiile hertziene ale celor două elemente, care nu afectează mișcarea lor relativă, în plan tangențial, și ca urmare, nu se va mai lua în considerare, în continuare.

Întrucît alunecarea longitudinală constituie chiar principiul funcțional al variatoarelor EHD toroidale, rezultă că singura mișcare negativă

ce trebuie redusă, rămîne spinul, a cărui efect negativ este deja prezentat în literatura de specialitate, [2] [3] [4] [7] [8]. Acesta se manifestă prin scăderea, pantei curbelor de tracțiune, a coeficientului maxim de tracțiune a randamentului contactului.

Toate efectele menționate mai sus se amplifică la viteze de rostogolire mai mari, deci la pelicule mai groase.

Viteza unghiulară de spin, are expresia :

$$\omega_{SP} = -\omega_1 \cos\beta,$$

iar parametrul adimensional al vitezei unghiulare de spin, valabil și pentru cazul rostogolirii pure, cît și atunci cînd spare alunecare, este :

$$\frac{\omega_{SP}}{\omega_1} = -\cos\beta.$$

Efectuîndu-se o analiză similară și pentru contactul de ieșire, cu notațiile prezentate în figura 1b, se obține :

$$\bar{\omega}_3 = \omega_3 \bar{i}$$

$$\bar{\omega}_2 = \omega_2 \sin\beta \bar{i} + \omega_2 \cos\beta \bar{k},$$

$$\bar{r} = \left(\rho\cos\theta - R\,\mathrm{tg}\beta - \frac{R_1}{\cos\beta}\right)\bar{i} + \rho\sin\theta\,\bar{j} - R\bar{k},$$

$$\bar{v}_2 = -\omega_2\rho\cos\beta\sin\theta\bar{i} - [-\omega_2 R\sin\beta - \omega_2\rho\cos\beta\cos\theta - R\omega_2\sin\beta + \omega_2 R_1]\bar{j} + \omega_2\rho\sin\beta\sin\theta\bar{k}.$$

$$\bar{v}_3 = -\omega_3 R\bar{j} - \omega_3\rho\sin\theta\bar{k}.$$

Vectorul viteză de spin are expresia :

$$\bar{A} = \omega_1\rho\cos\beta\,\frac{2R\sin\beta - R_1 + 2R_1\cos^2\beta}{R_1}\,(\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j}),$$

iar parametrul adimensional al vitezei unghiulare de spin este dat de relația : $\frac{\omega_{SP}}{\omega_1} = \frac{2R}{R_1}\sin\beta\cos\beta - \cos\beta + 2\cos^3\beta$, valabil pentru cazul rostogolirii pure, respectiv

$$\frac{\omega_{SP}}{\omega_1} = X\frac{R}{R_1}\cos\beta - \frac{\xi}{\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)}\left[X + \frac{\xi R_1}{\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)R}\right]\frac{2R}{R_1}\cos\beta,$$

pentru rostogolire cu alunecare, unde :

$$X = \frac{2R\sin\beta - R_1 + 2R_1\cos^2\beta}{R},$$

iar ξ reprezintă alunecarea longitudinală adimensională.

Dacă se analizează relaţiile obţinute pentru contactul de intrare, se observă că spinul depinde de viteza unghiulară de intrare, dimensiunile ariei de contact şi de unghiul de înclinare al rolei conduse, deci de raportul de transmitere. Astfel, cu cît viteza unghiulară de intrare şi aria de contact sînt mai mari, cu atît spinul capătă valori mai ridicate ; de asemenea cu cît unghiul β este mai mic, deci raportul de transmitere este în jur de unu, cu atît spinul capătă valori mai mari. Rezultă că sînt necesare măsuri constructive care să conducă la micşorarea lui $\cos\beta$.

O discuţie similară se poate face şi pentru contactul de ieşire, numai că în această situaţie parametrul adimensional al spinului este mult mai mare, deci afectează mai pronunţat capacitatea de transmitere. Situaţia devine critică cînd variatorul funcţionează în regim de multiplicator. Şi pentru contactul de ieşire se impune, ca necesară, găsirea de variante constructive care să conducă la micşorarea lui $\cos\beta$. Pentru realizarea acestor cerinţe s-a conceput un nou variator toroidal denumit variator toroidal îmbunătăţit, brevet de invenţie România 88530/1985.

ESTIMAREA SPINULUI ÎN VARIANTA TOROIDAL ÎMBUNĂTĂŢIT

Noua variantă este prevăzută cu o rolă bitoroidală, figura 2, formată din două role toroidale 1, montate pe acelaşi ax, înclinat faţă de axa discurilor conducător 2 şi condus 3 cu un unghi de 40°. Varierea raportului de transmitere se obţine prin înclinarea axei rolei cu ajutorul unei furci 4, piuliţei 5 şi şurubului 6. Mişcarea se transmite de la discul conducător 2 plasat pe arborele de intrare, care este sprijinit prin intermediul a doi

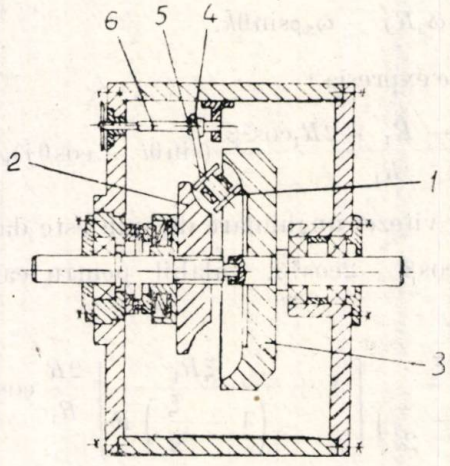


Fig. 2. — Variator toroidal îmbunătăţit.

rulmenţi 5 şi 6 la rola bitoroidală şi de aici discului condus, plasat pe arborele de ieşire ; forţa de apăsare este generată de un arc disc.

Pe lîngă reducerea spinului varianta oferă şi o durabilitate sporită rolei bitoroidale, datorită contactului singular, faţă de varianta clasică, asigurîndu-se şi condiţii bune de ungere pe ambele contacte.

Prin aplicarea aceleiași metodologii se pot deduce relațiile pentru estimarea spinului atît în contactul de intrare cît și cel de ieșire, figura 3a și figura 3b. Cu notațiile din figurile menționate mai sus, rezultă pentru contactul de intrare :

$$\bar{\omega}_1 = -\omega_1 \cos\beta \bar{i} + \omega_1 \sin\beta \bar{k}$$

$$\bar{\omega}_3 = \omega_3 \bar{i}$$

$$\bar{r} = \left[\rho \cos\theta \frac{R\cos\beta + R_1 \cos 2\beta}{\sin\beta} \right] \bar{i} + \rho \sin\theta \bar{j} - R\bar{k},$$

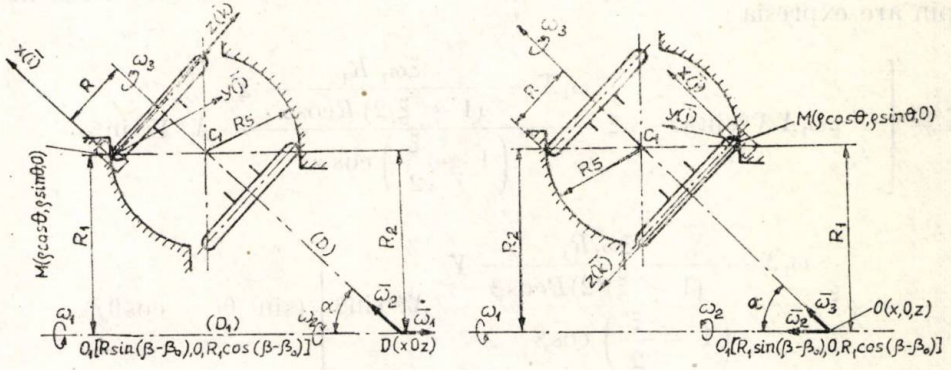


Fig. 3. — Estimarea spinului în varianta toroidal îmbunătățită : *a*, contact de intrare ; *b*, contact de ieșire.

iar vectorul vitezei de spin are expresia :

$$\bar{A} = -\omega \rho \sin\beta (\sin\theta \bar{i} - \cos\theta \bar{j}).$$

Parametrul adimensional al vitezei de spin, valabil pentru cazul rostogolirii pure, cît și atunci cînd apare alunecare, are expresia :

$$\frac{\omega_{SP}}{\omega_1} = -\sin\beta.$$

Pentru contactul de ieșire rezultă :

$$\bar{\omega}_3 = \omega_3 \bar{i}$$

$$\bar{\omega}_2 = \omega_2 \cos\beta \bar{i} + \omega_2 \sin\beta \bar{k}$$

$$\bar{r} = \left(\rho \cos\theta - \frac{R\cos\beta - R_1}{\sin\beta} \right) \bar{i} + \rho \sin\theta \bar{j} - R\bar{k},$$

iar vectorul vitezei de spin are expresia :

$$A = \rho \omega_1 XX^* \sin\beta (\sin\theta \bar{i} - \cos\theta \bar{j}),$$

unde

$$X = \frac{R_1 \cos 2\beta + 2R\cos\beta}{R}; \quad X^* = \frac{R}{R_1}.$$

Parametrul adimensional al vitezei de spin are expresia :

$$\frac{\omega_{SP}}{\omega_1} = -XX^* \sin\beta.$$

În cazul real de funcționare, deci cu alunecare, vectorul viteză de spin are expresia :

$$\bar{A} = \left[-\rho\omega_1 XX^* \sin\beta - \rho\xi \frac{\omega_1 X - \dfrac{\xi\omega_1 R_1}{(1+\xi/2)R\cos\alpha} Y}{\left(1+\dfrac{\xi}{2}\right)\cos\alpha} X^* Y \sin\beta + \right.$$

$$\left. + \rho\xi \frac{\omega_1 X - \dfrac{\xi\omega_1 R_1}{(1+\xi)/2)R\cos\beta} Y}{\left(1+\dfrac{\xi}{2}\right)\cos\beta} X^* \sin\beta \right] (\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j}).$$

Parametrul adimensional al vitezei are expresia :

$$\frac{\omega_{SP}}{\omega_1} - = \sin\beta \left[XX^* + \xi \frac{X - \dfrac{\xi R_1}{(1+\xi/2)R\cos\beta} Y}{\left(1+\dfrac{\xi}{2}\right)\cos\beta} X^* Y - \right.$$

$$\left. - \frac{X - \dfrac{\xi R_1}{(1+\xi/2)R\cos\beta} Y}{\left(1+\dfrac{\xi}{2}\right)\cos\beta} Y^* \right],$$

în care ξ reprezintă alunecarea adimensională, iar $Y^* = \cos\beta$.

Dacă se analizează contactul de intrare se observă că la $i = 1$, parametrul adimensional al vitezei unghiulare de spin capătă valoarea de 0,7 față de 1 cît era în varianta clasică, după care urmează o scădere a acestuia.

Se observă că, reducerea este mult mai mare mai ales pentru contactul de ieșire, deci această variantă va avea o capacitate portantă și un randament mult mai ridicat.

În schimb această variantă prezintă inconvenientul încărcării rulmenților rolei bitoroidale, precum și existenței pericolului apariției alunecării laterale, dacă punctele de contact nu sînt situate pe o sferă.

De aceea s-a conceput o nouă variantă, denumită variator toroidal cu spin redus, care a și fost brevetată, Brevet de invenție România nr. 92056/1986.

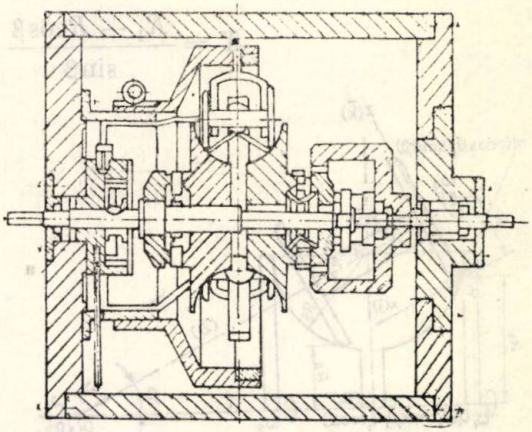


Fig. 4. — Variator toroidal cu spin redus.

ESTIMAREA SPINULUI LA VARIANTA TOROIDAL CU SPIN REDUS

Variatorul, figura 4, are în structura sa tot o rolă bitoroidală, formată din două role toroidale montate pe un arbore la mijlocul căruia este presată o bilă. Deplasarea radială este împiedicată de un inel reținere-ungere, care are același rol ca la varianta Kopp B.

Aplicînd o aceeași metodologie, prezentată anterior, pentru contactul de intrare, figura 5a, cît și cel de ieșire, figura 5b, rezultă, pentru contactul de intrare :

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \cos\beta \bar{i} + \omega_1 \sin\beta \bar{k}$$

$$\bar{\omega}_3 = -\omega_3 \bar{i}$$

$$\bar{r} = \left(\rho\cos\theta - \frac{R_1 + R\cos\beta}{\sin\beta}\right)\bar{i} + \rho\sin\theta\bar{j} - R\bar{k},$$

iar vectorul viteză de spin are expresia :

$$\bar{A} = -\omega_1 \sin\beta(\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j}).$$

Parametrul adimensional al vitezei de spin, valabil pentru cazul rostogolirii pure, cît și atunci cînd apare alunecare, are expresia :

$$\frac{\omega_{SP}}{\omega_1} = -\sin\beta,$$

similară ca în cazul precedent.

Pentru contactul de ieşire, figura 5b, rezultă :

$$\bar{\omega}_3 = -\omega_3\bar{i}$$

$$\bar{\omega}_2 = \omega_2\cos\beta\bar{i} + \omega_2\sin\beta\bar{k}$$

$$\bar{r} = (\rho\cos\theta - X)\bar{i} + (\rho\sin\theta - Y)\bar{j} - z\bar{k},$$

$$X = \frac{R_1 + R\cos\beta}{\sin\beta}.$$

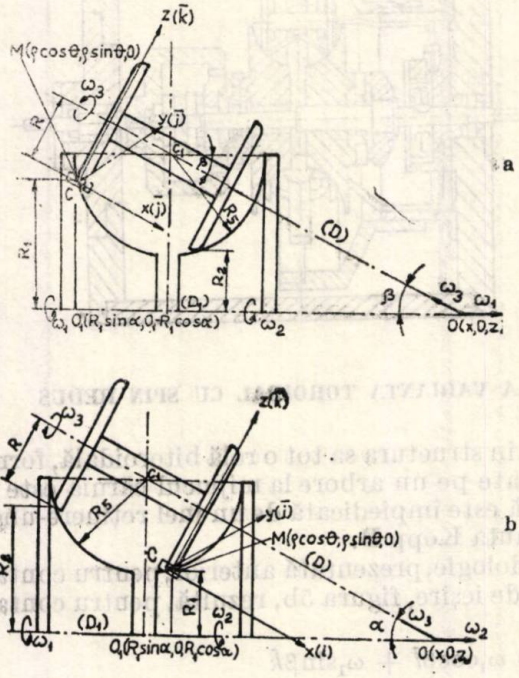


Fig. 5. — Estimarea spinului în variatorul toroidal cu spin redus : *a*, contact de intrare ; *b*, contact de ieşire.

Vectorul viteză de spin are expresia :

$\bar{A} = \omega_1\rho\sin\beta(\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j})$, atunci cînd nu se transmite putere, şi :

$$\bar{A} = \left[\rho\omega_1\sin\beta + 2\xi\omega_1\frac{1 + \dfrac{\xi}{(1+\xi)^2}}{\left(1 + \dfrac{\xi}{2}\right)}\rho\sin\beta\right](\sin\theta\bar{i} - \cos\theta\bar{j})$$

atunci cînd se transmite putere.

Parametrul adimensional al vitezei de spin cînd nu se transmite putere are expresia :

$$\frac{\omega_{SP}}{\omega_1} = \sin\beta,$$

iar atunci cînd se transmite putere:

$$\frac{\omega_{SP}}{\omega_1} = \sin\beta + 2\xi\sin\beta \frac{1 + \xi/(1+\xi)^2}{\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)},$$

Situaţia centralizatoare, în cazul rostogolirii pure, privind parametrul adimensional al spinului, pentru cele trei cazuri este dată în tabelul 2.

Tabelul 2

Parametrul adimensional al spinului, în cazul rostogolirii pure, la cele trei variante analizate

Tipul contactului / Tipul variatorului	Contact intrare	Contact ieşire
Varianta clasică □	$-\cos\beta$	$\frac{2R}{R_1}\sin\beta\cos\beta - \cos\beta + 2\cos^3\beta$
Varianta toroidal îmbunătăţit ○	$-\sin\beta$	$-\sin\beta\left[\cos 2\beta + \frac{2B}{R_1}\cos\beta\right]$
Varianta toroidal cu spin redus △	$-\sin\beta$	$\sin\beta$

Obs. Notaţiile din tabel corespund cu cele utilizate în cadrul figurilor din text.

Se observă avantajul net al acestui ultim tip de variator, din punct de vedere al spinului, la care se mai adaugă o durabilitate sporită a rolei datorită contactului singular, precum şi asigurarea unor bune condiţii de ungere.

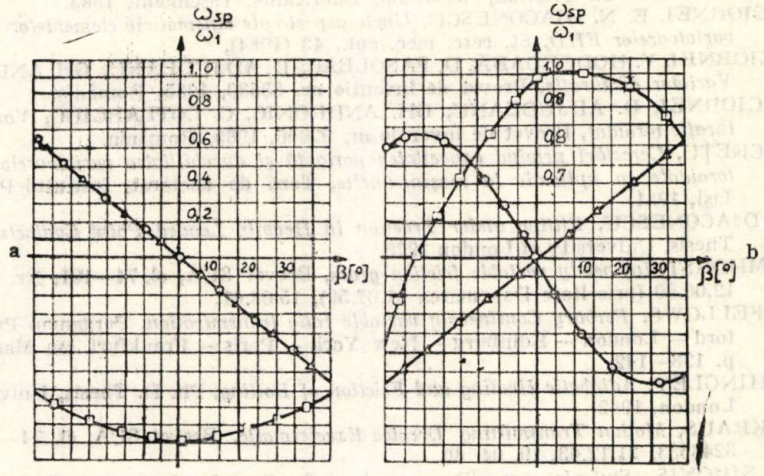


Fig. 6. — Spinul în cele trei variante analizate: *a*, contact de intrare; *b*, contact de ieşire.

Pentru comparaţie, în figura 6a şi b s-a reprezentat graficul de variaţie al spinului, pentru cele trei variante discutate, atît pentru contactul de intrare, cît şi pentru cel de ieşire.

CONCLUZII

După trecerea în revistă a celor mai reprezentative tipuri de variatoare toroidale, lucrarea prezintă metodologia de calcul a spinului la trei variante, și anume : clasic, îmbunătățit și cu spin redus.

Relațiile deduse pentru varianta clasică au indicat influența vitezei unghiulare de intrare, dimensiunile ariei de contact precum și unghiul de înclinare al rolei conduce, deci raportul de transmitere. A rezultat, ca direcție principală de reducere a spinului, măsuri constructive care să conducă la micșorarea lui $\cos\beta$; situația este valabilă atît pentru contactul de intrare, cît și pentru cel de ieșire. În acest fel a apărut varianta de variator toroidal îmbunătățit, care are în medie, spinul redus cu peste 40% față de varianta clasică, asigurîndu-se și bune condiții de lubrificare a rolei intermediare.

Varianta toroidal cu spin redus, are cel mai mic spin față de cele prezentate anterior, existînd și o bună posibilitate autocentrare a rolei intermediare.

Ultima variantă poate constitui punctul de plecare pentru proiectarea unor noi familii de variatoare toroidale cu performanțe deosebite.

Primit în redacție la 18 februarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. F. COMIDA, G. OBINI, *Continuesly variablé friction gears*, Brevet cl. F06h, nr. 981078, 02:10.59. 10.07.63, Anglia.
2. I. M. CIORNEI, *Utilizarea efectelor elastohidrodinamice în construcția variatoarelor de turație de tip frontal cu bile*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic București, 1986.
3. I. M. CIORNEI, *Implications of Spin in EHD Traction Drives*, International Scientific Conference an Friction, Wear and Lubricants, Taschkent, 1985.
4. I. M. CIORNEI, E. N. DIACONESCU, *Unele aspecte ale cinematicii elementelor active ale variatoarelor EHD*, St. cerc. mec. apl., **43** (1984),
5. I. M. CIORNEI, V. HODOROABĂ, D. FASOLEAC, D. ADJUDEANU, GH. ANDRONIC, *Variator de turație*, Brevet de invenție nr. 88530, 1985, România.
6. I. M. CIORNEI, D. ADJUDEANU, GH. ANDRONIC, C. COTLARCIUC, *Variator de turație toroidal*, Brevet de invenție nr. 92056, 1985, România.
7. O. S. CREȚU, *Cercetări privind capacitatea portantă și durabilitatea variatoarelor cu role toroidale cu aplicație la mașini-unelte*, Teză de doctorat, Insitutul Politehnic Iași, 1981.
8. E. N. DIACONESCU, *Pitting under Traction in Heavily Loaded Point Contacts*, Ph. D. Thesis, University of London 1975.
9. H. DAMHORST, *Infinetely variable friction gears*, Brevet SUA, cl. 74—191, Nr. 2995943, 12.06.60 (prioritate Danemarca 01.07.59), 15.08.61.
10. T. G. FELLOWS, *Perbury Contineasly variable ratio transmisation*. Pergamon Press, Oxford — London — Edinburg — New York — Paris — Frankfurt am Main, 1964, p. 123—142.
11. C. G. HINGLEY, *Adiabatic Heating and Friction of Rolling*, Ph. D. Thesis, University of London, 1962.
12. C. E. KRAUS, *Motion Transmitting Drevice Excelermatic*, Brevet SUA, cl. 74—200, Nr. 3246533, 31.12.63, 19. 04. 66
13. I. W. SIMONIS, *Stufenles verstellbare mechanische Getriebs*, Springer — Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1959, p. 1—72.

Documentație tehnică de la firma :

14. *** ARTER CO. Mönnedort — Zürich, Elveția.
15. *** BROTTBY MEK. VERKSTANDS AB. Agatran, Mölndal, Suedia.
16. *** W. Sisson CO, LTD. Gloncester, Anglia.
17. *** WILLIAM PRYM MBH, 519 Stoeberg Rheinland, Germania.

ANALIZA DINAMICĂ A MASTURILOR DE FORAJ LA OPERAȚII DE MANEVRĂ

de S. CHERGUI

ENTP – Hassi Messaoud, Algeria

Lucrarea analizează, teoretic și experimental, dinamica masturilor de foraj la operații de manevră. Pentru aceste structuri se stabilește un model dinamic adecvat, pe baza căruia se dezvoltă un algoritm general atit pentru determinarea pulsațiilor și formelor proprii de oscilație cit și pentru vibrațiile forțate.
Cu ajutorul programului SAP 05, s-au determinat atit pulsațiile și formele proprii de oscilație ale mastului MA 400–2 cit și răspunsul dinamic (eforturi secționale în toate barele și deplasările nodurilor structurii) al aceluiași mast. Determinările experimentale s-au efectuat la o sondă de mare adîncime (6766 m), prin înregistrări de eforturi secționale dinamice în elementele mastului (în diferite secțiuni și niveluri) și într-un chiolbaș, în timpul operațiilor de manevră.
Folosind rezultatele experimentale și cele teoretice, între care există o bună concordanță, sînt evidențiate observații interesante privind proiectarea și exploatarea masturilor de foraj.

1. ASPECTE GENERALE

1.1. MASTURILE DE FORAJ

Masturile de foraj sînt structuri metalice spațiale, cu noduri elastice, alcătuite din bare drepte (din țevi sau profile). Ca forme constructive se întîlnesc masturile de tip A și U. Prin intermediul masturilor se realizează următoarele funcții principale :

a) susținerea prin intermediul sistemului de manevră (troliu, cablu, geamblac, macara și cîrlig) a garniturilor de foraj, a coloanelor de burlane, a coloanelor de țevi de extracție, a prăjinilor de pompaj și manevrarea lor ;

b) amplasarea și susținerea stivelor de prăjini de foraj, țevi de extracție etc.

Din cele menționate rezultă că masturile de foraj sînt structuri de foarte mare importanță în utilajul petrolier de foraj.

1.2. GARNITURA DE FORAJ

Garnitura de foraj este un ansamblu de prăjini care fac legătura între fusul capului hidraulic (aflat la suprafață) și instrumentul de dislocare a rocilor (aflat la talpa sondei). Garnitura de foraj este alcătuită, în general, din următoarele părți componente principale (de la suprafață spre talpa

sondei : prăjină de antrenare, prăjini de foraj, uneori prăjini intermediare (de trecere) și prăjini grile. În afara părților principale susmenționate mai intră în componența garniturii de foraj următoarele elemente : racorduri speciale, diferite reducții de legătură, dispozitive speciale (lărgitoare și stabilizatori) și uneori amortizorul de vibrație.

1.3. SISTEMUL DE MANEVRĂ

Sistemul de manevră al instalațiilor de foraj este alcătuit prin convenție, din troliul de foraj, cablu, geamblac macara-cîrlig și toba cap mort.

Sistemul de manevră îndeplinește următoarele funcții principale :

a) introducerea și extragerea garniturii de foraj ;
b) adăugarea prăjinilor (bucăților) de avansare în timpul forajului ;
c) introducerea coloanelor de burlane pentru tubarea sondelor ;
d) susținerea garniturii de foraj și reglarea apăsării pe sapă în timpul forajului ;
e) ridicarea masturilor și turlelor rabatabile ;
f) transmiterea mișcării și energiei necesare la masa rotativă (cînd este necesar) ;
g) introducerea diferitelor aparate de măsură în sondă.

1.4. OPERAȚII DE MANEVRĂ

Operațiile de manevră, într-o instalație de foraj, sînt introducerea și extragerea garniturilor de foraj, țevilor de extracție și introducerea (și mai rar extragerea) coloanelor de burlane pentru tubaj.

La operațiile de manevră apar fenomene dinamice tranzitorii importante în sistemul de manevră, garnitura de foraj și mastul de foraj. Dinamica sistemului de manevră în timpul operațiilor de manevră este amplu cercetată [15], [16], [17] etc. Dinamica garniturii de foraj la operații de manevră este analizată în detaliu în lucrările [3], [4], [5], [6], [7] și [11] etc.

În articolul de față se analizează, teoretic și experimental, dinamica masturilor de foraj la manevrarea garniturii de foraj. Studiul dinamic al masturilor prezintă o mare importanță teoretică și practică, pentru concepția și exploatarea rațională a acestora.

Figura 1.1. reprezintă ansamblul : mast, sistemul de manevră, substructura, garnitura de foraj și sonda la operații de manevră, în care : 1 este mastul de foraj ; 2 — troliu ; 3 — cablu ; 4 — geamblac ; 5 — macara ; 6 — cîrlig ; 7 — chiolbaș ; 8 — elevator ; 9 — toba cap mort : 10 — tronsoanele prăjinilor de foraj ; 11 — tronsonul prăjinilor grele ; 12 — sapă de foraj ; 13— fluidul de foraj ; 14 — substructură și 15 — masă rotativă.

2. INSTALAȚIA DE EXPERIMENTARE, APARATURA DE ÎNREGISTRARE ȘI AMPLASAREA TRADUCTOARELOR

Pentru a obține rezultate reale, cercetările experimentale au fost efectuate la o instalație de foraj în condiții de șantier, la o sondă cu adîncime de 6766 m tubată în felul arătat în [8].

2.1. INSTALAȚIA DE EXPERIMENTARE

Instalația de foraj folosită la experimente a fost F 400 — EC (electrică alimentată de la rețea) cu caracteristicile principale indicate în [22]. Instalația de foraj este dotată ca mast MA 400—2, tip A, cu caracteristicile tehnice principale indicate în [20].

2.2. APARATURA DE ÎNREGISTRARE

Cercetarea experimentală a fost realizată folosind metoda de măsurare și înregistrare prin tensometria electrică rezistivă, [1], [2] și [14] care se bazează pe existența a trei elemente : aparatul de măsurare și înregistrare, puntea tensometrică și traductorul.

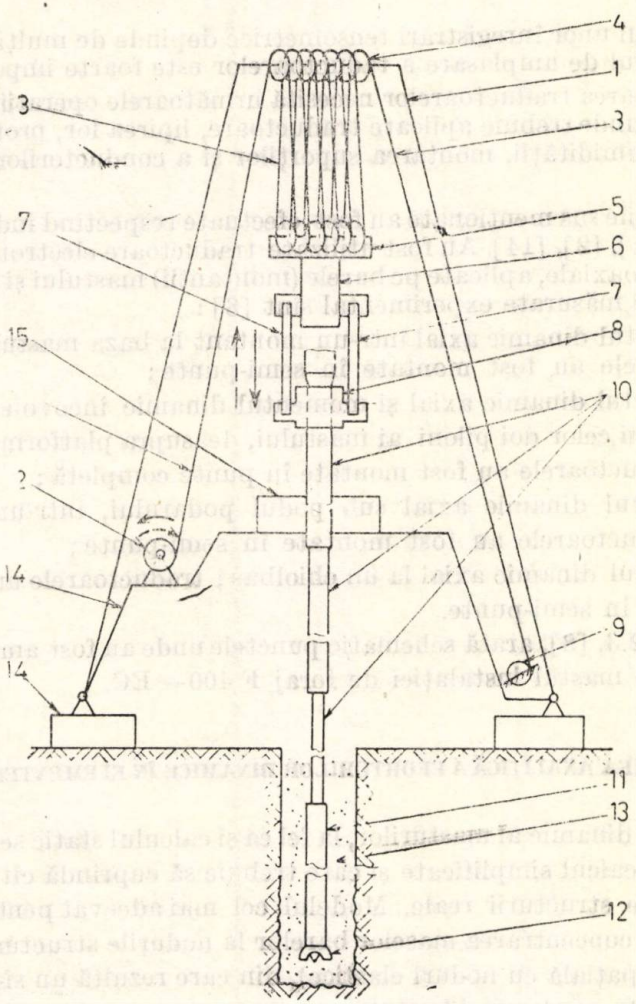


Fig. 1.1

A fost utilizat un aparat de măsurare și înregistrare de tipul unui oscilograf cu galvanometru (Honeywell 2208 A 002 cu înregistrare pe hîrtie sensibilizată în ultraviolet). Principiul de funcționare al aparatului este prezentat în [4].

Pentru a putea efectua înregistrări de precizie în tensometria electrică rezistivă, se folosește montajul în punte al traductoarelor cu care se măsoară. Cel mai simplu tip de montaj în punte este puntea Wheatstone, figura 2.1, care este alimentată de la o sursă de curent continuu. Deci la utilizarea metodei tensometriei electrice rezistive sînt necesare, conform schemei din figura 2.2 : puntea Wheatstone (P W), puntea tensometrică (P T) și oscilograful de înregistrare (O I).

2.3. AMPLASAREA TRADUCTOARELOR

Succesul unor înregistrări tensometrice depinde de mulți factori dintre care modul de amplasare a taductoarelor este foarte important.

Amplasarea traductoarelor necesită următoarele operații : pregătirea suprafețelor unde trebuie aplicate traductoare, lipirea lor, protejarea acestora contra umidității, montarea suporților și a conductorilor și verificările necesare.

Operațiile sus menționate au fost efectuate respectînd indicațiile date în lucrările [1], [2], [14]. Au fost utilizate traductoare electrotensometrice rezistive monoaxiale, aplicate pe barele (montanții) mastului și pe un chiolbaș. Mărimile măsurate experimental sînt [8] :

a) efortul dinamic axial într-un montant la baza mastului ; traductoarele au fost montate în semi-punte ;
b) efortul dinamic axial și momentul dinamic încovoietor în montanții celor doi piloni ai mastului, deasupra platformei de lucru ; traductoarele au fost montate în punte completă ;
c) efortul dinamic axial sub podul podarului, într-un montant ; traductoarele au fost montate în semi-punte ;
d) efortul dinamic axial la un chiolbaș ; traductoarele au fost montate în semi-punte.

Figura 2.3, [8], arată schematic punctele unde au fost amplasate traductoarele pe mastul instalației de foraj F 400— EC.

3. DETERMINAREA ANALITICĂ A EFORTURILOR DINAMICE ÎN ELEMENTELE MASTULUI

Calculul dinamic al masturilor, la fel ca și calculul static se efectuează pe modele de calcul simplificate și care trebuie să cuprindă cît mai corect caracteristicile structurii reale. Modelul cel mai adecvat pentru un mast se obține prin concentrarea maselor barelor la nodurile structurii (modelul de structură spațială cu noduri elastice), din care rezultă un sistem cu un număr finit de grade de libertate.

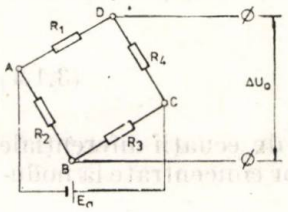


Fig. 2.1

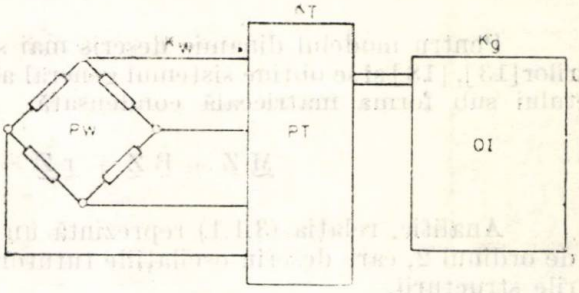
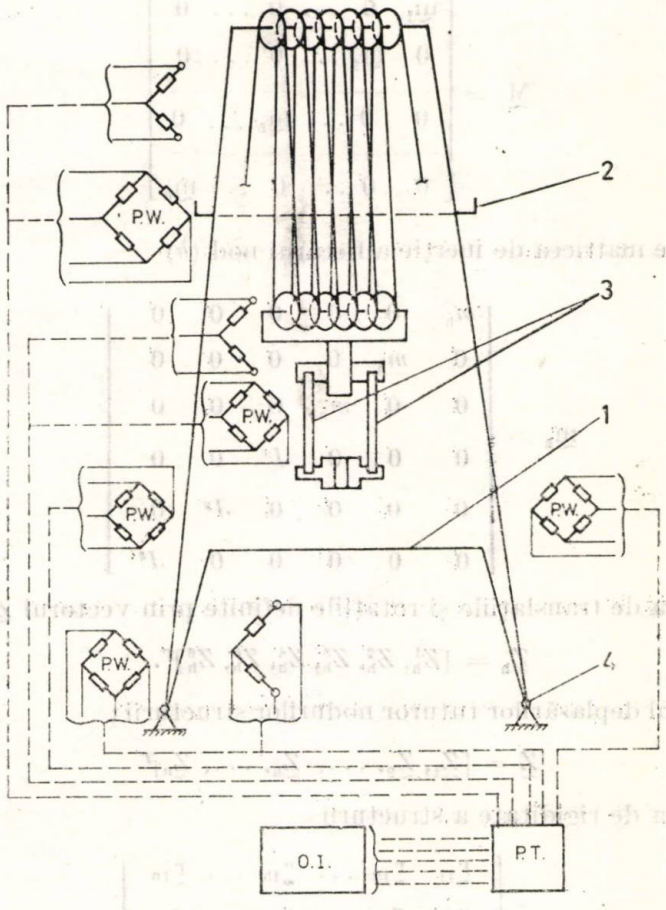


Fig. 2.2



1. Platformă de lucru
2. Podul podarului
3. Chiolbaș
4. Baza mastului

Fig. 2.3

3.1. ECUAȚIILE DE MIȘCARE ALE MASTULUI

Pentru modelul dinamic descris mai sus se aplică metoda deplasărilor [13], [18] și se obține sistemul general al ecuațiilor de mișcare ale mastului sub forma matriceală condensată

$$\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\ddot{Z}} + \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\dot{Z}} + \underset{\sim}{r}\,\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{F}(t) \tag{3.1.1}$$

Analitic, relația (3.1.1) reprezintă un sistem de ecuații diferențiale de ordinul 2, care descriu oscilațiile tuturor maselor concentrate la nodurile structurii.

În acestea $\underset{\sim}{M}$ este matricea de inerție a întregii structuri:

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{m}_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{m}_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & \underset{\sim}{m}_h & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \underset{\sim}{m}_n \end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

unde $\underset{\sim}{m}_h$ este matricea de inerție a fiecărui nod (h)

$$\underset{\sim}{m}_h = \begin{bmatrix} m_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J^y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^z \end{bmatrix} \tag{3.1.3}$$

ținînd seama de translațiile și rotațiile definite prin vectorul $\underset{\sim}{Z}_h$

$$\underset{\sim}{Z}_h = [Z_h^1, Z_h^2, Z_h^3, Z_h^4, Z_h^5, Z_h^6]^T. \tag{3.1.4}$$

$\underset{\sim}{Z}$ — vectorul deplasărilor tuturor nodurilor structurii;

$$\underset{\sim}{Z} = [\underset{\sim}{Z}_1, \underset{\sim}{Z}_2, \dots, \underset{\sim}{Z}_h, \dots, \underset{\sim}{Z}_n]^T \tag{3.1.5}$$

$\underset{\sim}{r}$ — matricea de rigiditate a structurii

$$\underset{\sim}{r} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{r}_{11} & \underset{\sim}{r}_{12} & \dots & \underset{\sim}{r}_{1h} & \dots & \underset{\sim}{r}_{1n} \\ \underset{\sim}{r}_{21} & \underset{\sim}{r}_{22} & \dots & \underset{\sim}{r}_{2h} & \dots & \underset{\sim}{r}_{2n} \\ \hline \underset{\sim}{r}_{h1} & \underset{\sim}{r}_{h2} & \dots & \underset{\sim}{r}_{hh} & \dots & \underset{\sim}{r}_{hn} \\ \hline \underset{\sim}{r}_{n1} & \underset{\sim}{r}_{n2} & \dots & \underset{\sim}{r}_{nh} & \dots & \underset{\sim}{r}_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.1.6}$$

unde $\underset{\sim}{r}_{ij}$ sînt submatrici 6×6 și reprezintă reacțiunile din legăturile care blochează structura (masele sistemului) pentru deplasarea impusă $\underset{\sim}{Z}_h = \underset{\sim}{1}$.

$\dot{\underset{\sim}{Z}}$ — vectorul vitezelor parametrilor de oscilație;

$\underset{\sim}{B}$ — matricea constantelor de amortizare, cu aceleași dimensiuni ca și matricea de rigiditate

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{b}_{11} & \underset{\sim}{b}_{12} & \cdots & \underset{\sim}{b}_{1n} \\ \underset{\sim}{b}_{21} & \underset{\sim}{b}_{22} & \cdots & \underset{\sim}{b}_{2n} \\ \hline \underset{\sim}{b}_{n1} & \underset{\sim}{b}_{n2} & \cdots & \underset{\sim}{b}_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.1.7}$$

iar $\underset{\sim}{F}(t)$ reprezintă vectorul forțelor exterioare.

Prin neglijarea inerției de rotație a maselor concentrate în nodurile structurii (situație apropiată de realitate), fiecare nod h are numai 3 grade de libertate (translațiile după X, Y, Z) grupate în vectorul

$$\Delta_h = [\Delta_h^X \ \Delta_h^Y \ \Delta_h^Z]^T \tag{3.1.8}$$

Matricea de inerție (3.1.3) devine

$$\underset{\sim}{m}_h = \begin{bmatrix} m_h & 0 & 0 \\ 0 & m_h & 0 \\ 0 & 0 & m_h \end{bmatrix} \tag{3.1.9}$$

Vectorul (3.1.5) devine

$$\underset{\sim}{Z} = [\underset{\sim}{\Delta}\,;\,\underset{\sim}{\varphi}]^T \tag{3.1.10}$$

în care

$$\underset{\sim}{\Delta} = [\underset{\sim}{\Delta}_1, \underset{\sim}{\Delta}_2, \cdots \underset{\sim}{\Delta}_n]^T \tag{3.1.11}$$

reprezintă vectorul deplasărilor liniare ale nodurilor iar $\underset{\sim}{\varphi}$ vectorul rotirilor tuturor nodurilor.

Vectorul forțelor perturbatoare se consideră compus numai din forțele de la noduri

$$\underset{\sim}{F}(t) = [\underset{\sim}{F}_1, \underset{\sim}{F}_2, \cdots, \underset{\sim}{F}_h, \cdots, \underset{\sim}{F}_n]^T \tag{3.1.12}$$

în care

$$\underset{\sim}{F}_h = [F_h^X \ F_h^Y \ F_h^Z]^T. \tag{3.1.13}$$

Partiționînd matricele $\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{r}$ cu componentele $\underset{\sim}{\Delta}$, $\underset{\sim}{\varphi}$, ecuația matriceală (3.1.1) devine

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{M} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underset{\sim}{\Delta}} \\ \ddot{\underset{\sim}{\varphi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{\Delta\Delta} & \underset{\sim}{B}^{\Delta\varphi} \\ \underset{\sim}{B}^{\varphi\Delta} & \underset{\sim}{B}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\Delta}} \\ \dot{\underset{\sim}{\varphi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{r}^{\Delta\Delta} & \underset{\sim}{r}^{\Delta\varphi} \\ \underset{\sim}{r}^{\varphi\Delta} & \underset{\sim}{r}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Delta} \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{\mathfrak{M}} \end{bmatrix} \tag{3.1.14}$$

Deoarece în nodurile strcuturii acţionează numai forţe (3.1.12), rezultă $\mathfrak{M} = 0$ şi prin neglijarea inerţiei de rotaţie, se admite $J = 0$, $B^{\Delta\varphi} = B^{\varphi\varphi} = 0$.

Deci ecuaţia (3.1.14) se descompune în

$$M\ddot{\Delta} + B^{\Delta\Delta}\dot{\Delta} + B^{\Delta\varphi}\dot{\varphi} + r^{\Delta\Delta}\Delta + r^{\Delta\varphi}\varphi = F(t) \qquad (3.1.15,a)$$

$$r^{\varphi\Delta}\Delta + r^{\varphi\varphi}\varphi = 0 \qquad (3.1.15,b)$$

Din ecuaţia (3.1.15,b) rezultă

$$\varphi = -(r^{\varphi\varphi})^{-1}\, r^{\varphi\Delta}\Delta \qquad (3.1.16)$$

Prin introducerea (3.1.16) în ecuaţia (3.1.15,a) se obţine sistemul ecuaţiilor matriceale a vibraţiilor masturilor cu neglijarea inerţiei de rotaţie

$$M\ddot{\Delta} + \beta\dot{\Delta} + K\Delta = F(t). \qquad (3.1.17)$$

în care

$$\beta = B^{\Delta\Delta} - B^{\Delta\varphi}(r^{\varphi\varphi})^{-1}\, r^{\varphi\Delta} \qquad (3.1.18)$$

$$K = r^{\Delta\Delta} - r^{\Delta\varphi}(r^{\varphi\varphi})^{-1}\, r^{\varphi\Delta} \qquad (3.1.19)$$

Sistemul (3.1.17) conţine numai jumătatea din necunoscutele sistemului (3.1.1), ceea ce reprezintă un avantaj esenţial pentru calcul (chiar pentru un calculator electronic cifric).

3.2. DETERMINAREA PULSAŢIILOR ŞI FORMELOR PROPRII DE OSCILAŢIE ALE MASTULUI

Se cunoaşte [19] că amortizarea influenţează puţin valorile pulsaţiilor proprii ale unei structuri. În mod corespunzător pulsaţiile proprii se pot determina din ecuaţia

$$M\ddot{\Delta} + K\Delta = 0 \qquad (3.2.1)$$

obţinută din (3.1.17) prin anularea matricelor β şi F.

Pentru ecuaţia (3.2.1) se admite soluţia

$$\Delta = A\cos(pt - \theta) \qquad (3.2.2)$$

unde

$$A = [A_1, A_2, \ldots, A_h, \ldots, A_n]^T \qquad (3.2.3$$

reprezintă vectorii amplitudinilor pe direcţiile parametrilor de oscilaţie n vibraţia liberă.

Introducînd (3.2.2) în (3.2.1) se obține ecuația matriceală

$$(\underset{\sim}{K} - p^2\underset{\sim}{M})\underset{\sim}{A} = 0 \tag{3.2.4}$$

care reprezeintă un sistem algebric omogen în constantele $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Pentru ca acest sistem să aibă soluții diferite de cea banală trebuie îndeplinită condiția

$$\det\,(\underset{\sim}{K} - p^2\underset{\sim}{M}) = 0 \tag{3.2.5}$$

care reprezeintă o ecuație de gradul n în p^2, denumită ecuația pulsațiilor proprii.

Rădăcinile ecuației (3.2.5) aranjate în ordine

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_\alpha < \ldots < p_n \tag{3.2.6}$$

sînt pulsațiile proprii ale mastului, p_1 fiind denumită pulsație fundamentală.

Fiecărei pulsații proprii p_α îi corespunde o formă proprie de oscilație ale cărei amplitudini definesc vectorul

$$\underset{\sim}{V}_\alpha = [A_{1,\alpha}\ A_{2,\alpha} \ldots A_{h,\alpha} \ldots A_{n,\alpha}]^T \tag{3.2.7}$$

ale cărui componente se determină din (3.2.4) pentru $p = p_\alpha$.

Sistemul (3.2.4) fiind omogen, una din amplitudini se alege arbitrar.

Verificarea vectorului $\underset{\sim}{V}_\alpha$ a ecuației matriceale (3.2.4) ia forma relației

$$\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{V}_\alpha\, p_\alpha = \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{V}_\alpha \tag{3.2.8}$$

Vectorul propriu $\underset{\sim}{V}_\alpha$ este normalizat dacă îndeplinește condiția

$$\underset{\alpha}{V}^T\,\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{V}_\alpha = 1 \text{ sau } \sum_h m_h A_{h,\alpha}^2 = 1 \tag{3.2.9}$$

ceea ce permite determinarea valorii arbitrare luate pentru una din componentele (3.2.7).

Doi vectori oarecare $\underset{\sim}{V}_\alpha$, $\underset{\sim}{V}_\beta$ îndeplinesc proprietatea de ortogonalitate, [13], exprimată prin relațiile

$$\underset{\beta}{V}\,\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{V}_\alpha = 0 \text{ sau } \sum_h m_h A_{h\alpha} A_{h\beta} = 0. \tag{3.2.10}$$

Totalitatea vectorilor proprii formează matricea modală

$$\underset{\sim}{V} = [\underset{\sim}{V}_1\ \underset{\sim}{V}_2 \ldots \underset{\sim}{V}_\alpha\ \underset{\sim}{V}_\beta \ldots \underset{\sim}{V}_n]^T \tag{3.2.11}$$

care este o matrice pătratică, în cazul masturilor de dimensiuni $3n \times 3n$.

Folosind pe (3.2.9), se ajunge la relaţia

$$\underset{\sim}{V}^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{U} \tag{3.2.12}$$

care prezintă condiţia de normalizare a tuturor vectorilor proprii, în care $\underset{\sim}{U}$ este matricea unitate de rang 3n.

Ecuaţia (3.2.4) este îndeplinită de toţi vectorii proprii, şi folosind (3.2.8) se obţine relaţia

$$\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{V} \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{V} \tag{3.2.13}$$

unde matricea diagonală

$$\underset{\sim}{P} = \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^2 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & p_n^2 \end{bmatrix} \tag{3.2.14}$$

reprezintă matricea spectrală.

Vibraţia liberă a mastului se obţine ca o combinaţie liniară a vectorilor proprii sub forma

$$\Delta_h^l = \sum_\alpha C_\alpha A_{h\alpha} \cos(p_\alpha t - \theta_\alpha) =$$

$$= \sum_\alpha C_\alpha A_{h\alpha}(B_{1,\alpha} \cos p_\alpha t + B_{2,\alpha} \sin p_\alpha t) \tag{3.2.15}$$

$$h = 1, 2, \dots, n, \dots, \alpha$$

unde C_α, θ_α sau $B_{1,\alpha}$, $B_{2,\alpha}$ sînt constante care se determină din condiţiile iniţiale :

$$\Delta_h(0) = \Delta_{h,0} \; ; \; \dot{\Delta}_h(0) = V_{h,0}$$

3.3. PULSAŢII ŞI FORME PROPRII DE OSCILAŢIE ALE MASTULUI MA 400—2

Mastul MA 400—2 este de tip A (fig. 3.1,a) cu picioarele din ţeavă, asamblate în formă dreptunghiulară (fig. 3.1,b). Mastul este alcătuit din bare drepte (539 de bare fără podul podarului) legate rigid la noduri (sînt 194 de noduri).

Folosind modelul dinamic de structură spaţială cu noduri elastice, pulsaţiile şi formele proprii de oscilaţie au fost obţinute pe baza algoritmului prezentat în paragraful anterior şi utilizînd programul SAP 05.

Primele trei pulsaţii proprii ale mastului, listate de calculator, sînt :

$$p_1 = 4{,}35 \text{ rad/s} \; ; \; p_2 = 7{,}72 \text{ rad/s şi } p_3 = 19{,}00 \text{ rad/s}.$$

Figura 3.3, reprezintă forma proprie de oscilaţie a unui montant şi a secţiunii transversale de la nivelul geamblacului (fig. 3.2), iar figurile 3.4 şi 3.5 indică formele proprii de oscilaţie corespunzătoare pulsaţiilor proprii p_2 şi p_3 a secţiunii de la nivelul geamblacului.

3.4. EFORTURI DINAMICE ȚINÎND SEAMA DE VARIAȚIA FORȚEI DE LA CÎRLIG

La operațiile de manevră sarcina la cîrlig prezintă oscilații importante, mai ales la smulgerea din pene și prinderea în pene.

La excitația forței de la cîrlig, mastul este supus la vibrații forțate pe care le analizăm prin metoda modală.

Vibrațiile structurii sînt descrise de sistemul (3.1.17). Pentru vibrațiile stabilizate, se alege o soluție sub forma

$$\underset{\sim}{\Delta} = \underset{\sim}{V}\,\underset{\sim}{q}\,; \quad \Delta_h = \sum_{\alpha} A_{h,\alpha}\, q_\alpha(t)\,;$$

$$h = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.4.1)$$

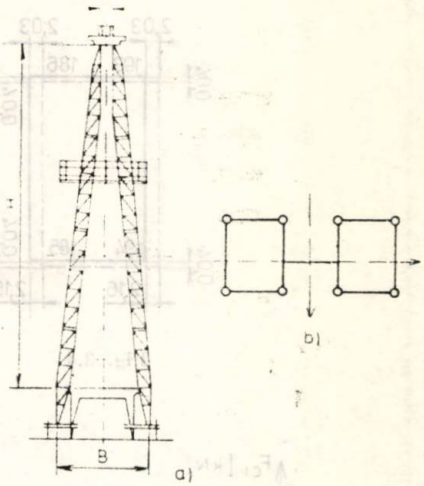


Fig 3 1

Fig. 3.1

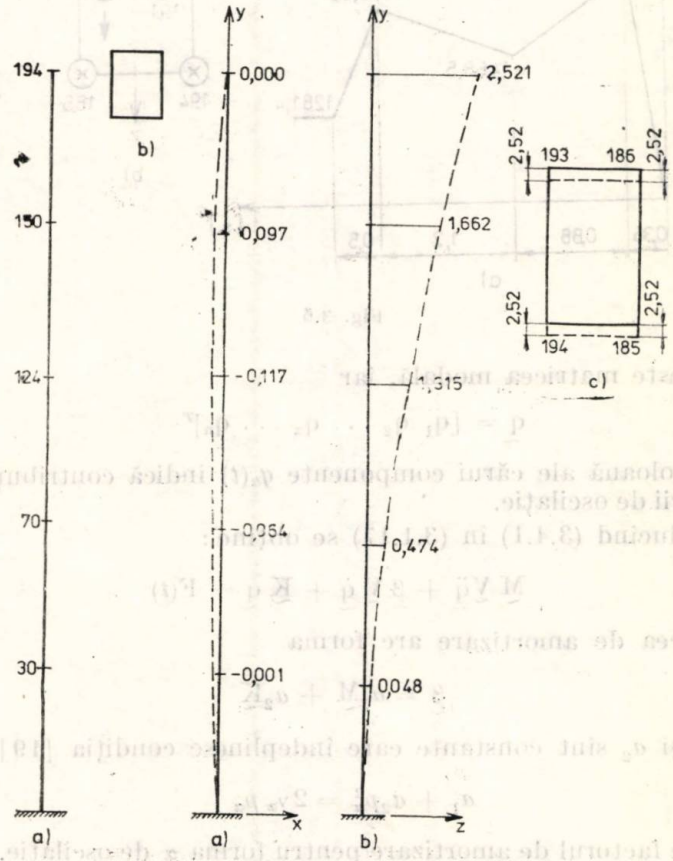


Fig. 3.2 Fig. 3.3

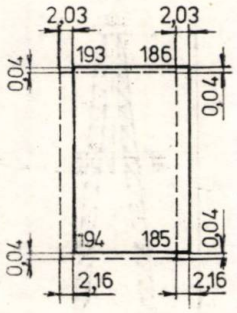


Fig. 3.4

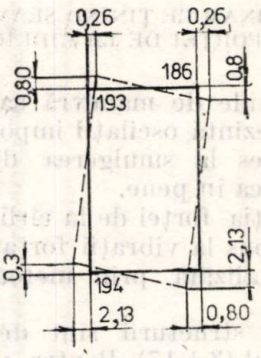


Fig. 3.5

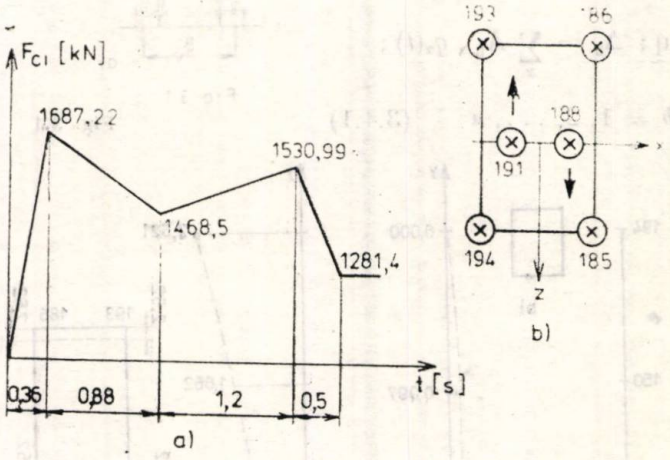


Fig. 3.6

în care $\underset{\sim}{V}$ este matricea modală, iar

$$\underset{\sim}{q} = [q_1 \; q_2 \; \cdots \; q_\alpha \; \cdots \; q_n]^T \tag{3.4.2}$$

un vector-coloană ale cărui componente $q_\alpha(t)$ indică contribuţia fiecărei forme proprii de oscilaţie.

Introducînd (3.4.1) în (3.1.17) se obţine:

$$\underset{\approx}{M}\,\underset{\sim}{V}\ddot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\sim}{\beta}\,\underset{\sim}{V}\,\dot{\underset{\sim}{q}} + \underset{\approx}{K}\,\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{F}(t) \tag{a}$$

Matricea de amortizare are forma

$$\underset{\sim}{\beta} = a_1\underset{\approx}{M} + a_2\underset{\approx}{K} \tag{b}$$

în care a_1 şi a_2 sînt constante care îndeplinesc condiţia [19]:

$$a_1 + a_2 p_\alpha^2 = 2\nu_\alpha p_\alpha \tag{3.4.3}$$

unde ν_α este factorul de amortizare pentru forma α de oscilaţie.

Ţinînd seama de (3.2.12) şi (3,2.13) şi multiplicînd relaţia (3) la stînga cu $\underset{\sim}{V}^T$, se obţine ecuaţia matriceală

$$\ddot{\underset{\sim}{q}} + (a_1\underset{\sim}{U} + a_2\underset{\sim}{P})\dot{\underset{\sim}{q}} + P\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{V}^T\underset{\sim}{F} \tag{3.4.4}$$

care reprezintă analitic, $3n$ ecuaţii diferenţiale de ordinul 2, care, pe baza relaţiei (3.4.3), au forma

$$\ddot{q}_\alpha + 2\nu_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha + p_\alpha^2 q_\alpha = \underset{\sim}{V}_\alpha^T\underset{\sim}{F} = \sum_h A_{h,\alpha} F_h(t) = S_\alpha(t) \tag{3.4.5}$$

$$\alpha = 1, 2 \ldots, n$$

Soluţiile ecuaţiilor (3.4.5), utilizînd integrala Duhamel, [13], [19], au forma

$$q_\alpha = C_\alpha \cos p_\alpha t + D_\alpha \sin p_\alpha t +$$

$$+ \frac{1}{p_\alpha^*}\int_0^t S_\alpha(t)e^{-\nu_\alpha p_\alpha(t-\tau)} \sin p_\alpha^*(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.4.6}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n$$

în care primii doi termeni reprezintă soluţia părţii omogene, iar cel de al treilea soluţia particulară, în care

$$p_\alpha^* = p_\alpha\sqrt{1-\nu_\alpha^2} \tag{3.4.7}$$

este pulsaţia proprie ţinînd seama de amortizare.

Constantele C_α, D_α se determină din condiţiile iniţiale

$$\underset{\sim}{q}_0 = [C_1C_2 \ldots C_\alpha \ldots]^T; \quad \dot{\underset{\sim}{q}}_0 = [p_1D_1\, p_2D_2 \ldots p_\alpha D_\alpha \ldots]^T \tag{3.4.8}$$

care trebuie exprimate în funcţie de deplasările şi vitezele la $t = 0$ ale nodurilor structurii, cu alte cuvinte în funcţie de vectorii $\Delta_{h,0}$ şi $\dot{\Delta}_{h,0} = v_{h,0}$. Pentru acest scop, se multiplică la stînga relaţia (3.4.1) cu $\underset{\sim}{V}^{-1}$, care din (3.2.12) este egală cu şi $\underset{\sim}{V}^T\underset{\sim}{M}$ şi se obţin relaţiile

$$\underset{\sim}{q}_0 = V^T\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\Delta}_0; \quad \dot{\underset{\sim}{q}}_0 = V^T\underset{\sim}{M}\,\dot{\underset{\sim}{\Delta}}_0 \tag{3.4.9}$$

Dacă $\underset{\sim}{q}_0 = 0$; $\dot{\underset{\sim}{q}} = 0$ atunci

$$q_\alpha = \frac{1}{p_\alpha^*}\int_0^t S_\alpha(\tau)e^{-\nu_\alpha p_\alpha(t-\tau)} \sin p_\alpha^*(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.4.10}$$

care introdusă în (3.4.1) conduce la expresia deplasărilor

$$\Delta_h = \sum_{\alpha} A_{h,\alpha}\, q_\alpha(t)\,;\ \alpha = 1, 2, \ldots, n \ldots \qquad (3.4.11)$$

$$h = 1, 2, \ldots, n \ldots$$

în vibrația forțată stabilizată.

Cunoscînd deplasările (3.4.11) se determină forțele de inerție

$$F_h^i = -m_h \ddot{\Delta}_h = -m_h \sum_{\alpha} A_{h,\alpha}\, \ddot{q}_\alpha(t) \qquad (3.4.12)$$

$$h = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Forțele de inerție se suprapun cu forțele perturbatoare și permit determinarea eforturilor dinamice.

3.5. RĂSPUNSUL DINAMIC AL MASTULUI MA 400–2 LA RIDICAREA DE PE ELEVATOR AL PASULUI 37 (5 in)

Sarcina de la cîrlig și modul ei de variație în timp sînt precizate în figura 3.6,a. La nivelul geamblacului forțele din ramurile cablului se aplică în nodurile 185, 186, 188, 191, 193 și 194 (fig. 3.6,b) și au componentele :

$Y_{185} = Y_{186} = -237{,}49$ kN ; $Y_{188} = -68{,}85$ kN :
$Z_{188} = 5{,}78$ kN ; $Y_{191} = -113{,}90$ kN ;
$Z_{191} = 16{,}20$ kN ; $Y_{193} = Y_{194} = -300{,}50$ kN ;

Calculul eforturilor secționale și deplasărilor s-a efectuat folosind programul SAP 05, atît pentru încărcarea statică $F_{Cl} = 1281{,}04$ kN cît și pentru încărcarea dinamică (fig. 3.6,a). Pentru încărcarea dinamică s-a utilizat metoda modală prezentată în § 3.4. Parametrii q(3.4.6) s-au calculat în pași de 0,03 s, timp de 2,94 s.

La nivelul geamblacului deplasările dinamice ale nodurilor sînt trecute în tabelul 3.5.1, împreună cu deplasările statice.

Tabelul 3.5.1

Nod	Cazul	Timp [s]	Δ_X [mm]	Δ_Y [mm]	Δ_Z [mm]	Δ_{tot} [mm]
185	Dinamic	0,9	1,216	0,008	−70,172	70,178
	Static	—	0,950	−9,860	35,898	37,220
186	Dinamic	0,9	2,092	−2,611	−70,139	70,216
	Static	—	2,318	−10,305	35,867	37,380
193	Dinamic	0,9	2,087	−2,765	−70,922	71,000
	Static	—	2,33	−11,063	36,810	38,490
194	Dinamic	0,9	0,922	−0,231	−70,967	70,972
	Static	—	0,961	−10,576	36,831	38,33

Aprecierea efectului dinamic al încărcării se face prin raportul

$$C_d = \frac{(\Delta_{din})_{tot}}{(\Delta_{st})_{tot}} = \frac{71}{38,49} = 1,845.$$

Evident, folosirea acestui raport pentru fiecare componentă a deplasării duce la coeficienți diferiți, care nu pot da indicații concludente asupra efectului dinamic al ansamblului.

4. RĂSPUNSUL DINAMIC, EXPERIMENTAL, AL MASTULUI LA OPERAȚII DE MANEVRĂ

4.1. ALCĂTUIREA GARNITURII DE FORAJ MANEVRATE

Alcătuirea constructivă a garniturii manevrate, caracteristicile tehnice ale prăjinilor de foraj și prăjinilor grele și caracteristicile fluidului de foraj aflat în sondă în timpul operațiilor de manevră sînt indicate în lucrarea [8].

4.2. RĂSPUNSUL DINAMIC AL MASTULUI LA MANEVRAREA PASULUI 9 AL PRĂJINILOR DE FORAJ 5 in.

Figura 4.1, prezintă răspunsul dinamic (variația efortului axial N_{58} și a momentelor încovoietoare M_{45} respectiv M_{50}) al barelor 45, 50, 58 la forța perturbatoare aplicată la cîrlig (F_C este efortul axial într-un chiolbaș) la etapa de ridicare de pe elevator pentru coborîre, al pasului 9 al prăjinilor de foraj 5 in.

4.3. RĂSPUNSUL DINAMIC AL MASTULUI LA MANEVRAREA PASULUI 37 AL PRĂJINILOR DE FORAJ 5 in.

Figura 4.2, prezintă răspunsul dinamic (variația eforturilor axiale : N_5, N_{50} și N_{348}) al barelor 5, 50 și 348 la forța perturbatoare aplicată la cîrlig, la ridicarea de pe elevator și începutul ridicării al pasului 37 al prăjinilor de foraj 5 in.

4.4. INTERPRETAREA REZULTATELOR

În continuare se analizează eforturile în barele mastului în care s-au efectuat determinări experimentale în etapele de ridicare de pe elevator respectiv așezarea pe elevator a garniturii de foraj.

4.4.1. Manevrarea pasului 9 al prăjinilor de foraj 5 in

În tabelul 4.4.1, coloanele au următoarele semnificații : A este etapa de ridicare din elevator pentru coborîre ; B — frînarea și așezarea pe elevator la coborîre ; C — ridicarea stabilizată ; D — coborîre stabilizată și E — static.

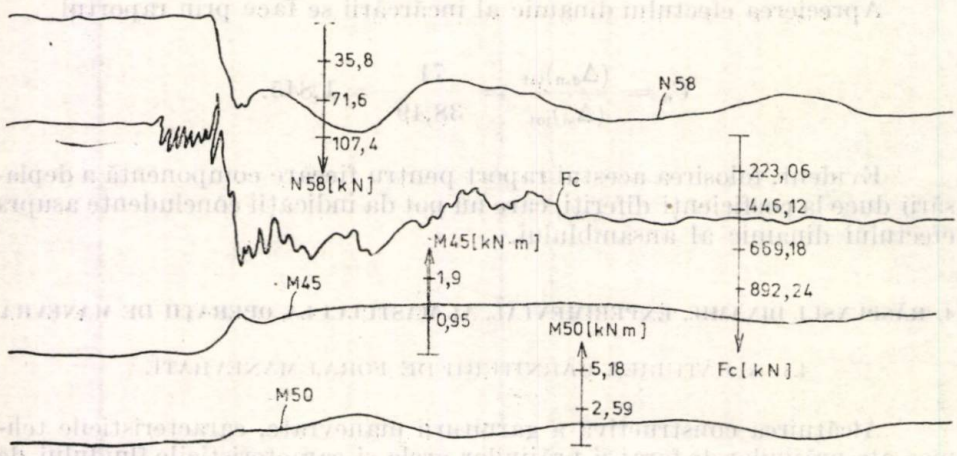


Fig. 4.1

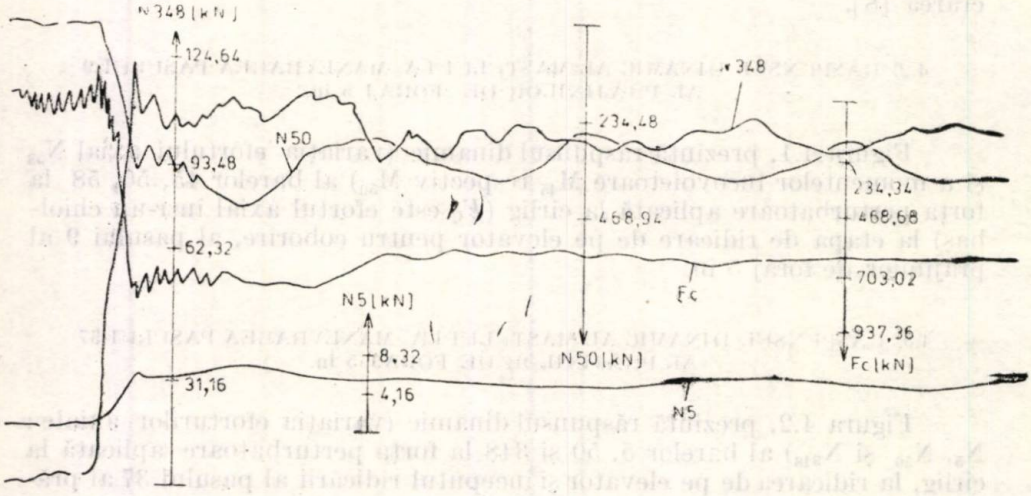


Fig. 4.2

Tabelul 4.4.1

Bara	Efort axial / Moment încovoietor	A	B	C	D	E
45	N kN	—	—	—	—	—
	M kN.m	1,33	1,23	1,04	0,59	0,58
50	N kN	—	—	—	—	—
	M kN.m	2,07	1,16	1,29	0,64	1,05
58	N kN	105,61	85,92	78,76	47,87	51,73
	M kN.m	—	—	—	—	—

4.4.2. Manevrarea pasului 37 al prăjinilor de foraj 5 in

În tabelul 4.4.2, coloanele au următoarele semnificații : A — este etapa ridicării de pe elevator pentru extragere ; B — ridicarea din elevator pentru introducere ; C — ridicare stabilizată ; D — coborîre stabilizată și E — static.

Tabelul 4.4.2

Bara	EFORT AXIAL kN				
	A	B	C	D	E
5	7,07	7,07	5,83	8,19	4,76
50	459,58	450,20	328,25	164,00	268,13
348	126,06	116,24	103,50	70,00	84,54

Valorile din tabelul 4.4.1 evidențiază coeficienții dinamici la ridicarea de pe elevator a garniturii de foraj egali cu $C_d = \frac{1,33}{0,58} = 2,293$ la bara 45 ; $C_d = 1,970$ la bara 50 și $C_d = 2,041$ la bara 58. Acești coeficienți sînt foarte apropiați de coeficienții dinamici la deplasări evaluați în § 3.5.

Observație. Scările pentru eforturile secționale în elementele mastului au fost etalonate pornind de la calculul sarcinii la cîrlig în regim stabilizat și folosind programul SAP 05 atît la ridicarea garniturii de foraj cît și la coborîrea acesteia.

Etalonarea pe scara timpului (scara absciselor) rezultă din viteza de deplasare a hîrtiei de înregistrare. Viteza hîrtiei a fost $V_h = 25$ mm/s (pentru cele două cazuri prezentate), de unde se obține o scară de 0,4 s/cm.

5. OBSERVAȚII ȘI CONCLUZII

Perfecționarea masturilor de foraj necesită cunoașterea comportării dinamice a acestora în timpul exploatării, mai ales la operații de manevră la care sarcina la cîrlig are variații importante.

Ca principale rezultate se menționează următoarele :

1. Modelul dinamic adecvat pentru mastul de foraj este cel de structură spațială cu noduri elastice, în care masele barelor se concentrează la extremitățile lor (în nodurile structurii) și se neglijează rotirile nodurilor structurii :

2. Elaborarea unui algoritm pentru vibrațiile libere și forțate ale masturilor de foraj aplicat la un program modern existent SAP 05 :

3. Folosind algoritmul elaborat și programul existent, s-au determinat atît pulsațiile și formele proprii de oscilație ale mastului MA 400—2 cît și răspunsul dinamic al acestuia la variația sarcinii la cîrlig ;

4. La încărcarea statică, la nivelul geamblacului, deplasările maxime au loc după direcția axei Z și aceasta datorită faptului că sarcinile se aplică excentric în raport cu axa Z la nivelul menționat ;

5. La încărcarea dinamică (ridicarea de pe elevator a garniturii de foraj cu lungimea unui pas), la nivelul geamblacului, deplasările maxime ale nodurilor se manifestă după axa Z, ceea ce explică ponderea formei proprii fundamentale de oscilație;

6. Aprecierea efectului dinamic al încărcării se face prin raportul $C_d = \frac{\Delta_{din}}{\Delta_{st}} = 1{,}845$. Evident, folosirea acestui raport pentru fiecare componentă a deplasării duce la coeficienți diferiți, care nu pot da indicații concludente asupra efectului dinamic al ansamblului;

7. Determinările experimentale s-au efectuat pe o instalație de foraj existentă de mare adîncime și au urmărit în special stabilirea răspunsului dinamic al mastului la diferite operații de manevră. Din oscilogramele înregistrate s-au determinat eforturile dinamice ale elementelor mastului;

8. Etalonarea scărilor pentru oscilograme a fost efectuată în mod riguros pentru a obține rezultate reale.

Primit în redacție la 12 octombrie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. J. AVRIL și colab., *Encyclopédie d'analyse des contraintes*, Vishay Micromesures, France, 1984.
2. GH. BUZDUGAN, M. BLUMENFELD, *Tensometria electrică rezistivă*, Edit. tehnică, București, 1966.
3. N. CALOTĂ, *Contribuții la cercetarea procesului de introducere a materialului tubular în sondă*, Teză de doctorat, I.P.G. Ploiești, 1982.
4. N. CALOTĂ, *Cercetarea experimentală a procesului de introducere a materialului tubular în sondă (I)*, Mine, Petrol și Gaze **34**, 8, (1983).
5. N. CALOTĂ, *Cercetarea experimentală a procesului de introducere a materialului tubular în sondă (II)*, Mine, Petrol și Gaze, **34**, 10 (1983).
6. N. CALOTĂ, S. TILIMPEA, *Analiza comparativă a cercetărilor analitice cu cele experimentale referitoare la procesul de introducere a materialului tubular în sondă (I)*, Mine, Petrol și Gaze **35**, 3 (1984).
7. N. CALOTĂ, S. TILIMPEA, *Analiza comparativă a cercetărilor analitice cu cele experimentale referitoare la procesul de introducere a materialului tubular în sondă (II)*. Mine, Petrol și Gaze, **35**, 5 (1984).
8. S. CHERGUI, *Cercetări teoretico-experimentale privind determinarea pulsațiilor proprii ale oscilațiilor longitudinale ale garniturii de foraj*. St. cerc. mec. apl. **49**, 3, (1990).
9. R. W. CLOUGH, J. PENZIEN, *Dynamique des structures*, Tome **1**, *Principes fondamentaux*, Editions Pkuralis, 1980.
10. AL. GHEORGHIU, *Concepții moderne în calculul structurilor*, Edit. tehnică, București, 1975.
11. A. LUBINSKI, *Dynamic loading of drill pipe during tripping*, Journal of Petroleum Technology, August (1988).
12. N. POSEA, *Rezistența materialelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1979.
13. N. POSEA, *Vibrațiile mecanice*, Litografia Institutului de Petrol și Gaze, Ploiești, 1980.
14. P. S. THEOCARIS, ș.a., *Analiza experimentală a tensiunilor; bazele teoretice ale metodelor tensometrice și indicații practice privind utilizarea acestora*, vol. **1**, Edit. tehnică, București, 1976.
15. I. VLAD, *Sistemul de manevră al instalațiilor de foraj privit ca un sistem elastic cu mase discrete*, Buletinul Institutului de Petrol, Gaze și Geologie, **XIV**, (1966).
16. I. VLAD, *Ecuațiile de mișcare ale sistemului de manevră al instalațiilor de foraj*, St. cerc. mec. apl., **27**, (1968).

17. I. VLAD, *Cercetări teoretice și experimentale ale cinematicii și dinamicii sistemului de manevră al instalațiilor de foraj sau de intervenție, Lucrările Simpozionului "Cercetări teoretice și experimentale privind perfecționarea utilajului petrolier", Ploiești, 2—3 octombrie 1987*, pp. 104—127.
18. P. C. WANG, *Calcul des structures par les méthodes numériques et matricielles. Applications sur calculateurs*, Dunod, Paris, 1969.
19. G. B. WARBURTON, *The dynamical behaviour of structures*, Pergamon Press, London, 1976.
20. *** *Desene de execuție și de ansamblu ale mastului MA 400—2*, I.P.C.U.P., Ploiești.
21. *** *Manuale de utilizare a programului SAP 05*, elaborate de Universitatea California — U.S.A. și Universitatea din Liège — Belgia, 1980.
22. *** *Oil field equipement and service*, 6th revision 1983 — 1984. Volume I, Industrial Export Import, Bucharest.

SIMULAREA NUMERICĂ A FUNCȚIONĂRII UNITĂȚILOR ELECTROHIDRAULICE DE ACȚIONARE PENTRU PILOTUL AUTOMAT

de I. URSU,
Institutul de aviație, București,

T. PANAIT, S. PĂUNESCU
Intreprinderea „Turbomecanica", București

P. KALMUȚCHI
Comisia Națională pentru Standarde, Metrologie și Calitate, București

Lucrarea prezintă un model matematic al unităților electrohidraulice de acționare pentru pilotul automat, particularizat pentru cazul avionului avînd trei canale de comandă : ruliu, tangaj și girație, atît pentru acționare rapidă tip S.A.S., cît și pentru acționare lentă, tip P. A.
Pe baza modelului matematic s-a elaborat un program în limbaj FORTRAN.
Lucrare esta însoțită de exemple numerice.

1. STRUCTURA ȘI MODELUL MATEMATIC ALE UNITĂȚILOR ELECTROHIDRAULICE DE ACȚIONARE PENTRU CANALELE DE COMANDĂ ALE AVIONULUI

Unitățile electrohidraulice de acționare pentru fiecare din cele trei canale de comandă ale avionului (eleroane, stabilizator, direcție) se compun, în principal din (fig. 1.1) : servovalvă, verin, traductor de deplasare, atît pentru acționare rapidă (de tip S.A.S. — sistem de mărire a stabilității), cît și pentru acționare lentă (de tip P.A. — pilot automat).

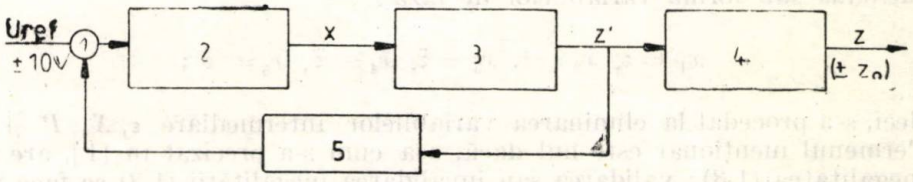


Fig. 1.1. — Schema-bloc a acționărilor electrohidraulice
1 — element comparator ; 2 — servovalva ; 3 — verinul ; 4 — sarcina comandată ; 5 — reacția electrică de poziție.

Se precizează că unitățile electrohidraulice de tip S.A.S. au încorporat cîte un filtru mecanohidraulic de frecvență, avînd schema de principiu din figura 2.1 [1], destinația, construcția și calculul acestui filtru prezentîndu-se în cele ce urmează.

În scopul analizei performanțelor dinamice și al simulării pe calculator a mișcării unităților electrohidraulice de acționare s-au scris ecua-

țiile ce definesc modelul matematic, sub forma celor două sisteme, neliniar și liniar-atașat:

A — Sistemul de ecuații diferențiale neliniare:

$$\begin{cases} \varepsilon = U_{\text{ref}} - K_{\text{r.e}} z'\,;\ K_{\text{SV}}\varepsilon = x + 2\xi_{\text{SV}} T_{\text{SV}}\dot{x} + T_{\text{SV}}\ddot{x}\,; \\ Q_{\text{f}} + S\dot{z}' + K_{\text{c}}\dot{P} = c_{\text{d}} b x \sqrt{P_{\text{a}}/\rho}\ \sqrt{1 - P\,\text{sign}\,x/P_{\text{a}}}\,; \\ m\ddot{z} + f\dot{z} + rz = N(z' - z)\,; \\ N(z' - z) = SP\,;\ \alpha_1 P = \alpha_2 \dot{V} + \sqrt{|V|}\,\text{sign}\,V\,; \\ Q_{\text{f}} = \widetilde{K}_{\text{f}} F(V)\sqrt{|P|}\,\text{sign}\,P\,; \\ F(V) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } |V| < \Delta\,; \\ V - \Delta, & \text{pentru } \Delta \leqslant V \leqslant f_{\max}\,; \\ V + \Delta, & \text{pentru } -f_{\max} \leqslant V \leqslant -\Delta\,; \\ f_{\max}, & \text{pentru } |V| > f_{\max}\,. \end{cases} \end{cases} \tag{1.1}$$

B — Sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \varepsilon = U_{\text{ref}} - K_{\text{r.e}} z'\,;\ K_{\text{SV}}\varepsilon = x + 2\xi_{\text{SV}} T_{\text{SV}}\dot{x} + T_{\text{SV}}\ddot{x}\,; \\ K_{\text{Q}} x - K_{\text{QP}} P = S\dot{z}' + K_{\text{c}}\dot{P} + \overline{\overline{K_{\text{f}}\ddot{z}'}}\,; \\ m\ddot{z} + f\dot{z} + rz = N(z' - z) = SP. \end{cases} \tag{1.2}$$

Avînd în vedere forma sistemului liniar, în care termenul încadrat este nenul doar condiționat (respectiv, atunci cînd oscilația sertarului filtrului depășește în amplitudine acoperirea Δ), variabilele de stare s-au introdus sub forma variabilelor de fază:

$$x_1 = z,\ x_2 = \dot{z},\ x_3 = \ddot{z},\ x_4 = \dddot{z},\ x_5 = \overline{\ddot{z}}\,;$$

deci, s-a procedat la eliminarea variabilelor intermediare ε, X, P și z'. Termenul menționat este nul dacă, așa cum s-a precizat în [1], are loc inegalitatea (1.3); validarea sau invalidarea inegalității (1.3) se face pas cu pas în procesul integrării:

$$\sqrt{\frac{1}{|(2\tau_2^2\omega^2)^2} + \left(\frac{\tau_{\text{l}1}}{\tau_2} P\right)^2} - \frac{1}{2\tau_2^2\omega^2} < \Delta. \tag{1.3}$$

Eliminînd variabilele intermediare ε, x, P, z', sistemul liniar conduce la funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{z(s)}{z_{\text{e}}(s)} = \frac{a_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5}, \tag{1.4}$$

în care :

$$z_c = z_{c_0} U_{ref} = z_{c_a} REF \tag{1.4'}$$

unde :

$$u_{ref} = u_{amp} REF$$

$$REF = \begin{cases} 1, & \text{pentru intrarea treaptă ;} \\ \sin \omega t, & \text{pentru intrarea sinusoidală ;} \end{cases} \tag{1.4''}$$

$$z_{c_0} = \frac{K_Q K_{SV}}{a_0} \; ; \; z_{c_0} = z_{c_a} \cdot u_{amp} . \tag{1.4'''}$$

Ceilalți coeficienți ai ecuației caracteristice (numitorul relației (1.4)' egalat cu zero) sînt :

$$\begin{aligned} a_0 &= K_Q K_{SV} K_{r.e}(1 + r/N) + K_{QP} r/S ; \\ a_1 &= K_Q K_{SV} K_{r.e} 2\xi_V T_V + K_{QP} 2\xi_{SV} T_{SV} r/s + A_1 ; \\ a_2 &= K_Q K_{SV} K_{r.e} T_V^2 + T_{SV}^2 K_{QP} r/s + 2\xi_{SV} T_{SV} A_1 + A_2 ; \\ a_3 &= T_{SV}^2 A_1 + 2\xi_{SV} T_{SV} A_2 + A_3 ; \\ a_4 &= T_{SV}^2 A_2 + 2\xi_{SV} T_{SV} A_3 + A_4 ; \\ a_5 &= T_{SV}^2 A_3 + 2\xi_{SV} T_{SV} A_4 , \end{aligned} \tag{1.5}$$

unde :

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\xi_V T_V K_{QP} N/S + S(1 + r/N) + K_c r/S ; \\ A_2 &= K_{QP} T_V^2 N/S + 2\xi_V T_V S + K_c 2\xi_V T_V N/S + K_f(1 + r/N) ; \\ A_3 &= T_V^2 S + K_c T_V^2 N/S + K_f 2\xi_V T_V ; \\ A_4 &= K_f T_V^2 . \end{aligned} \tag{1.6}$$

2. METODOLOGIA DE CALCUL A FILTRULUI MECANO-HIDRAULIC DE FRECVENȚE

Ecuația caracteristică a sistemului are o rădăcină reală și, pentru condițiile constructiv-funcționale ale sistemelor hidraulice — în general, slab amortizate — două perechi de rădăcini complex — conjugate. Celor două perechi de rădăcini complexe le corespund, pe domeniul frecvențelor, două posibile amorse de rezonanță — „vîrfuri" ale „atenuării".

Investigațiile numerice pe calculator arată, că, în configurații date ale parametrilor sistemului, mărimea „vîrfului de rezonanță" în domeniul frecvențelor relativ joase depinde de performanțele dinamice ale verinului, iar mărimea „vîrfului" în domeniul frecvențelor mai mari depinde de performanțele dinamice ale servovalvei. (În ceea ce privește rădăcina

reală certă a ecuației caracteristice, aceasta este satisfăcătoare aproximată de cantitatea :

$$1/\tau = K_Q K_{SV} K_{r.e}/S, \tag{2.1}$$

unde τ [sec] este constanta de timp asociată sistemului de ordinul întîi).

Se cunoaște din practică și din literatura de specialitate că valoarea amortizării ξ_V este situată în domeniul 0,05 — 0,1. Acest fapt impune luarea unor măsuri speciale, în cadrul sistemelor hidraulice, pentru evitarea fenomenelor de rezonanță/instabilitate. Sînt cunoscute criteriile regulamentare severe care admit, de exemplu „vîrfuri de rezonanță" pentru servocomenzile hidraulice nu mai mari de 2—3 dB.

Un mijloc eficient de combatere a fenomenelor de rezonanță/instabilitate îl constituie introducerea unor dispozitive de corecție/compensare sub forma unor filtre mecano-hidraulice de frecvență [1]; schema de principiu a unor astfel de dispozitive, considerate în lucrare, este dată în figura 2.1 :

Comparativ cu alte mijloace sau metode clasice de stabilizare, acestea au următoarele avantaje : fiabilitate înaltă ; posibilitatea de combatere a tendințelor de rezonanță, fără afectarea proprietăților sistemului în zona frecvențelor joase de lucru și, în consecință, fără afectarea rigidității statice (fără introducerea unor erori statice de poziție) ; într-un anumit grad, aceste dispozitive, de tip filtru, au proprietăți adaptive [1]. Aceste avantaje caracterizează, de fapt, filtrul neliniar de frecvențe care lucrează efectiv numai de la un prag de frecvență în sus (fig. 2.1).

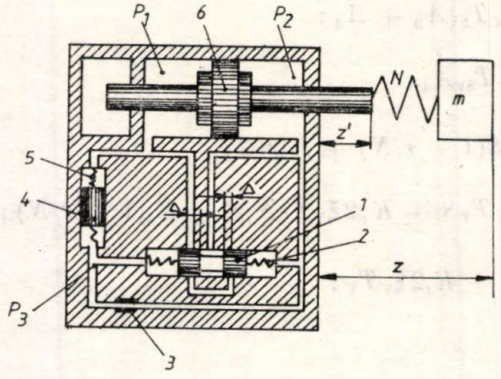


Fig. 2.1. — Schema de principiu a filtrului
1 — sertar compensator cu suprafețele frontale A_V; 2 — resorturi de centrare de rigiditate r_V; 3 — drosel fix de rezistivitate G; 4 — plunjer cu suprafețele frontale A_u; 5 — resorturi de centrare de rigiditate r_u; 6 — pistonul actuatorului.

Elementul de neliniaritate al acestui filtru îl constituie sertarul-corector (compensator) cu acoperire pozitivă Δ, a cărei valoare se calculează pentru a realiza un nivel dorit al frecvenței de la care filtrul este eficient. Principiul de funcționare al filtrului rezultă imediat din schema menționată.

Ecuațiile care descriu mișcarea filtrului neliniar de frecvențe sînt date în [1], sub forma sistemului :

$$\begin{cases} p_1 - p_3 = r_u u/A_u\,; \quad p_3 - p_2 = r_V V/A_V\,; \\ A_u \dot{u} = A_V \dot{V} + G\sqrt{|p_3 - p_2|}\ \operatorname{sign}(p_3 - p_2)\,; \\ p_1 - p_2 = P \end{cases} \tag{2.2}$$

În continuare, în lucrarea citată, este desfășurată o metodologie de calcul, incluzînd liniarizarea armonică, și care este finalizată prin determinarea expresiei „coeficientului echivalent al filtrului", K_f (vezi lista de notații); cunoașterea valorii K_f este utilă pentru simularea numerică a funcționării sistemului liniarizat cu filtru amorsat.

Nu rezultă însă, din aceeași lucrare, o metodologie de dimensionare constructivă a filtrului (respectiv calculul valorilor A_u, A_v, r_u, r_v, G, Δ). O astfel de metodologie este schițată în lucrarea prezentată, iar rezultatele sînt validate în final prin simulare numerică.

Se pornește de la premiza că amplitudinea deplasării sertarului trebuie să satisfacă o condiție limită de forma :

$$V = \Delta|_{\omega=\omega_t}, \tag{2.3}$$

ceea ce se retranscrie, în cadrul modelului elaborat, prin ecuația :

$$\omega_t \frac{0{,}9A_u^2}{Gr_u}\sqrt{kp\frac{A_u}{r_u}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{p_a(\omega_t) - \left(\frac{1+k^2p}{kp}\frac{r_u}{r_v}\right)^2\Delta^2}} \tag{2.4}$$

Parametrii constructiv-funcționali trebuie să îndeplinească :

a) o condiție de „maximă eficiență a reacției de accelerație", scrisă sub forma :

$$\frac{A_u^2}{r_u}\frac{1+k^2p}{\sqrt{kp}}\sqrt{\frac{r_u}{A_u}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\chi\Delta}}\frac{G}{0{,}9}; \tag{2.5}$$

b) o condiție obținută din evaluarea amplitudinii v în două moduri : mai întîi, din condiția de tip a) și, apoi, din funcția de transfer $V(s)/P(s)$.

În final, rezultă ecuația :

$$\frac{A_u}{r_u}\frac{kp}{1+k^2p} = \frac{\chi\Delta(\alpha^2+1/\omega^2)}{\alpha\mathcal{P}_a(\omega)}. \tag{2.6}$$

În continuare, calculul urmează o strategie ce decurge din necesitatea de a evita dificultățile inerente rezolvării unui sistem de ecuații nedeterminat.

3. PROGRAMUL DE CALCUL

Programul demarează prin a calcula acele caracteristici ale sistemului descrise de funcția de transfer : rădăcinile ecuației caracteristice — polii sistemului — ; caracteristici de frecvență : atenuare/frecvență și fază/frecvență.

Același sistem liniar (1.2) care a condus la funcția de transfer (1.4), permite în condițiile referinței „blocate" :

$$z_c = z_{c_0}u_{ref}, \quad z_c = z_{c_a} \quad REF = 0 \quad \text{pentru} \quad u_{ref} = 0 \tag{3.1}$$

și cu notația : $SP = \Phi$ (3.2)

să se obțină funcția de impedanță/rigiditate dinamică :

$$I_{mp}(s) = -\frac{\bar{\Phi}}{z'}. \qquad (3.3)$$

De remarcat că toate caracteristicile sistemului menționat mai sus sînt calculate pentru $K_p = 0$ (filtru inactiv sau absent). În continuare programul efectuează simularea (integrarea sistemului liniar și neliniar), prin introducerea adecvată a variabilelor de stare, utilizînd, pentru creșterea vitezei de calcul, adimensionalizarea parțială sau totală a variabilelor; simularea se execută în prezența unor intrări — treaptă sau sinusoidală —, permițîndu-se astfel „validarea" parametrilor sintetizați, în cadrul analizei liniare, ai sistemului și, îndeosebi ai filtrului.

În acest sens, se prezintă, spre exemplificare, rezultate ale sintezei parametrilor și simulării funcționării sistemului pentru comanda direcției. Datele constructiv-funcționale de proiectare (sinteză) și interacțiunile aeroservoelastice pentru unitățile electrohidraulice de acționare, inclusiv parametrii de proiectare ai filtrului mecano-hidraulic de frecvență, sînt rezumate în tabelul nr. 1.

Figura 3.1. confirmă adecvarea și eficiența filtrului : sistemul direcției excitat la intrare cu un semnal sinusoidal cu amplitudine de 20% din

Tabelul nr. 1

Datele constructiv-funcționale și interacțiunile aeroservoelastice ale unităților electrohidraulice de acționare pentru comanda direcției (canal d)

Tip acționare	N [daN/cm]	Servovală		Filtru								m [kg]	l [cm]	ν_r [Hz]	$\dot{z}'_{max}$ [cm]	S [cm²]	r [daN/cm]
		V_{max} [cm/s]	Q_n [l/min]	Δ [cm]	G [cm⁴/5 daN]	A_u [cm²]	A_V [cm²]	r_u [daN/cm]	r_V [daN/cm]	bf [cm]	f_{max} [cm]						
P.A.	4000	12,5	3,75	—	—	—	—	—	—	—	—	479	5	13,8	0,4	5	3,8
	3000	12,5	1,875	0,02	0,118	0,333	1	100	100	0,05	0,1	404	0,55	13,8	2	2,5	—

cea nominală (respectiv, 2V), și de frecvența de 13,8 Hz — frecvența de rezonanță a sistemului ! — este menținut în regim stabil ca sistem neliniar ; dimpotrivă simularea funcționării cu filtrul blocat, indică rezonanță (amplificarea) răspunsului sistemului neliniar (ca și a celui liniar, de altfel). De notat că integrarea sistemului pe durata de 5—6 perioade indică stabilizarea amplificării celor două sisteme — liniar și neliniar — fapt normal, întrucît configurația parametrilor corespunde în toate cazurile criteriului de stabilitate Routh-Hurwitz (fig. 3.3).

Figura 3.2 pune în evidență un vîrf de rezonanță pentru sistemul liniar — fără filtru — la limita acceptabilității regulamentare (circa 3,5 dB).

Figura 3.4 și rezultatele calculului constituie o verificare a bunei funcționări a sistemului la frecvența de lucru (în speță 2Hz), caz în care

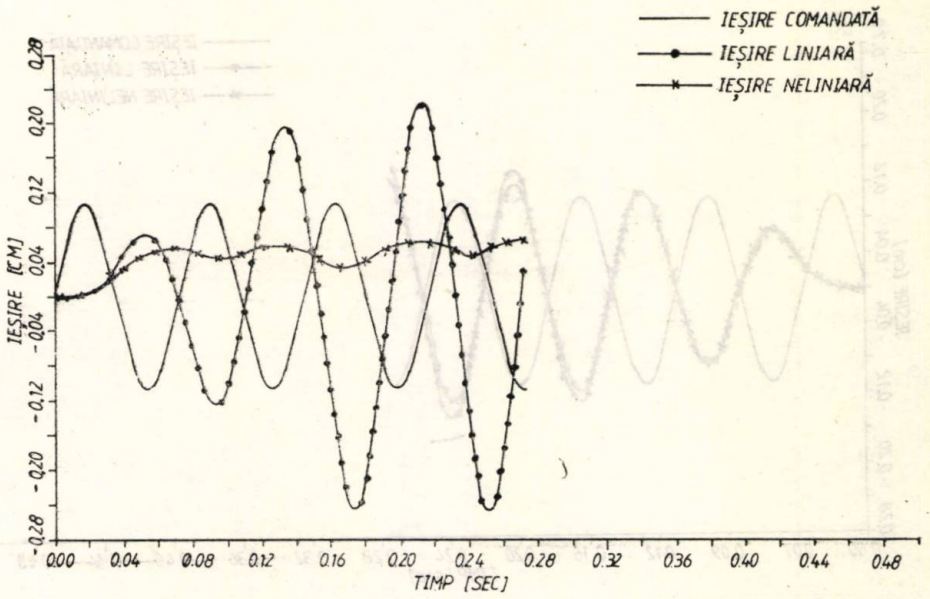


Fig. 3.1. — Răspunsul sistemelor liniar și neliniar, excitate la frecvența de rezonanță de 13,8 Hz, cu filtrul activ.

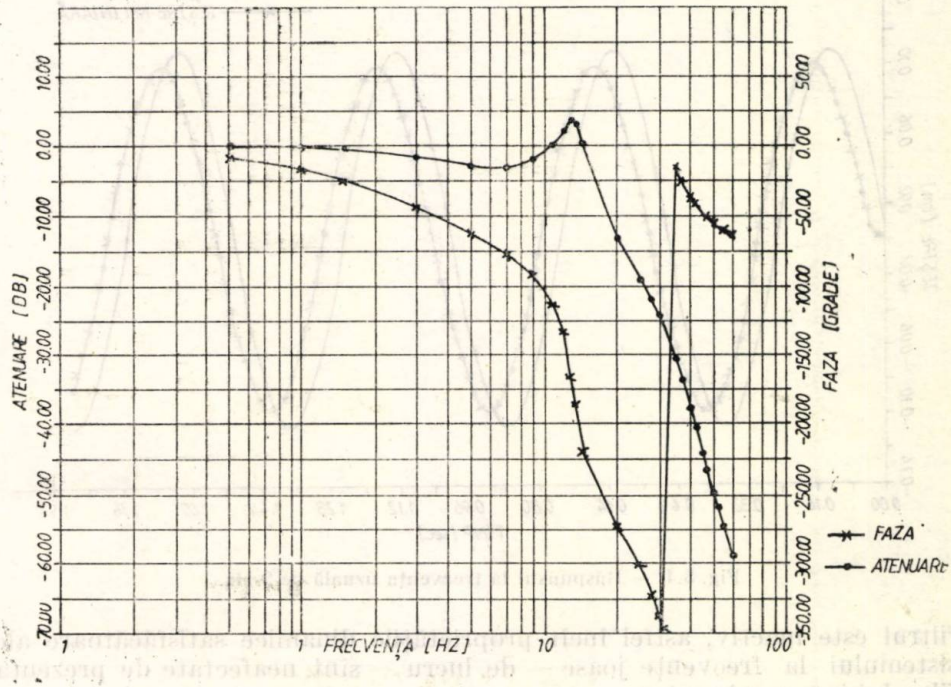


Fig. 3.2. — Caracteristici de frecvență

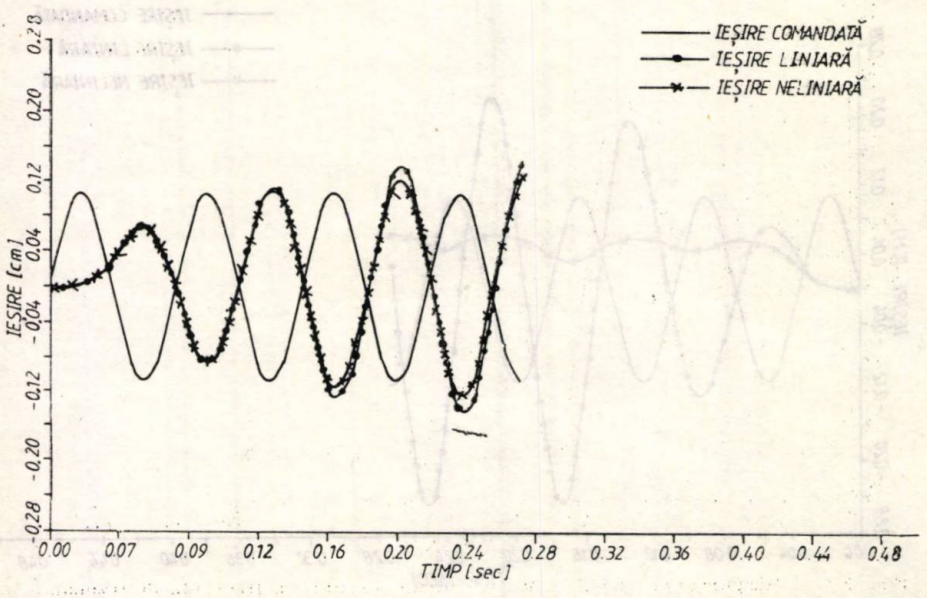


Fig. 3.3. — Răspunsul sistemelor, în aceleași condiții cu cele din fig. 3.1, dar cu filtrul „blocat"

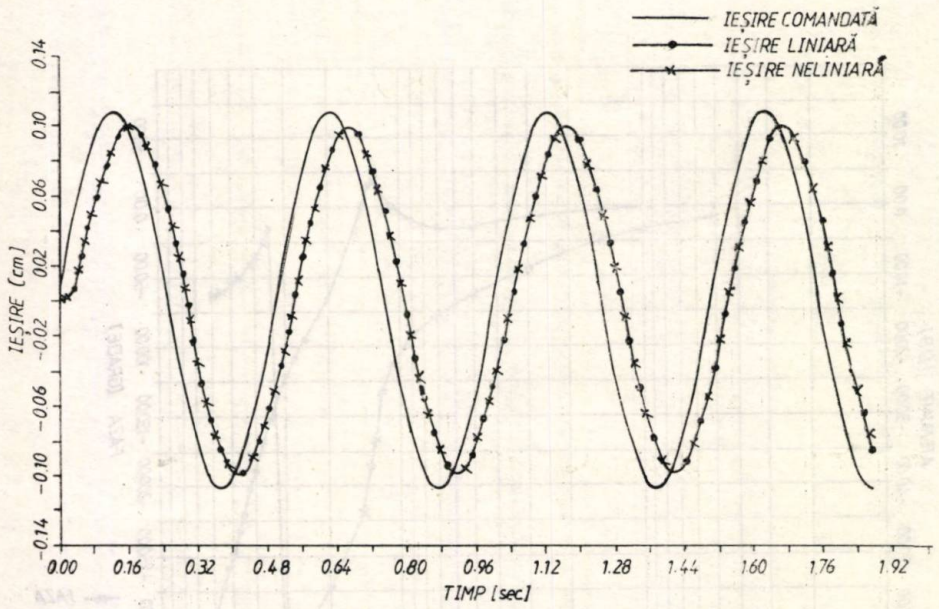


Fig. 3.4. — Răspunsul la frecvența uzuală de 2 Hz.

filtrul este inactiv, astfel încît proprietățile dinamice satisfăcătoare ale sistemului la frecvențe joase — de lucru — sînt neafectate de prezența filtrului integrat în rețea.

Prezenta lucrare constituie o prezentare succintă a problemei simulării numerice a funcționării unităților electrohidraulice de acționare pentru pilotul automat.

Autorii pot pune la dispoziție, cu respectarea prevederilor legale în vigoare, detalii suplimentare cît și programe de calcul.

LISTA DE NOTAȚII

Variabile

u_{ref} — semnal de referință (V);
ε — semnal de eroare (V);
x — deplasarea sertarului servovalvei (cm);
z — deplasarea sarcinii comandate (cm);
z' — deplasarea tijei verinului (cm);
P — caderea de presiune de sarcină în verin (bari);
s — variabila Laplace $(d/dt)(sec^{-1})$;
Q_f — debitul pentru sertarul filtrului (cm);
V — deplasarea sertarului filtrului (cm);
u' — deplasarea plunjerului filtrului (cm);
$\mathcal{P}_a$ — căderea de presiune de sarcină, în regim dinamic (bari).

Parametri și constante

$K_{r.e}$ — coeficientul de reacție electrică de poziție (V/cm);
ξ_{SV} — amortizarea servovalvei:
T_{SV} — inversul pulsației naturale a servovalvei (sec);
K_{SV} — amplificarea servovalvei (cm/V);
K_Q — coeficientul debit-deplasare sertar al caracteristicii liniarizate a debitului (cm^2/sec);

$$K_Q = c_d b \sqrt{P_a/\rho} = Q_{max}/x_{max},$$

în care:
C_d — coeficientul de debit al sertarului servovalvei;
b — lățimea pe circumferință a fantei (fantelor) de distribuție a (ale) sertarului (cm);
P_a — presiunea de alimentare a servovalvei (bari);
ρ — densitatea lichidului de lucru ($daN\ sec^2/cm^4$);
Q_{max} — debitul maxim furnizat de servovalvă (la presiunea de alimentare) (cm^3/sec);
x_{max} — deplasarea maximă utilă a sertarului servovalvei (cm)
K_{QP} — coeficientul debit-cădere de presiune al caracteristicii liniarizate a debitului ($cm^3/sec/bar$), conform formulei:

$$K_{QP} = K_Q/(2P_a)x_{max}/5;$$

S — suprafața utilă a pistonului actuatorului (cm^2);
K_c — coeficient de compresibilitate (cm^3/bar)

$K_c = 1\,S/(2B)$ în care:

l — semicursa verinului (cm);
B — compresibilitatea lichidului de lucru (bari);
N — rigiditatea sistemului de transmitere tija de execuție a verinului — sarcina comandată (daN/cm);
m — masa inerțială a sarcinii (daN/sec²/cm)
f — coeficientul de disipare vîscoasă la ieșire (daN/sec/cm) (de tip „amortizare structurală");
α — raport, $= m/f$ (sec);
r — rigiditatea sarcinii elastice (daN/cm);
ξ_v — amortizarea sarcinii verinului:

$$\xi_v = f/(2\sqrt{mN});$$

T_v — inversa pulsației naturale a sarcinii verinului;
ω_1 — pulsația uzuală a semnalului de referință (rad/sec);
ω_t — pulsația de tăiere a acționării cu filtru (rad/sec);
ω_p — pulsația proprie (de rezonanță (rad/sec);
χ — indice de deschidere a sertarului filtrului $(0 + 1)$;
Δ — acoperirea sertarului filtrului (cm);
A_u, A_v — suprafețele frontale ale plunjerului, respectiv sertarului filtrului (daN/cm);
k, p — rapoarte adimensionale:

$$k = A_v/A_u;\quad p = r_u/r_v;$$

G — rezistența droselului fix al filtrului (cm⁴/(sec daN$^{1/2}$);
f_{max} — deplasarea maximă utilă a sertarului filtrului (cm);
α_1, α_2 — coeficienți ai ecuației sertarului filtrului:

$$\alpha_1 = A_u^2/(Gr_u)\sqrt{A_v/r_v},$$

$$\alpha_2 = A_u^2/(Gr_u)\sqrt{r_v/A_v}\,(1 + A_v^2 r_u/(A_u^2 r_v));$$

V_{max} — viteza maximă teoretică a tijei verinului (cm/sec),

$$V_{max} = Q_{max}/S = K_Q x_{max}/S;$$

b_f — lățimea de circomferință a fantei (fantelor) sertarului filtrului (cm),
$\widetilde{K}_f$ — coeficientul neliniar al ecuației filtrului (cm²/(sec daN$^{1/2}$)),

$$\widetilde{K}_f = c_d b_f \sqrt{2/\rho}.$$

Notații intermediare

$$\eta_1 = \frac{0{,}9A_u^2}{Gr_u}\sqrt{\frac{A_v}{r_v}};\quad \eta_2 = \eta_1\left(1 + \frac{A_v^2 r_u}{A_u^2 r_v}\right)\frac{r_v}{A_v};$$

$$q_1 = \frac{\Delta}{v_{lin}};\quad q_2 = q_1^2;\quad q_3 = \frac{q_1}{\sqrt{1 - q_1^2}}$$

$$q = 2\sqrt{1 - q_2} - 0{,}66\sqrt{1 - q_2)^3} + q_1\,(\operatorname{arctg} q_3 - q_1\sqrt{1 - q_2} - \pi/2)$$

v_{lin} — deplasarea obținută din modelul liniar, a sertarului filtrului (cm) :

$$v_{lin} = \sqrt{V_1^2 + (\eta_1/\eta_2 P_a)^2} - V_1; \quad V_1 = \frac{1}{2\eta_2^2\omega^2}, \ \omega - \text{pulsația};$$

K_f — coeficientul echivalent al filtrului (cm^2. sec),

$$K_f = 0{,}637\, N v_{lin} T_V^2\, 1{,}2\, c_d b_f\, 1{,}41\, q/(S\sqrt{P_a \rho}).$$

Primit în redacție la 4 martie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. IU I. TOPCEEV, *Nelinceinie nestaționarnie sistemi*, Mașinostroenie, Moskva, 1986.
2. I. URSU, P. KALMUȚCHI, Raport I.C.S.I.T.Av. — INCREST, cod 2 — PA — 185.

OPTIMIZAREA FUNCȚIONĂRII UNUI MANIPULATOR DE CLUPE LA O MAȘINĂ DE PIEPTĂNAT FUIOR DE IN ȘI CÎNEPĂ

de FLORINA LILIANA BUZESCU, D. VIERU și CORINA FETECĂU

Institutul Politehnic, Iași

În lucrare se propune o variantă de rezolvare a problemei de control optimal în timp minim a unui manipulator de clupe la o mașină de pieptănat fuior de in și cînepă; scopul rezolvării acestei probleme este acela de a analiza posibilitățile de îmbunătățire a funcționării mașinii de pieptănat.

Ipoteza de lucru abordată în lucrare constă în acționarea directă a manipulatorului; comanda procesului optimal analizat este reprezentată prin momentul cuplului motor de acționare a manipulatorului.

Deoarece ecuația diferențială care descrie comportamentul dinamic al manipulatorului este relativ complicată pentru a se putea efectua direct controlul optimal, acest control optimal s-a înlocuit cu un subcontrol optimal cu timp minim, corespunzător unor ipoteze simplificatoare de lucru.

În lucrare se stabilește formularea problemei de subcontrol optimal cu timp minim al manipulatorului, construindu-se hamiltonianul problemei definită prin această formalizare; în rezolvarea problemei de control optimal se aplică principiul minimului al lui Pontriaghin.

Lucrarea se finalizează prin stabilirea ecuațiilor parametrice concrete ale procesului optimal, trasarea curbelor de răspuns și trasarea graficului de variație a momentului cuplului motor de acționare a manipulatorului.

1. INTRODUCERE

În lucrare se propune o variantă de rezolvare a problemei de control optimal în timp minim a unui manipulator de clupe la o mașină de pieptănat fuior de in și cînepă.

Scopul rezolvării acestei probleme este acela de a analiza posibilitățile de îmbunătățire a funcționării mașinii de pieptănat prin:

a) reducerea duratei ciclului de funcționare a mașinii, cu consecința creșterii vitezei de lucru și deci a productivității muncii;

b) micșorarea consumului de energie pe ciclu de funcționare.

Acest manipulator antrenează clupele pe traseul bancă-automat în toate cele patru zone ale mașinii în care se produc deplasarea și rotirea clupelor cu fuior în jurul axelor lor longitudinale pentru trecerea de la poziția de pieptănare în poziția de lucru la automat și invers.

2. FORMULAREA PROBLEMEI DE SUBCONTROL OPTIMAL

Ipoteza de lucru abordată în lucrare constă în acționarea directă a manipulatorului. Comanda procesului optimal analizat este reprezentată prin momentul cuplului motor de acționare a manipulatorului.

În urma studiului cinematic și dinamic [7] s-a obținut ecuația diferențială care descrie comportamentul dinamic al manipulatorului:

$$J(\theta_1)\ddot{\theta}_1 = \beta\theta_1 + b\dot{\theta}_1^2 + M - C_f + c; \tag{1}$$

$J(\theta_1)$ este caracteristica inerțială generalizată a sistemului mecanic;
M este momentul cuplului motor de acționare a manipulatorului;
C_f este momentul cuplului rezultant de frecare în lagărele manipulatorului;
θ_1 este parametrul lagrangian;
$\dot{\theta}_1$ este viteza generalizată;
β, c sînt constante cuprinse în expresia forței generalizate $Q_g(\theta_1)$ a greutăților elementelor componente ale sistemului mecanic considerat;
b este o constantă rezultînd din derivarea în raport cu parametrul lagrangian a momentului de inerție redus $J(\theta_1)$. Introducîndu-se notațiile:

$$\tilde{g}(\theta_1) = \frac{\beta}{J(\theta_1)}; \quad \tilde{h}(\theta_1) = \frac{b}{J(\theta_1)}; \quad \tilde{p}(\theta)_1 = \frac{1}{J(\theta_1)}; \tag{2}$$

ecuația diferențială (1) devine:

$$\ddot{\theta}_1 = \tilde{g}(\theta_1)\cdot\theta_1 + \tilde{h}(\theta_1)\,\dot{\theta}_1^2 + \tilde{p}(\theta_1)[M - C_f + c)]; \tag{3}$$

Deoarece această ecuație este destul de complicată pentru a se putea efectua direct controlul optimal, acest control optimal se înlocuiește cu un subcontrol optimal cu timp minim corespunzător următoarelor ipoteze simplificatoare de lucru:

— Caracteristica inerțială generalizată a sistemului mecanic, liniară în unghiul θ_1, se aproximează cu valoarea medie a ei în intervalul [0; 1,57] (rad) de variație a unghiului θ_1:

$$J(\theta_1) = J_0 = \text{ct.} \tag{4}$$

— Termenul liniar în unghiul θ_1 din expresia forței generalizate conservative $Q_g(\theta_1)$ se aproximează cu valoarea medie a lui în intervalul [0; 1,57] (rad) de variație a unghiului θ_1:

$$g^0\theta_1 \approx 0{,}785\, g^0; \tag{5}$$

În aceste condiții, ecuația diferențială (3) capătă forma:

$$\ddot{\theta}_1 = h^0\dot{\theta}_1^2 + p^0\left(M - C_f + c + 0{,}785\frac{g^0}{p^0}\right); \tag{6}$$

Se introduce comanda inițială:

$$v = M - C_f + c + 0{,}785\frac{g^0}{p^0}; \tag{7}$$

supusă restricției :

$$|v| \leqslant M_0 - C_f + c + 0{,}785\,\frac{g^0}{p} = V^0\,; \tag{8}$$

unde M_0 reprezintă valoarea maximă a momentului cuplului de acționare.

Se introduce o nouă comandă :

$$u = \frac{v}{V^0}\,; \tag{9}$$

supusă în baza condiției (8), restricției ;

$$|u| \leqslant 1\,; \tag{10}$$

și ecuația (6) devine :

$$\ddot{\theta}_1 = h^0\,\dot{\theta}_1^2 + k^0 u\,; \tag{11}$$

unde :

$$k^0 = p^0 V^0\,; \tag{12}$$

Variabilele θ_1 și $\dot{\theta}_1$ satisfac condițiile terminale :

$$\theta_1(0) = 0\,; \qquad \dot{\theta}_1(0) = 0\,;$$

$$\theta_1(t_f) = 1{,}57 = \theta_1^f\,; \quad \dot{\theta}_1(t_f) = 0\,; \tag{13}$$

Se introduc variabilele de stare :

$$\xi_1 = \theta_1 - \theta_1^f\,; \quad \xi_2 = \dot{\xi}_1 = \dot{\theta}_1\,; \tag{14}$$

supuse restricțiilor :

$$\xi_1(0) = 0 - 1{,}57 = -1{,}57\,; \quad \xi_2(0) = 0\,;$$

$$\xi_1(t_f) = 0\,; \qquad \xi_2(t_f) = 0\,; \tag{15}$$

În această situație, problema de subcontrol optimal capătă următoarea formulare :

$$J = \int_0^{t_f} \mathrm{d}t \to \inf. \tag{16}$$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2\,; \quad \dot{\xi}_2 = h_0 \xi_2^2 + k_0 u\,; \quad (h_0, k_0 > 0)$$

$$\xi_1(0) = \xi_1^0\,; \; |\xi_2(0) = 0\,; \quad \xi_1(t_f) = 0\,; \; |\xi_2(t_f) = 0\,;$$

$$u \in [-1, 1]\,; \quad \forall t \in [0, t_f]\,;$$

3. REZOLVAREA PROBLEMEI DE SUBCONTROL OPTIMAL

Se construieşte hamiltonianul problemei de control optimal definită prin formalizarea (16) :

$$H = \lambda_0 + \lambda_1 \xi_2 + \lambda_2 h_0 \xi_2^2 + \lambda_2 k_0 u \tag{17}$$

şi aplicîndu-se principiul minimumului al lui Pontriaghin, se obţine următoarea lege de variaţie a comenzii optimale :

$$u^* = -\text{sign}(\lambda_2^*) \tag{18}$$

Pentru a stabili concluziile concrete în legătură cu legea (18), se consideră sistemul canonic corespunzător variabilelor asociate λ_1^* şi λ_2^* :

$$\dot{\lambda}_1 = -\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_1}\right)_* ; \quad \dot{\lambda}_2 = -\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_2}\right)_* ; \tag{19}$$

Soluţia λ_2^* :

$$\lambda_2^* = a(t)[\lambda_2^0 - \lambda_1^0 c(t)] ; \tag{20}$$

evidenţiază faptul că este posibilă cel mult o anulare a lui λ_2^*, rezultă deci că procesul optimal se va desfăşura cu cel mult o singură comutare de comandă.

Pentru determinarea curbei de comutare corespunzătoare problemei de control optimal, se consideră sistemul canonic corespunzător variabilelor de stare (adoptîndu-se o comandă iniţială u_0^*) :

$$\dot{\xi}_1 = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}\right)_* \qquad \dot{\xi}_2^* = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_2}\right)_* ; \tag{21}$$

obţinîndu-se următoarele soluţii :

$$\xi_1^* = \xi_2^0 - \Phi(0, \tau_0) + \Phi(t, \tau_0) ; \frac{1}{h_0} F(\xi_2^*) = t + \tau_0 ; \tag{22}$$

cu :

$$F(\xi_2^*) = \int \frac{\mathrm{d}\xi_2^*}{\xi_2^2 + \frac{k_0}{h_0} u_0^*} ; \tag{23}$$

Eliminarea timpului între ecuaţiile (22) conduce la ecuaţia analitică a traiectoriei optimale, de forma :

$$\psi(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_1^0, \xi_2^0, u_0^*) = 0 ; \tag{24}$$

Dacă se impune condiţia ca această traiectorie să treacă prin originea planului fazelor, rezultă egalitatea :

$$\psi(0, 0, \xi_1^0, \xi_2^0, u_0^*) = 0 ; \tag{25}$$

care reprezintă ecuația locului geometric al pozițiilor inițiale ale punctului figurativ din care se poate ajunge în originea planului fazelor cu comanda inițială u_0^* adică ecuația ramurii curbei de comutație corespunzătoare comenzii inițiale u_0^*.

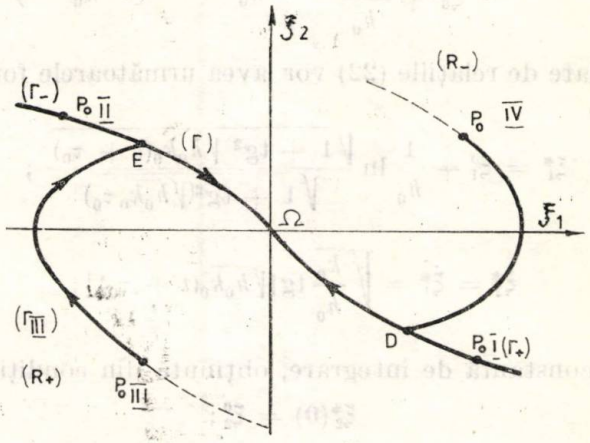


Fig. 1

În stabilirea formei concrete a traiectoriei optimale s-a ținut cont de următoarele precizări din literatura de specialitate [6], privind desfășurarea procesului optimal conform formalizării (16) :

1°. Circulația punctului figurativ pe traiectoria optimală (fig. 1) este de la stînga la dreapta, dacă traiectoria este situată în planul $\xi_2^* > 0$ și de la dreapta la stînga, dacă e situată în semiplanul $\xi_2^* < 0$.

2°. Pentru $t \to t_f$, traiectoria optimală trebuie să se apropie de originea planului fazelor (fig. 1).

3°. În cazul în care poziția inițială $P_0(\xi_1^0, \xi_2^0)$ a punctului figurativ nu se găsește pe nici una din ramurile $(r+)$ și $(r-)$ ale curbei de comutație $(r) = (r)+) \cup (r-)$, procesul optimal se va desfășura cu o comutare de comandă, cu traiectoria optimală avînd două porțiuni distincte, corespunzătoare celor două comenzi optimale care se succed, ultima porțiune aparținînd curbei de comutare.

Deci, comanda optimală inițială u_0^* va fi stabilită ținîndu-se seama de sensul de circulație a punctului figurativ pe traiectoriile optimale în semiplanele $\xi_2^* > 0$ și $\xi_2^* < 0$, precum și de posibilitățile de intîlnire a curbei de comutare.

În cazul de față, datele inițiale ξ_1^0 și ξ_2^0 au valorile :

$$\xi_1^0 = -1{,}57 < 0 \; ; \; \xi_2^0 = 0 \; ; \tag{26}$$

corespunzînd poziției inițiale $P_{01}(-1{,}57 \; ; \; 0)$ a punctului figurativ $P(\xi_{1*}^1, \xi_2^*)$. Plecînd din această poziție inițială, punctul figurativ nu se va putea apropia de originea planului fazelor decît circulînd în semiplanul $\xi_2^* > 0$ și întîlnind ramura $(r-)$ a curbei de comutație, care va fi parcursă cu comanda $u_0^* = -1$; aceasta înseamnă că procesul optimal va trebui început cu comanda inițială

$$u_0^* = 1 \; ; \tag{27}$$

pentru care funcţia $F(\xi_2^*)$ definită prin relaţia (23) va lua forma :

$$F(\xi_2^*) = \int \frac{d\xi_2^*}{\xi_0^{*2} + \frac{k_0}{h_0}} = \sqrt{\frac{h_0}{k_0}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{h_0}{k_0}}\,\xi_2^*\right); \tag{28}$$

iar ecuaţiile date de relaţiile (22) vor avea următoarele forme concrete :

$$\xi_1^* = \xi_1^0 + \frac{1}{h_0} \ln \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{h_0 k_0}(t + \tau_0)}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\sqrt{h_0 k_0}\,\tau_0)}}; \tag{29}$$

$$\xi_2^* = \dot{\xi}_1^* = \sqrt{\frac{k_0}{h_0}} \operatorname{tg}[\sqrt{h_0 k_0}(t + \tau_0)]; \tag{30}$$

unde τ_0 este constantă de integrare, obţinută din condiţia

$$\xi_2^*(0) = \xi_2^0; \tag{31}$$

iar

$$\xi_1^*(0) = \xi_1^0; \tag{32}$$

Relaţiile (29) şi (30) reprezintă ecuaţiile parametrice ale primei porţiuni ale traiectoriei optimale corespunzătoare comenzii $u_0^* = 1$;

În punctul $E(\xi_{E1}^*, \xi_{E2}^*)$ (fig. 2), punctul figurativ întîlneşte ramura $(r-)$ a curbei de comutaţie pe care o va parcurge, îndreptîndu-se spre originea planului fazelor cu comanda : îndreptîndu-se spre originea planului fazelor cu comanda :

$$u_0^* = -1; \tag{33}$$

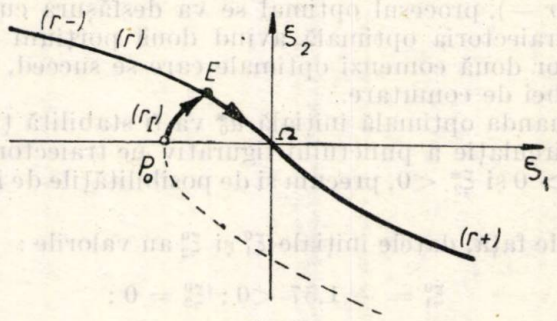


Fig. 2

Integrala (23) devine :

$$F(\xi_2^*) = \int \frac{d\xi_2^*}{\xi_2^{*2} - \frac{k_0}{h_0}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_0}{k_0}} \ln \frac{\sqrt{\frac{k_0}{h_0}} - \xi_2^*}{\sqrt{\frac{k_0}{h_0}} + \xi_2^*}; \tag{34}$$

iar ecuațiile (22) vor avea expresiile :

$$\xi_1^* = \xi_1^0 + \frac{1}{h_0} \ln \left[\frac{\operatorname{ch} \sqrt{k_0 h_0}\ \tau_0}{\operatorname{ch} \sqrt{k_0 h_0}\ (t + \tau_0)} \right]; \tag{35}$$

$$\xi_2^* = -\sqrt{\frac{k_0}{h_0}} \operatorname{th} [\sqrt{k_0 h_0}(t + \tau_0)] ;$$

ele reprezentînd ecuațiile parametrice ale ramurii $(r-)$ a curbei de comutare.

Pentru datele concrete ale problemei de subcontrol optimal rezultă următoarele expresii concrete ale ecuațiilor parametrice ale celor două porțiuni de traiectorie optimală parcursă de punctul figurativ :

$$(r_1) \quad \begin{cases} \xi_1^* = -1{,}57 - 4{,}7778 \ln |\cos(1{,}043t)| ; \\ \xi_2^* = 4{,}9835 \operatorname{tg}(1{,}043t) ; \end{cases} \tag{36}$$

și

$$(r-) \quad \begin{cases} \xi_1^* = -2{,}448 + 4{,}7778 \ln \dfrac{1{,}738}{\operatorname{ch}[1{,}043(t + 1{,}103)]} \\ \xi_2^* = -4{,}9835 \operatorname{th}[1{,}043(t - 1{,}103)] ; \end{cases} \tag{37}$$

Pentru $\tau-$ momentul în care punctul figurativ, plecat din poziția inițială $P_0(-1{,}57 ; 0)$ ajunge în punctul E — a rezultat valoarea :

$$\tau = 0{,}492(\text{s}) ; \tag{38}$$

Timpul minimizat $T_{\min} = t_f$, a rezultat din condiția finală :

$$\xi_2^*(t_f) = 0 ; \tag{39}$$

cu $\xi_2^*(t)$ dat de relația (37), obținîndu-se valoarea :

$$T_{\min} = t_f = 1{,}103(\text{s}) ; \tag{40}$$

4. PREZENTAREA REZULTATELOR PROBLEMEI DE SUBCONTROL OPTIMAL

Procesul optimal examinat în această situație va fi descris prin ecuațiile (36) și (37). În baza relațiilor (14) rezultă următoarele legi de variație a mărimilor θ_1 și $\dot{\theta}_2$:

$$\theta_1 = \begin{cases} -4{,}7778 \ln[\cos(1{,}043t)] : & t \in [0 ; 0{,}492]) \quad (S) \\ -1{,}107 + 4{,}7778 \ln \left| \dfrac{1{,}738}{\operatorname{ch}(1{,}043(t - 1{,}103)]} \right| ; & t \in [0{,}492 ; 1{,}103] \quad (S) \end{cases} \tag{41}$$

$$\dot{\theta}_1 = \begin{cases} 4{,}9835\ \mathrm{tg}(1{,}043\ t)\,; & t \in [0\,;\,0{,}492]\,; \quad (S) \\ -4{,}9835\ \mathrm{th}\ 1{,}043\ (t-1{,}103)\,; & t \in [0{,}492\,;\,1{,}103] \quad (S) \end{cases} \tag{42}$$

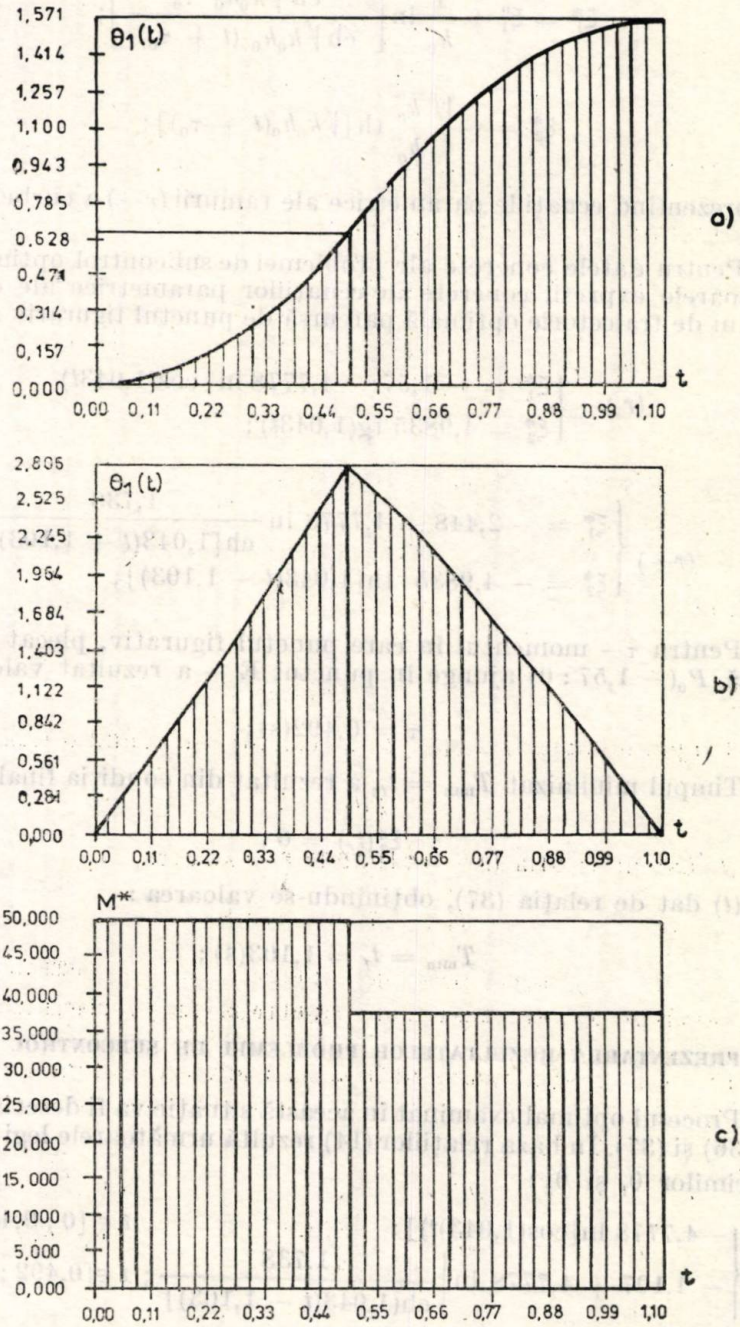


Fig. 3

iar în baza relațiilor (7) și (8) rezultă următoarea expresie a momentului optimizat :

$$M^* = \begin{cases} V^0 + C_f - c - 0{,}785\dfrac{g^0}{p^0} = 50(\text{Nm})\,;\ t \in [0\,;\,0{,}492] \quad (S) \\ \\ -V^0 + C_f - c - 0{,}785\dfrac{g^0}{p^0} = 37{,}75\ (\text{Nm})\,;\ t \in [0{,}492\,;\ 1{,}103] \quad (S) \end{cases} \tag{43}$$

În figura 3, sînt reprezentate curbele de răspuns $\theta_1(t)$, $\dot{\theta}_1(t)$ și diagrama de variație a momentului optimizat M^*.

5. CONCLUZII

În varianta optimizată, durata transportului clupelor în manipulator este de 1,103 (s) spre deosebire de varianta neoptimizată în care durata respectivă este de 1,5(s).

Primit în redacție la 1 august 1990

BIBLIOGRAFIE

. C. BELEA, M. VARTOLOMEI, *Metode algebrice și algoritmi de sinteză optimală a sistemelor dinamice*, Edit. Academiei, București, 1985.
2. P. BROUSSE, *Optimisation in Mechanic; Problems and Methods*, North-Holland, 1988.
3. F. L. BUZESCU ș.a., *Mecanism de deplasare a clupelor de la mașina de pieptănat fuior de in și cînepă*, brevet nr. 97.899/1989.
4. F. L. BUZESCU, C. FETECĂU, N. IRIMICIUC, *Modelarea matematică a funcționării mecanismelor de scoatere și introducere a clupelor în bancă, la mașina de pieptănat Ci — 302—1*, Creația tehnică și fiabilitatea în construcția de mașini, secția III Mecanică, Iași, 1983.
5. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, Edit. tehnică, vol. **I, II**, București, 1978, 1980.
6. L. S. PONTRIAGHIN ș.a., *Théorie mathématique des processus optimaux*, Mir, Moskva, 1974.
7. F. L. BUZESCU, *Screw-Stok Manipulator of a Hackled Flax and Hemp Machine Kinematic and Dynamic Study*, Buletin I. P. I., **XXXVI (XL)**, 8, secția IV (1990).

MODELAREA MATEMATICĂ ÎN MECANICA FLUIDELOR*)

de ADELINA GEORGESCU

O primă parte a abordării modelării matematice aparține logicii, în care, printre altele se analizează problema necontradicției și a completitudinii unui model. Noi trecem peste această etapă, dar recomandăm [1], [2].

O a doua parte, peste care de asemenea sărim, este aceea a cadrului analitic și geometric al modelului, deci a introducerii limbajului matematic al modelului, adică a diferitelor obiecte matematic (e.g. varietăți diferențiabile, sisteme dinamice, funcții de timp sau cîmpuri propriu-zise, funcționale, măsuri) care să modeleze noțiuni euristice sau fizice (e.g. corpul material, spațiul, timpul, mișcarea și mărimile fizice globale și locale (masa, forța, mărimile cinematice, starea de deformare și starea de tensiune)) [3]. În această etapă matematicianul, fizicianul și experimentatorul (uneori incluși într-o singură persoană) aleg din mai multe posibilități haina matematică cea mai potrivită pentru fenomenul de studiat. Aici este locul discuției în urma căreia admitem de exemplu că mărimile fizice trebuie modelate prin funcții aleatoare sau prin măsuri de probabilitate. Corespunzător unei alegeri sau a alteia, sensul operatorilor care vor descrie viteza de variație a unei mărimi globale, legile fizice și condițiile care eliberează corpul de legătură cu exteriorul, va fi cel din cadrul teoriei probabilităților al distribuțiilor, clasic diferențial sau clasic integral.

Această a doua etapă, a bazelor matematice, este cea mai deficitară a modelării în termodinamica modernă [4].

Mai departe se formează modelul matematic care guvernează un fenomen din corpul material. Prin model matematic în general vom înțelege : 1° un sistem de ecuații de evoluție (expresii ale legilor fizice valabile în interiorul domeniului Ω ocupat de un corp și în interiorul intervalului de timp în care are loc fenomenul) ; 2° condiții inițiale și la limită (care leagă fenomenul de trecut și de procesele din exteriorul lui Ω, procese care acționează asupra corpului material de studiat prin frontiera lui Ω) ; 3° clasa modelului alcătuită din specificațiile ca obiecte matematice a tuturor mărimilor fizice care apar în ecuații și condiții, clasă determinată în cea de a doua etapă a modelării.

În model apar variabilele independente timpul și spațiul, variabilele dependente (obiectele matematice necunoscute) și datele modelului (i.e. toate obiectele matematice care intră în model dar nu sînt variabile dependente sau independente). Distincția dintre variabile dependente și date arată care aserțiuni sînt primare și care sînt deduse, consecințe, teoreme.

---

*) Lucrare prezentată la simpozionul „Modelare în știință și tehnică", organizată de IPB, București, 29. oct. 1989.

Studiul cantitativ al modelului constă din analiza dependenței variabilelor dependente de timp și spațiu și el poate fi analitic (în cazuri cu totul simple) sau numeric în cazul general.

Studiul calitativ al modelului constă din analiza dependenței variabilelor dependente de date și privește stabilitatea, dependența continuă de data inițială, dependența sensibilă de data inițială, robustețea, mărginirea, bifurcația și comportamentul asimptotic al variabilelor dependente. Persoanele neavizate confundă studiul calitativ cu unul imprecis, de bun simț, pe din afară. Studiul calitativ implică, datorită necunoașterii, în general, a variabilelor dependente, analize matematice foarte dificile. Acest studiu este cel care deosebește teoriile mai vechi de cele recente; el furnizează informații asupra tuturor tipurilor de realizare ale fenomenului dintr-un corp material, în toate condițiile posibile. De asemenea studiul calitativ este obligator premergător unuia numeric pe de o parte atît datorită faptului că uneori problema inițială și/sau la limită prin care se exprimă modelul nu are soluție dar calculul numeric ne furnizează una cît și datorită faptului că acest studiu oferă informații privind mulțimea tuturor soluțiilor acelei probleme și a caracteristicilor lor ceea ce permite crearea de modele simplificate, singurele posibil de implementat pe calculator. Ne referim de exemplu la comportamentul de la infinit adus la distanță finită, la păstrarea termenilor de același ordin de mărime, la eliminarea zonelor de variații foarte rapide lîngă unele de variație foarte lentă etc.

Există două modalități distincte de studiere matematică a mișcării fluidelor după cum modelul matematic al suportului geometric al corpului material fluid este o mulțime discretă sau continuă. Știința care studiază fluidele modelate discret se numește mecanică statistică a fluidelor; dintre modelele matematice ale acesteia menționăm problemele inițiale și la limită pentru ecuația lui Boltzmann și Liouville. Știința care studiază mișcarea fluidelor al căror suport geometric este un continuum matematic se numește mecanica fluidelor. Mecanica fluidelor este o știință axiomatizată pe principii fizice, deci este o știință fizică. În ea se întîlnește o mare varietate de modele matematice care guvernează mișcarea fluidelor.

Mecanica fluidelor clasică studiază doar cazul fluidelor neconducătoare termic sau electric, în absența reacțiilor chimice, fluidele sînt obișnuite, iar mișcarea lor are loc în condiții obișnuite.

Hidrc-și aerodinamica sînt mecanici ale fluidelor clasice în care fluidul este un lichid (apa) și respectiv un gaz (aerul). Utilizată în special în aviație aerodinamica a fost obligată, în ultimele decenii, în cazul vitezelor mari, să avanseze spre termodinamică prin adoptarea de legi de stare termodinamică în care temperatura să apară explicit, deci fluidul să fie termoconductor. De asemenea, s-a constatat că în zona undelor de șoc modelarea continuă nu este cea adecvată și deci aerodinamica a trebuit să stabilească legături cu mecanica statistică a fluidelor. Generalizarea mecanicii clasice a fluidelor la cazul fluidelor electrice conductoare a condus spre magnetohidrodinamica clasică. Actualmente și această știință avansează spre termodinamică prin considerarea în plus a conductibilității termice a fluidelor. Studiul undelor de șoc în plasmă necesar în zborurile cosmice a impus o fuzionare a aerodinamicii cu MHD. Studiul materialelor sintetice a impus introducerea fluidelor nenewtoniene, iar analiza mișcării

sîngelui și a altor biofluide a necesitat introducerea fluidelor cu structură micropolară. Toate aceste înaintări ale mecanicii clasice a fluidelor spre termodinamică, electromagnetism, chimie, reologie, biologie a scos în evidență necesitatea unei abordări complexe și complete a mișcării fluidelor în cadrul teoriei fizicilor continuumurilor denumită și termodinamica proceselor departe de echilibru [5]— [7]. Pentru cazuri particulare de procese această termodinamică se reduce la termostatică, mecanică newtoniană a punctelor materiale discrete și a corpurilor rigide, termodinamică clasică, mecanică a fluidelor clasică, elasticitate clasică, plasticitate, chimie, electromagnetism. Un alt caz particular de interes pentru noi este termodinamica fluidelor ca știință a evoluției continuumurilor fluide cu proprietăți reologice neclasice, care sînt termic și electric conductoare și în care pot avea loc reacții chimice. Particularizările [8] se referă la : natura obiectelor matematice (e.g. cîmpurile degenerează în funcții de timp sau funcții de spațiu, de una sau două variabile spațiale, o funcțională degenerează într-o funcție din $\mathbb{R}^n$ (cum este cazul distribuțiilor care devenind regulate li se asociază funcții)) și la gradul de generalitate a principiilor (e.g. principiul de conservare a energiei interne totale va deveni principiul de conservare a energiei mecanice, pentru corpurile rigide și termic neconductoare). Chiar simpla particularizare de la cazul nestaționar la cel staționar nu este imediată, implicînd o anumită interpretare a datelor inițiale.

În anii noștri prin mecanica fluidelor se înțelege termodinamica fluidelor și ca apare ca o generalizare a mecanicii clasice a fluidelor dictată de complicarea din ce în ce a obiectului său de studiu : mișcarea unor fluide mult mai generale în care caracteristicile mecanice interacționează cu cele electromagnetice, termice și fizice. Premizele acestei abordări generale au apărut în jurul anilor '50 odată cu dezvoltarea reologiei și a industriei chimice care furniza date asupra comportamentului diferitelor materiale naturale sau sintetice și cu dezvoltarea tehnicilor spațiale, nucleare și chimice care impuneau considerarea multor efecte asupra mișcării „pur" mecanice a fluidelor. Așa au apărut mai întîi mecanicile neliniare care prezentau unitar o mulțime de modele ale mecanicii clasice a fluidelor și elasticității prin evidențierea clară a legilor de bilanț și a celor trei mari rezultate matematice (teorema de transport, teorema flux-divergență și teorema de continuitate), care permit trecerea de la formule globale (integrale clasice) la cele locale (diferențiale clasice) [9], [6], [10] — [15]. În acest fel era creat cadrul pentru considerarea unor materiale intermediare între cele fluide și elastice și apoi a altora cu proprietăți reologice dintre cele mai diferite, neliniare, cu memorie etc. care au făcut ca ecuațiilor de bilanț să li se alăture o altă mare componentă a termodinamicii moderne : teoria ecuațiilor constitutive [7]. În această teorie erau studiate ecuațiile constitutive (nu numai cele care leagă tensiunile de deformații) și ecuațiile de stare în care se specificau legături între diferitele mărimi rămase nespecificate în ecuațiile constitutive. Formalismul algebrei și analizei tensoriale pe care se baza teoria constitutivă era greoi, complex și părea artificial. Aceasta a împiedicat mulți specialiști să se apropie de mecanicile neliniare. Formalismul tensorial se deosebea foarte mult de formalismul elegant al teoriei ecuațiilor cu derivate parțiale pe care se bazau ecuațiile de bilanț. Pînă prin anii 1970 chestiunii condițiilor inițiale și la limită i s-a acordat puțină atenție.

Paralel cu aceste preocupări impuse de tehnică și experiment, începînd cu lucrările celebre ale lui J. Leray din 1933 și 1934, s-au dezvoltat tratări generalizate ale unor modele matematice ale mecanicii fluidelor. Aceste tratări au fost generate de imposibilitatea demonstrării unor teoreme de existență și unicitate pentru orice timp și număr Reynolds. În legătură cu aceasta Leray a propus drept model matematic pentru viteză o funcție Lebesgue integrabilă (deci o distribuție regulată), ulterior forța fiind modelată printr-o distribuție posibil singulară.

Cadrul generalizat a stat la baza apariției mecanicii fluidelor computaționale care folosește o analiză numerică în diferite spații de distribuții. Astăzi această mecanică devine tot mai importantă în studiul fluidelor mai ales datorită complexității modelelor, imposibil de tratat analitic.

Menționăm rolul teoriei calitative în clasificarea numeroaselor modele ale mecanicii fluidelor după gradul de generalitate al mișcării și fluidului studiate sau după tipul de aproximație (asimptotică) prin care ele rezultă dintr-un model considerat de perturbație.

Problemele de modelare în știința mecanicii fluidelor trebuie să-și cîștige mult loc în cursurile de specialitate prin curățirea acestora din urmă de elemente de matematică și informatică. Aceasta va permite pe de o parte algoritmizarea unor modele și folosirea lor imediată în practica inginerească, iar pe de alta îndreptarea potențialul de cercetare spre alte modele încă insuficient investigate teoretic.

Existența unui mare număr de noțiuni și rezultate de matematică și informatică pe care se bazează studiul mecanicii fluidelor face de strîngentă actualitate crearea unor cursuri de „principii matematice pentru specialiștii în mecanica fluidelor", așa cum astfel de cursuri sînt deja în uz pentru fizicieni, chimiști, biologi, economiști.

Primit în redacție la 11 decembrie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. A. GIRÉ, *Modèles mathématiques de systèmes évolutifs héréditaires, Théorie et applications*, Presses Universitaires de Lyon, 1987.
2. G. H. MÜLLER (ed.), — *Bibliography of mathematical logic*, vol. **VI**, *Proof theory. Constructive mathematics. Perspectives in mathematical logic*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
3. D. R. OWEN, *A first course in the mathematical foundations of thermodynamics, Undergraduate texts in Mathematics*), Springer-Verlag, New York, 1984.
4. J. SERRIN, *Mathematical principles of classical fluid mechanics, Handbuch der Physik*, **VIII/1**, *Strömungsmechanik 1*, Springer-Verlag, Berlin, 1959.
5. G. ASTARITA, G. MARRUCCI, *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*, Mc Graw-Hill, London, 1974.
6. J. SERRIN, *New perspectives in thermodynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
7. I. MÜLLER, *Thermodynamics*, Pitman, Boston, 1985.
8. W. A. DAY, *A commentary on thermodynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
9. J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Remarques sur la démonstration des équations du mouvement d'un milieu continu*, ed. M. Schäfer, Festschrift Walter Tollmien, Akademie — Verlag, Berlin, 1962.
10. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The nonlinear field theories*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
11. L. A. SCIPIO, *Principles of continua with applications*, Wiley, New York, 1967.
12. A. C. ERINGEN, *Mechanics of continua*, Wiley, New York, 1967.
13. W. PRAGER, *Introduction to mechanics of continua*, Ginn and Company, Boston, 1961.
14. V. G. LEVICH, *Fiziko-himicheskaia gidrodinamika*, Fizmatghiz, Moskva, 1959.
15. A. C. PIPKIN, D. R. OWEN, Phys. Fluids, **10** (1967).

RECENZII

G. LIPOVSZKY, K. SÓLYOMVÁRI, G. WARGA, *Vibration testing of machines and their maintenance*, (Încercări de vibrații ale mașinilor și întreținerea lor), Akadémiai Kiado, Budapest 1990.

Lucrarea prezintă încercările de vibrații, efectuate asupra elementelor caracteristice ale mașinilor sau componentelor principale ale acestora, ca o metodă eficientă, cu largi aplicații practice, pentru identificarea timpurie a defecțiunilor ce funcționare, în scopul îmbunătățiri și modernizării procesului de întreținere.

În primul capitol se analizează principalele activități ale procesului de întreținere ale mașinilor, ținînd seama de toți factorii care influențează fiabilitatea mașinii și succesul economic al întreprinderii.

Capitolul 2 se ocupă cu procesul de uzare, investigînd uzarea unor părți componente, datorită unor fenomene ca frecarea, oxidarea, fisurarea, etc. sau uzarea mașinii în ansamblu. Se menționează de asemenea oboseala materialului și coroziunea.

În capitolul 3 se analizează mărimile fundamentale ale vibrometriei și instrumentele de măsurare (vibrometre, analizoare de frecvențe, instrumente complementare).

Capitolul 4 cuprinde problemele referitoare la cercetarea stării unei mașini și a componentelor sale, analizînd intensitatea, vibrația și limitele acesteia în funcție de condițiile impuse de funcționarea tehnologică a mașinii și consecințele unor ruperi.

Se analizează și problemele privind selectarea punctelor de măsură și a modului de atașare a senzorilor (traductorilor) pentru ca valorile măsurate să fie cît mai reale.

În capitolele 5, 6, 7, 8, 9, 10 se analizează încercări specifice prin vibrometrie a comportării în funcționare a unor mașini sau elemente principale ale acestora.

Astfel, încercarea lagărelor (cap. 5) cuprinde studierea mișcării rolelor, a undelor vibratorii produse de fenomenele de impact, a influenței defectelor căii de rulare și a inelelor de fixare pe baza analizei spectrelor de vibrații înregistrate pentru lagăre noi și lagăre uzate, în condiții diferite de lubrefiație.

Încercarea angrenajelor și a transmisiilor cu roți dințate (cap. 6) se analizează pe baza spectrelor de accelerații, precizîndu-se nivelele limită ale acestora.

Condițiile de funcționare ale mașinilor într-o instalație și modalitățile de urmărire a parametrilor pe baza unor vibrograme fac obiectul capitolului 7.

O mare importanță se acordă în lucrare problemei neechilibrării rotorilor (cap. 8), pentru care, în funcție de momentul forțelor centrifugale, se analizează : neechilibrarea statică, momentul de neechilibrare al rotorului ; neechilibrarea cvasistatică și neechilibrarea dinamică. În continuare, după analiza cauzelor neechilibrărilor (la proiectare, la fabricația componentelor, la montaj, în exploatare) se prezintă efectele neechilibrării și modul de echilibrare într-un plan sau mai multe plane prin adăugarea unor mase suplimentare sau prin redistribuirea maselor rotorului. Se apreciază că rotorii rămîn cu o neechilibrare permanentă, a cărei limită maximă se precizează cu mult discernămînt în funcție de tipul mașinii, durata de serviciu a lagărelor, tipul rotorului și modul lui de deformare, Modalitățile de control a calității echilibrării și principiile generale de echilibrare sînt expuse, de asemenea, cu multă claritate,

În capitolul 9 se prezintă unele mașini de echilibrare iar în capitolul 10, echilibrarea in-situ a rotorilor într-un singur plan sau în două plane. Procedeele expuse sînt urmate de unele exemple de calcul ut le.

Din cele prezentate rezultă că lucrarea are un conținut bogat, teoretic și mai ales aplicativ, expus cu claritate și concizîune, pe baza unei documentații largi și moderne.

Lucrarea este valoroasă și deosebit de utilă pentru toți inginerii și managerii ce au în sarcină întreținerea bunei funcționări a unor instalații industriale. Folosirea vibrometriei în urmărirea comportării mașinilor sau elementelor componente ale acestora constituie un procedeu eficient și economic în îmbunătățirea și modernizarea proceselor tehnice de întreținere (maintenantă) a instalațiilor.

N. Posea

H. STEUP, *Stabilitätstheorie im Bauwesen* (Teoria stabilității în construcții), Ernst. u. Sohn, Berlin, 1990, 369 pag., 147 fig. 538 ref. bibl.

Dezvoltarea teoriei stabilității construcțiilor, orientată în trecut mai ales spre probleme de flambaj și valoare în sensul teoriei valorilor proprii, este caracterizată în prezent prin analiza comportării neliniare-geometric și fizic-sub diferite acțiuni. De un interes deosebit se bucură sistemele imperfecte cu devieri accidentale față de configurația și încărcarea ideală.

Lucrarea de față are drept scop elucidarea „anatomiei" problemei stabilității printr-o generalizare a noțiunii de stabilitate în cadrul teoriei deformațiilor materialelor de construcții.

După considerații introductive în capitolul 1 (27 pag.) capitolul 2 (69 pag.) se ocupă de bare în starea plană de deformații. Urmează studiul barelor supuse la torsiune, încovoiere și forțe axiale în capitolul 3 (44 pag.) și probleme de stabilitate a barelor curbe în capitolul 4 (20 pag.) Stabilitatea structurilor alcătuite din bare și a celor din bare și cabluri face obiectul capitolului 5 (46 pag.) Ultimele trei capitole ale părții teoretice tratează structuri bidimensionale continue : valoarea plăcilor plane — capitolul 5 (66 pag.), valoarea plăcilor curbe — capitolul 7 (27 pag.) și valoarea plăcilor cutate și curbe compuse — capitolul 8 (2 pag.).

În fiecare capitol, după o privire de ansamblu urmează studiul unor cazuri simplificate prezentarea teoriilor generalizate și a metodelor de calcul — inclusiv a celor numerice și — în încheiere — cîteva aplicații practice.

Anexa cuprinde capitolul 9 (10 pag.) referitor la baze metematice și capitolul 10 (25 pag.) cu 12 exemple de calcul practic.

Cartea profesorului Steup — bazată pe bine cunoscutul manual al lui Bürgermeister, Steup și Kretschmar — cuprinde o prezentare unitară a problemei stabilității structurilor de diferite forme, din diferite materiale de construcție, inclusiv cel mai răspîndit — betonul armat. Nu oferă o colecție de formule și diagrame ci diferite tehnici ce permit abordarea și rezolvarea problemelor complexe ale domeniului studiat. Ca atare este foarte utilă în cercetare, în învățămînt și în proiectare.

R. Friedrich

H. WEIGLER, S. KARL, *Beton — Arten — Herstellung — Eigenschaften*, (Betonul Tipuri — preparare — proprietăți), Sohn, Berlin, 1989, 566 pag., 292 fig., 648 ref. bibl.

O construcție nu poate fi mai bună decît materialele din care a fost executată. Cel mai important material de construcție rămîne betonul, sub forma betonului simplu, betonului armat și betonului precomprimat. Componenta beton determină în mare măsură rezistența și durabilitatea unei structuri dar și comportarea elementelor nestructurale.

Cartea de față cuprinde cunoștințe la zi privind compoziția betonului, prepararea și punerea lui în operă cît și comportarea betonului întărit. Materia este împărțită în 10 capitole, primul (10 pag.) definind tipuri de betoane, clase de betoane, grupe și sorturi. Următoarele 6 capirole se ocupă preponderent de betonul obișnuit. Astfel materialele componente sînt tratate în capitolul 2 (90 pag.). Capitolul 3 (37 pag.) se ocupă de compoziția granulometrică a agregatelor, de structura betonului și de stabilirea compoziției acestuia. Prepararea, punerea în operă și tratamentul ulterior fac obiectul capitolului 4 (66 pag.), proprietățile betonului proaspăt fiind prezentate în capitolul 5 (29 pag.), iar cele ale betonului tînăr în capitolul 6 (18 pag.). Betonul întărit este tratat pe larg în capitolul 7 (189 pag.). După definirea densității și a volumului porilor se acordă o importanță deosebită rezistențelor mecanice : la compresiunea, la întindere, la forfecare și torsiune și la șoc. Urmează probleme legate de aderența betonului la armătură, de deformațiile betonului datorită încărcărilor și datorită influențelor mediului cît și de alte proprietăți impirtante ca durabilitatea, rezistența la uzură, impermeabilitatea față de lichide și gaze, rezistența la îngheț-dezgheț- rezistența la acțiuni chimice, comportarea sub temperaturi extrene, rezistența la radiații protecția armăturilor contra coroziunii și conservarea altor materiale în beton.

Ultimele trei capitole se ocupă de betoane speciale : betonul ușor în capitolul 8 (23 pag.), betonul torcretat în capitolul 9 (16 pag.) și betonul cu fibre în capitolul 10 (24 pag.).

Prezentul volum — al cincilea din seria „Manual pentru construcții din beton, beton armat și beton precomprimat" — reflectă stadiul actual al cunoștințelor despre beton, ținînd seama de dezvoltarea din Germania și din întreaga lume. Profunda cunoaștere a proprietăților betonului și a modului cum pot fi influențate sînt indispensabile în studiul comportării mecanice a structurilor din beton armat și în optimizarea lor.

R. Friedrich

TH. PAULAY, H. BACHMANN, K. MOSER, *Erdbebenbemessung von Stahlbetonhochbauten*, (Proiectarea antiseismică a clădirilor înalte din beton armat) Birkhäuser, Verlag, Basel, 1990, 562 pag., 341 fig. 219 ref. bibl.

Diferite cutremure recente au arătat că nu întotdeauna construcţiile noi se comportă mai bine decît cele vechi. În plus cerinţele de siguranţă au crescut, astfel încît şi în zonele cu seismicitate moderată este necesară o proiectare antiseismică atentă. Prezenta carte a cunoscutului profesor neozeelandez şi a colaboratorilor săi elveţieni tratează exhaustiv problema calculului şi alcătuirii structurilor antiseismice din beton armat ale clădirilor civile.

Capitolul introductiv defineşte problematica şi scopul lucrării, punînd în evidenţă trei paşi în procesul proiectării : determinarea acţiunilor înlocuitoare pentru o ductilitate posibilă, dimensionarea structurii prin metoda deterministă a capacităţii portante şi alcătuirea constructivă a structurii, cu accent pe zonele cu articulaţii plastice potenţiale. Metoda capacităţii portante se bazează pe următoarele principii : limitarea solicitării, stabilitrea zonelor pentru disiparea energiei protecţia zonelor casante împotriva suprasolicitării şi asigurarea comportării ductile a structurii în ansamblu.

Determinarea acţiunilor înlocuitoare face obiectul capitolului doi . După expunerea bazelor se prezintă procedeul general cît şi normele americane, neozeelandeze, germane, austriece şi elveţiene. Bazele dimensinării sînt cuprinse în caipitolul trei, cu definirea ductilităţii şi a proprietăţilor materialelor, determinarea capacităţilor portante ale secţiunilor transversale şi prezentarea recomandărilor constructive.

Capitolul patru — cel mai voluminos — tratează cadrele ductile. După prezentarea modelelor şi metodelor de calcul se aprofundează determinarea solicitărilor în rigle şi stîlpi, dimensionarea acestora, stabilitatea cadrelor, dimensionarea nodurilor cadrelor şi tipuri particulare de cadre. Foarte utilă este rezumarea calculului cadrelor în 17 paşi cît şi exemplificarea acestora la un cadru spaţial avînd 8 nivele şi 6 × 4 deschideri cît şi 2 nivele suplimentare dispuse excentric.

Diafragmele ductile fac obiectul capitolui cinci. Se discută diferite tipuri de structuri rigidizate cu diafragme, determinarea eforturilor, dimensionarea şi alcătuirea constructiva Calculul se rezumă în 19 paşi şi se exemplifică pe o structură cu 10 nivele. Se pun în evidenţă particularităţile diafragmelor scunde cu un exemplu de tratare a acestora. Sistemul mixt cadre-diafragme ductile este prezentate în capitolul şase. Operaţiile necesare calculului acestora se rezumă în 24 paşi. Se discută şi probaleme speciale de modelare şi dimensionare a sistemelor foarte neregulate.

Capitolul şapte se ocupă de sisteme cu ductilitate limitată : structuri în cadre, diafragme mixte. Fundaţiilor le este rezervat capitolul opt tratîndu-se diferite tipuri utilizate la structurile studiate anterior.

Metoda propusă pentru structuri din beton armat poate fi aplicată şi structurilor din alte materiale. Astfel anexa A cuprinde un exemplu de dimensionare a unui coş de fum metalic. Anexa B prezintă coeficienţi pentru calculul cadrelor ; determinarea eforturilor în diafragme este prezentată doar principial.

Bogăţia informaţiilor şi claritatea expunerii fac ca această carte — unică pe plan mondial — să fie foarte utilă proiectanţilor şi cercetătorilor în domeniul de larg interes al structurilor antiseismice. Metoda de proiectare, dezvoltare în Noua Zeelandă, duce la soluţii adecvate atît în zonele cu seismicitate ridicată cît şi în cele cu seismicitate moderată.

R. Friedrich

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

pnblică :

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental : de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţii româneşti şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură metode moderne de calcul al maşinilor automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice, pentru măsurarea mărimilor mecanice. utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul comitetului de redacţie, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1.

Anunţăm abonaţii şi cumpărătorii revistei noastre că datorită creşterii costurilor de tipărire sîntem obligaţi să reducem numărul anual de pagini al publicaţiei noastre (ceea ce explică şi comasarea unor numere). Contăm pe înţelegerea situaţiei şi sperăm în menţinerea abonamentelor la revista noastră.

R

F 2157

ACADEMIA ROMÂNĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

5—6

TOMUL 50

septembrie — décembrie

1991

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. CAIUS IACOB
Acad. DAN MATEESCU
Acad. RADU VOINEA
Acad. GHEORGHE BUZDUGAN,
Acad. NICOLAE PATRAULEA,
Prof. RADU C. BOGDAN
Prof. VIRGILIU N. CONSTANTINESCU
Prof. NICOLAE CRISTESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Prof. LAZĂR DRAGOŞ
Prof. CONSTANTIN IAMANDI
Prof. DUMITRU MANGERON
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. CRISTIAN PELECUDI
Dr. ing. MIRCEA RADEŞ
Prof. GHEORGHE SILAŞ
Dr. doc. VIOREL VISARION
Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. DAN MATEESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei Române se vor adresa la: ROMPRES FILATELIA, sectorul export-import presă, P.O. Box 12—201, telex: 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România: în ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Colegiului de redacţie al revistei, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125.

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei, 125, sectorul 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 50, nr. 5—6 **septembrie — decembrie 1991**

SUMAR

STUDII

CORNELIA CHIUJDEA şi ADELINA GEORGESCU, Efectul Toms 305

S. GĂLEŢUŞE, Studiu aerodinamic analitic al elicei eoliene cu ax orizontal 323

V. HANDRA-LUCA şi M. C. BRIŞAN, Analiza cinematică a unui robot biped : problema directă 329

N. POSEA, S. ŢILIMPEA şi S. CHERGUI, Vibraţiile axiale ale garniturilor de prăjini de foraj 351

GH. IORDACHE, Dimensionarea melcului maşinii de extrudere combinate (disc-melc).. 367

PH. RIGO, Metoda marginilor rigidizate 377

A. PAVEL, Analiza prin tensometrie electrorezistivă a unui recipient cilindric orizontal, cu funcţie de vas separator, distorsionat prin termocolaps 393

I. M. CIORNEI, Optimizarea funcţională şi constructivă a variatorului EHD de tip frontal cu bile 423

V. R. ANCUŞA, Determinarea teoretică a caracteristicii universale a unei reţele drepte de profile 439

M. POPESCU şi A. HALANAY, Asupra valabilităţii modelului de fluid incompresibil pentru studiul stabilităţii hidraulice a castelelor de echilibru 449

RECENZII 457

INDEX ALFABETIC 459

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități S. I. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea cu cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie) , editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei, 125.

Anunțăm abonații și cumpărătorii revistei noastre că datorită creșterii costurilor de tipărire sîntem obligați să reducem numărul anual de pagini al publicației noastre (ceea ce explică și comasarea unor numere). Contăm pe înțelegerea situației și sperăm în menținerea abonamentelor la revista noastră.

EFECTUL TOMS*)

de

CORNELIA CHIUJDEA
Institutul Politehnic București

ADELINA GEORGESCU
Institutul de Matematică București

Se deduc ecuațiile generalizate de tip Reynolds (în coordonate cilindrice) care guvernează mișcarea turbulentă a unor fluide nenewtoniene (și anume vîscoelastice de tip Maxwell) care modelează curgerea în conducte circulare a soluțiilor diluate de polimeri. În cadrul unei teorii naive de turbulență se găsesc caracteristicile mișcării medii. Se deduc ecuațiile liniarizate ale fluctuațiilor sub formă de moduri normale ale mișcării turbulente în tuburi circulare a unui fluid de tip Maxwell, corespunzătoare unei mișcări medii Hagen-Poiseuille.

1. ECUAȚIILE GENERALIZATE DE TIP REYNOLDS PENTRU UN FLUID VÎSCOELASTIC IN MIȘCARE TURBULENTĂ INTR-O CONDUCTĂ CIRCULARĂ

În contextul problemelor energetice actuale în procesele tehnologice se utilizează fluide din ce în ce mai complexe cu performanțe energetice din ce în ce mai ridicate. Între acestea introducerea aditivilor pentru reducerea pierderilor de presiune la curgerea lichidelor reprezintă o preocupare tehnică remarcabilă în ultimele două decenii [1], [2].

Aditivarea lichidelor (i.e. adăugarea de mici cantități de polimeri de ordinul părților pe milion în lichide) are drept rezultat reducerea considerabilă a energiei (în anumite condiții pînă la 75%) mișcării turbulente a lichidelor aditivate comparativ cu cele neaditivate (solvent). Acest rezultat poartă numele de *efectul Toms* și este binecunoscut cercetătorilor din mecanica fluidelor, chimie, industria petrolieră etc. El are un cîmp foarte larg de aplicații : transport hidraulic, jeturi submerse sau libere, reducerea rezistenței la înaintare a corpurilor prin lichide, sistemele de canalizare, rețelele de termoficare, cavitația, aplicațiile din marină.

Efectul Toms constă din reducerea efortului tangențial de frecare la curgerea lichidelor conținînd cantități foarte mici de polimeri ceea ce are drept consecință micșorarea corespunzătoare a pierderilor de presiune în cazul curgerilor în tuburi și la reducerea rezistenței la înaintare în cazul curgerii în jurul corpurilor. În pofida avansării mai multor ipoteze, nu se dispune încă de o teorie unitară a efectului Toms capabilă să explice datele experimentale pentru toate situațiile și clasele de aditivi. Totuși, în totalitatea lor experimentele conduc la concluzia că efectul

*) Lucrarea a fost prezentată la Colocviul de Mecanica fluidelor și aplicațiile ei tehnice Iași, 1989.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 5–6, 1991, P. 305–321

Toms este localizat în zona peretelui conductei (și anume zona tampon situată imediat după substratul vîscos) și că soluțiile diluate de polimeri trebuie considerate drept fluide nenewtoniene vîscoelastice (i.e. fluide care posedă simultan proprietăți elastice și proprietăți vîscoase), elasticitatea macromoleculei constituind un factor important în elucidarea fenomenului Toms; care tip de fluid nenewtonian este cel potrivit, este însă o problemă încă nerezolvată.

Găsirea unui model reologic adecvat prezintă mari dificultăți deoarece caracterul nenewtonian al soluțiilor de polimeri se manifestă cu precădere în regim turbulent și drept urmare determinarea experimentală a unor parametri reologici este dificilă. De aceea, în studiul acestor soluții cele mai des folosite sînt modelele semiempirice și ca atare considerațiile teoretice sînt completate de experimente.

Printre altele, vizualizările [4] au pus în evidență eliminarea vîrtejurilor mici din domeniul frecvențelor mari din spectrul de energie, avînd loc o deplasare a întregului spectru de energie către domeniul cu frecvențe mai mici, deci aditivii suprimă vîrtejurile mici [3]. Concluzii asemănătoare au rezultat și prin măsurătorile efectuate cu anemometre cu laser [6]. În figurile 1 și 2 se prezintă profilul de viteze turbulente axiale și radiale în prezența polimerului. Se observă că odată cu îndepărtarea de la perete intensitatea turbulenței axiale la soluția cu polimer este sensibil mai mare (cu pînă la 55%) decît în cazul lichidului neaditivat, în timp ce intensitatea turbulenței radiale pentru aceeași zonă este respectiv mai mică [3]. A este timpul adimensional de relaxare.

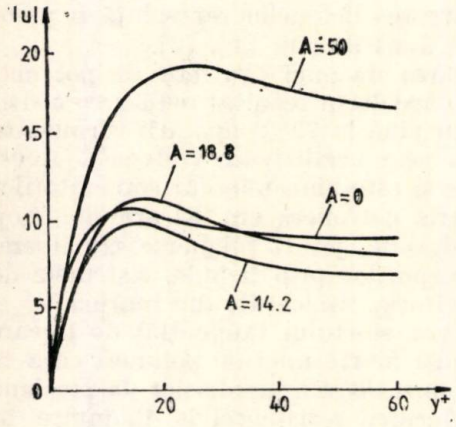


Fig. 1

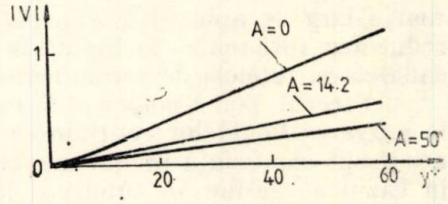


Fig. 2

În lipsa unei teorii unitare a efectului Toms în studiul soluțiilor diluate de polimeri cele mai des folosite sînt modelele semiempirice bazate pe o mulțime de ipoteze fizic plauzibile și experimental confirmate. Într-o serie de articole noi vom considera un model teoretic, legînd efectul Toms de fenomenul de instabilitate care antrenează modificări drastice ale coeficientului de rezistență la intrare și ale pierderilor de presiune [7].

Prezentul articol deschide această serie. În el stabilim ecuațiile de mișcare ale fluidelor vîscoelastice, incompresibile, care satisfac o ecuație

constitutivă de tip Maxwell, ecuație pregătitoare abordării studiului de stabilitate liniară. S-a considerat că mișcarea este axial simetrică și are loc în regim turbulent, deci este nestaționară. S-au dedus ecuațiile mișcării medii din modelul lui Reynolds corespunzător. S-a presupus că mișcarea medie a cărei stabilitate urmează să fie investigată este de tip Poiseuille ceea ce a permis deducerea tensorului tensiunilor acestei mișcări de bază. Prin introducerea acestui tensor și a profilului mișcării Poiseuille în ecuațiile fluctuației, liniarizate în jurul acestei mișcări, s-au obținut ecuațiile care guvernează stabilitatea liniară a mișcării Poiseuille. Toate ecuațiile deduse sînt complicate și au fost scrise pe componente, amănunțit. Sistemul de ecuații care descrie mișcarea fluidelor vîscoelastice de tip Maxwell, constă din ecuația de continuitate, ecuația de mișcare a lui Cauchy și legea constitutivă:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \rho\vec{F} + \operatorname{div} \vec{\vec{\sigma}}, \tag{2}$$

$$\vec{\vec{\sigma}} + \lambda \frac{\mathfrak{D}\vec{\vec{\sigma}}}{\mathfrak{D}t} = 2\mu\vec{\vec{D}}, \tag{3}$$

unde $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}t}$ este derivată de tip Jaumann

$$\frac{\mathfrak{D}\vec{\vec{\sigma}}}{\mathfrak{D}t} = \frac{\partial\vec{\vec{\sigma}}}{\partial t} + (\vec{v}\,\mathrm{grad})\,\vec{\vec{\sigma}} - \mathrm{grad}\,\vec{v}\cdot\vec{\vec{\sigma}} - (\mathrm{grad}\,\vec{v}\vec{\vec{\sigma}})^T,$$

μ este coeficient de vîscozitate dinamică, λ reprezintă timpul de relaxare, $\vec{\vec{T}} = -p\,\vec{\vec{I}} + \vec{\vec{\sigma}}$ este tensorul simetric al tensiunilor, unde $\vec{\vec{I}}$ este tensorul unitate, p reprezintă presiunea, $\vec{v}$ reprezintă viteza, iar $\vec{\vec{D}}$ — tensorul simetric al vitezelor de deformare. Cu acestea ecuația constitutivă devine

$$\vec{\vec{\sigma}} + \lambda\left[\frac{\partial\vec{\vec{\sigma}}}{\partial t} + (\vec{v}\,\mathrm{grad})\,\vec{\vec{\sigma}} - \mathrm{grad}\;\vec{v}\vec{\vec{\sigma}} - (\mathrm{grad}\,\vec{v}\vec{\vec{\sigma}})^T\right] = \mu[\mathrm{grad}\,\vec{v} + (\mathrm{grad}\,\vec{v})^T]. \tag{4}$$

Complexitatea ei împiedică explicitarea lui $\vec{\vec{\sigma}}$, acest tensor intrînd alături de viteză și presiune drept cîmp necunoscut al problemei formată din ecuația de continuitate, ecuația de mișcare a lui Cauchy, ecuația constitutivă și condițiiile inițiale și la limită. Toate aceste ecuații vor fi scrise mai jos pe componente în raport cu un sistem de coordonate cilindrice (r, θ, z) în care $\vec{\vec{\sigma}} = \sigma_{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta$, $\vec{v} = v_\alpha\vec{e}_\alpha$, $\alpha = r, \theta, z$. Astfel, ecuația de mișcare a lui Cauchy se scrie pe componente, în absența forțelor masice,

sub forma [5]

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial_\theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+$$

$$+\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta}+\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z}+\frac{1}{r}\sigma_{rr}-\frac{1}{r}\sigma_{\theta\theta}, \tag{5}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_{\theta.}}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+$$

$$+\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z}+2\frac{\sigma_{\theta r}}{r}, \tag{6}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r}+$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{r}\sigma_{rz}. \tag{7}$$

Ecuația de continuitate are forma

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0. \tag{8}$$

Ecuația constitutivă scrisă pe componente devine

$$\sigma_{rr}+\lambda\left\{\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t}+v_r\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+v_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta}-\frac{2}{r}\sigma_{\theta r}\right)+\right.$$

$$\left.+v_z\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z}-2\left[\sigma_{rr}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\sigma_{r\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r}\right)+\sigma_{rz}\frac{\partial v_r}{\partial z}\right]\right\}=2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{9}$$

$$\sigma_{\theta\theta}+\lambda\left\{\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t}+v_r\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r}+v_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{2}{r}\sigma_{\theta r}\right)+v_z\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial z}-\right.$$

$$\left.-2\left[\sigma_{\theta r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\sigma_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right)+\sigma_{\theta z}\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]\right\}=$$

$$=2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right), \tag{10}$$

$$\sigma_{zz} + \lambda\left[\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial t} + v_r\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} - 2\left(\sigma_{zr}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sigma_{z\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} + \sigma_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right] = 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{11}$$

$$\sigma_{r\theta} + \lambda\left\{\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial t} + v_r\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}\right) + v_z\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial z} - \right.$$

$$-\left[\sigma_{rr}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \sigma_{r\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right) + \sigma_{rz}\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right] - \left[\sigma_{\theta r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \right.$$

$$\left.\left. + \sigma_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r}\right) + \sigma_{\theta z}\frac{\partial v_r}{\partial z}\right]\right\} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r}\right), \tag{12}$$

$$\sigma_{rz} + \lambda\left\{\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial t} + v_r\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial\theta} - \sigma_{\theta z}\right) + v_z\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} - \right.$$

$$-\left(\sigma_{rr}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{r\theta}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} + \sigma_{rz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - \left[\sigma_{zr}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \sigma_{z\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \sigma_{zz}\frac{\partial v_r}{\partial z}\right]\right\} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right), \tag{13}$$

$$\sigma_{\theta z} + \lambda\left\{\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial t} + v_r\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta r}\right) + v_z\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z} -$$

$$-\left(\sigma_{\theta r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \sigma_{\theta\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} + \sigma_{\theta z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - \left[\sigma_{zr}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \sigma_{z\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{v_r}{r}\right) + \sigma_{zz}\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]\right\} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right). \tag{14}$$

Se descompune mișcarea turbulentă într-o medie și o fluctuație notînd

$$v_r = \bar{v}_r + V_r,\ v_\theta = \bar{v}_\theta + V_\theta,\ v_z = \bar{v}_z + V_z,$$

$$p = \bar{p} + p,\ \vec{\vec{\sigma}} = \vec{\vec{\sigma}} + \vec{\vec{\Sigma}}$$

unde bara indică caracteristici medii, iar literele mari caracteristici ale fluctuației. Introducînd aceste descompuneri în ecuațiile de mai sus și mediind ecuațiile obținute găsim următoarele ecuații care descriu mișcarea

medie și deci care reprezintă ecuațiile generalizate de tip Reynolds: ecuația de continuitate

$$\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \frac{\bar{v}_r}{r} = 0; \tag{16}$$

cuația de mișcare scrisă pe componente

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \overline{V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} + \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}} + \bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\bar{v}_0^2}{r} - \overline{\left(\frac{(V_0^2)}{r}\right)}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{zr}}{\partial z} +$$

$$+ \frac{1}{r}\bar{\sigma}_{rr} - \frac{1}{r}\bar{\sigma}_{\theta\theta}, \tag{17}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \overline{V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}} + \bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} + \overline{V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{v}_r\bar{v}_\theta}{r} + \overline{\frac{V_rV_\theta}{r}}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2}{r}\bar{\sigma}_{r\theta}, \tag{18}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \overline{V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} + \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}} + \bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \overline{V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}}\right) =$$

$$= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\bar{\sigma}_{rz} \tag{19}$$

și ecuația constitutivă de asemenea pe componente

$$\bar{\sigma}_{rz} + \lambda\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial r} + \overline{V_r\frac{\partial \Sigma_{rz}}{\partial r}} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial \theta} + \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial \Sigma_{rz}}{\partial \theta}} - \frac{\bar{v}_\theta}{r}\bar{\sigma}_{\theta z} - \right.$$

$$- \overline{\frac{V_\theta\Sigma_{\theta z}}{r}} + \bar{v}_z\frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial z} + V_z\overline{\frac{\partial \Sigma_{rz}}{\partial z}} - \bar{\sigma}_{rr}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} - \overline{\Sigma_{rr}\frac{\partial V_z}{\partial r}} - \frac{1}{r}\bar{\sigma}_{r\theta}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} -$$

$$- \frac{1}{r}\overline{\Sigma_{r\theta}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}} - \bar{\sigma}_{rz}\frac{\partial v_z}{\partial z} - \overline{\Sigma_{rz}\frac{\partial V_z}{\partial z}} - \frac{1}{r}\bar{\sigma}_{z\theta}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\overline{\Sigma_{r\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}} -$$

$$\left. - \bar{\sigma}_{zz}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} - \overline{\Sigma_{zz}\frac{\partial V_r}{\partial z}} = \mu\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z}\right)\right. . \tag{20}$$

$$\overline{\sigma}_{zz} + \lambda\left(\frac{\partial\overline{\sigma}_{zz}}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial\overline{\sigma}_{zz}}{\partial r} + \overline{v_r\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\overline{\sigma}_{zz}}{\partial\theta} + \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial\theta}} + \right.$$

$$\left. + \bar{v}_z\frac{\partial\overline{\sigma}_{zz}}{\partial z} + \overline{V_z\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial z}} - 2\overline{\sigma}_{zr}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial r} - 2\overline{\Sigma_{zr}\frac{\partial V_z}{\partial r}} - \frac{2}{r}\overline{\sigma}_{z\theta}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial\theta} - \right.$$

$$- \frac{2}{r}\overline{\Sigma_{z\theta}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}} - 2\overline{\sigma}_{zz}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial z} - 2\overline{\Sigma_{zz}\frac{\partial V_z}{\partial z}} = 2\mu\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial z},$$

$$\overline{\sigma}_{\theta z} + \lambda\left(\frac{\partial\overline{\sigma}_{\theta z}}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial\overline{\sigma}_{\theta r}}{\partial r} + \overline{V_r\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial r}} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial\overline{\sigma}_{\theta z}}{\partial\theta} + \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial\theta}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\overline{\sigma}_{rz} + \overline{\frac{V_\theta\Sigma_{rz}}{r}} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\overline{\sigma}_{\theta r} + \overline{\frac{V_\theta\Sigma_{\theta r}}{r}} + \bar{v}_z\frac{\partial\overline{\sigma}_{\theta z}}{\partial z} + \overline{V_z\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial z}} - \right.$$

$$- \overline{\sigma}_{\theta r}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial r} - \overline{\Sigma_{\theta r}\frac{\partial V_z}{\partial r}} - \frac{\overline{\sigma}_{\theta\theta}}{r}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial\theta} - \overline{\frac{\Sigma_{\theta\theta}}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}} - \overline{\sigma}_{\theta z}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial z} - \overline{\Sigma_{\theta z}\frac{\partial V_z}{\partial z}} - \right.$$

$$- \overline{\sigma}_{zr}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial r} - \overline{\Sigma_{zr}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}} - \frac{\overline{\sigma}_{z\theta}}{r}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial\theta} - \overline{\frac{\Sigma_{z\theta}}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}} - \frac{\overline{\sigma}_{z\theta}\bar{v}_r}{r} - \overline{\frac{\Sigma_{z\theta}V_r}{r}} - \right.$$

$$\left. - \overline{\Sigma_{zz}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}} - \overline{\sigma}_{zz}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial z} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial\theta} + \frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial z}\right). \right. \tag{22}$$

$$\overline{\sigma}_{rr} + \lambda\left(\frac{\partial\overline{\sigma}_{rr}}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial\overline{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \overline{V_r\frac{\partial\Sigma_{rr}}{\partial r}} + \frac{1}{r}\bar{v}_\theta\frac{\partial\overline{\sigma}_{rr}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\overline{V_\theta\frac{\partial\Sigma_{rr}}{\partial\theta}} - \right.$$

$$- \frac{1}{r}\bar{v}_\theta\overline{\sigma}_{\theta r} - \frac{1}{r}\overline{V_\theta\Sigma_{\theta r}} + \bar{v}_z\frac{\partial\overline{\sigma}_{rr}}{\partial z} + \overline{V_z\frac{\partial\Sigma_{rr}}{\partial z}} - 2\overline{\sigma}_{rr}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial r} - 2\overline{\Sigma_{rr}\frac{\partial V_r}{\partial r}} - \right.$$

$$- \frac{2}{r}\overline{\sigma}_{r\theta}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial\theta} - \frac{2}{r}\overline{\Sigma_{r\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}} - 2\overline{\sigma}_{rz}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial z} - 2\overline{\Sigma_{rz}\frac{\partial V_r}{\partial z}} - 2\overline{\sigma}_{r\theta}\frac{\bar{v}_\theta}{r} - \right.$$

$$\left. - 2\overline{\frac{\Sigma_{r\theta}V_\theta}{r}} = 2\mu\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial r}, \right. \tag{23}$$

$$\overline{\sigma}_{r\theta} + \lambda\left(\frac{\partial\overline{\sigma}_{r\theta}}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial\overline{\sigma}_{r\theta}}{\partial r} + \overline{V_r\frac{\partial\Sigma_{r\theta}}{\partial r}} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial\overline{\sigma}_{r\theta}}{\partial\theta} + \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{r\theta}}{\partial\theta}} - \frac{\bar{v}_\theta}{r}\overline{\sigma}_{\theta\theta} - \right.$$

$$-\overline{\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{\theta\theta}}+\frac{\bar{v}_\theta\bar{\sigma}_{rr}}{r}+\overline{\frac{V_\theta\Sigma_{rr}}{r}}+\bar{v}_z\frac{\partial\bar{\sigma}_{r\theta}}{\partial z}+\overline{V_z\frac{\partial\Sigma_{r\theta}}{\partial z}}-\bar{\sigma}_{rr}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial r}-$$

$$-\Sigma_{rr}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\bar{\sigma}_{r\theta}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\overline{\Sigma_{r\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}}-\overline{\frac{\Sigma_{r\theta}\bar{\sigma}_{r\theta}\bar{v}_r}{r}}-\overline{\frac{\Sigma_{r\theta}V_r}{r}}-\bar{\sigma}_{rz}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}-$$

$$-\overline{\Sigma_{rz}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}}-\bar{\sigma}_{\theta r}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial r}-\overline{\Sigma_{\theta r}\frac{\partial V_r}{\partial r}}-\frac{1}{r}\overline{\Sigma_{\theta\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}}+\bar{\sigma}_{\theta\theta}\frac{\bar{v}_\theta}{r}+\overline{\frac{\Sigma_{\theta\theta}V_\theta}{r}}-$$

$$-\bar{\sigma}_{\theta z}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial z}-\overline{\Sigma_{\theta z}\frac{\partial V_r}{\partial z}}\Big)=\mu\left(\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r}\right), \tag{24}$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}+\lambda\Big(\frac{\partial\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{\partial t}+\bar{v}_r\frac{\partial\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{\partial r}+\overline{V_r\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial r}}+\frac{1}{r}\bar{v}_\theta\frac{\partial\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\overline{V_\theta\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}}+$$

$$+\frac{1}{r}\bar{v}_\theta\bar{\sigma}_{r\theta}+\frac{1}{r}\overline{V_\theta\Sigma_{r\theta}}+\frac{1}{r}\bar{v}_\theta\bar{\sigma}_{\theta r}+\frac{1}{r}\overline{V_\theta\Sigma_{\theta r}}+\bar{v}_z\frac{\partial\bar{\sigma}_{\theta\theta}}{\partial z}+\bar{v}_z\frac{\partial\bar{\Sigma}_{\theta\theta}}{\partial z}-$$

$$-2\bar{\sigma}_{\theta r}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial\theta}-2\overline{\Sigma_{\theta r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}}-\frac{2}{r}\bar{\sigma}_{\theta\theta}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{r}\overline{\Sigma_{\theta\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}}-\frac{2}{r}\bar{\sigma}_{\theta\theta}\bar{v}_r-$$

$$-\frac{2}{r}\bar{\sigma}_{\theta\theta}\bar{v}_r-2\bar{\sigma}_{\theta r}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial z}-2\overline{\Sigma_{\theta z}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}}\Big)=2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial\theta}+\frac{\bar{v}_r}{r}\right). \tag{25}$$

Presupunem acum că : singurele componente nenule ale tensorului $\overline{\overline{\sigma}}$ sînt $\bar{\sigma}_{rz}$ şi $\bar{\sigma}_{zz}$; aceste componente depind numai de r ; singura componentă nenulă a vitezei este $\bar{v}_z$: ea depinde de asemenea numai de r ; căderea de presiune medie după axa tubului $\dfrac{\partial\bar{p}}{\partial z}$ este constantă. Atunci, din (17) — — (25) rezultă după neglijarea mediilor termenilor pătratici în fluctuaţie,

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}=0,\quad\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}=0,\quad\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}=\frac{\partial\bar{\sigma}_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\bar{\sigma}_{rz},\ \bar{\sigma}_{rz}=\mu\frac{\mathrm{d}\bar{v}_z}{\mathrm{d}r},$$

$$\bar{\sigma}_{zz}=2\lambda\bar{\sigma}_{rz}\frac{\mathrm{d}\bar{v}_z}{\mathrm{d}r} \tag{26}$$

din care se obţin caracteristicile mişcării medii turbulente Hagen-Poiseuille

$$\bar{v}_z=\frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}z}(r^2-R^2),\ \bar{\sigma}_{rz}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}z}r,\ \bar{\sigma}_{zz}=\frac{\lambda}{2\mu}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}z}r\right)^2. \tag{27}$$

Neglijarea termenilor neliniari în fluctuație, precum și ipotezele restrictive asupra lui $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$ și $\bar{v}$ ne-au situat în cadrul teoriilor naive ale turbulenței în care presupunerea relației de închidere nu este necesară.

II. ECUAȚIILE FLUCTUAȚIILOR PENTRU MIȘCAREA TURBULENTĂ IN TUBURI CIRCULARE A FLUIDELOR DE TIP MAXWELL

Mai sus s-au scris pe componente, în coordonatele cilindrice r, θ și z, ecuațiile (de continuitate (8), de impuls (5) — (7) și constitutive (9) — (14)) care descriu mișcarea turbulentă într-un tub circular de rază R a unui fluid de tip Maxwell, caracterizat de un timp de relaxare λ și de un coeficient de vîscozitate dinamică μ. În ipoteza că mișcarea medie este de tip Hagen-Poiseuille, avînd viteza $\vec{\bar{v}} = (0, 0\ \bar{v}_z(r))$ și tensorul tensiunilor $\overrightarrow{\overrightarrow{\bar{T}}} = -\bar{p}\overrightarrow{\overrightarrow{I}} + \overrightarrow{\overrightarrow{\bar{\Sigma}}}(r)$ în care singurele componente nenule sînt $\bar{\Sigma}_{zz}(r)$ și $\bar{\Sigma}_{rz}(r)$, s-a găsit

$$\bar{v}_z(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{d\bar{p}}{dz}(r^2 - R^2),\ \bar{\Sigma}_{rz}(r) = \frac{r}{2}\frac{d\bar{p}}{dz}, \tag{28}$$

$$\bar{\Sigma}_{zz} = \frac{\lambda}{2\mu}\left(\frac{d\bar{p}}{dz}\right)^2 r^2,$$

unde $\frac{d\bar{p}}{dz}$ este căderea de presiune medie constantă. Pentru simplitatea scrierii notăm $B = \frac{1}{4\mu}\frac{d\bar{p}}{dz}$ astfel că expresiile (28) devin

$$\bar{v}_z(r) = B(r^2 - R^2),\ \bar{\Sigma}_{rz}(r) = 2\mu r B,\ \bar{\Sigma}_{zz}(r) = 8\lambda\mu B^2 r^2. \tag{28'}$$

Bara de deasupra literelor desemnează mișcarea medie; caracteristicile fluctuațiilor vor fi scrise cu litere mari.

Ecuațiile fluctuațiilor se obțin scăzînd ecuațiile mișcării medii (16) — — (25) din ecuațiile mișcării turbulente (5) — (14) și ele au respectiv următoarele forme ecuația de continuitate

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_r}{r} = 0, \tag{29}$$

ecuațiile de impuls

$$\rho\left[\frac{\partial V_r}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + V_r\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + V_r\frac{\varrho V_r}{\partial r} - \overline{V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} + \right.$$

$$+ \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}} - \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}} + \bar{v}_z\frac{\partial V_r}{\partial z} + V_z\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} -$$

$$\left. - \overline{V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}} - 2\frac{\bar{v}_\theta}{r}V_\theta\right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \Sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}\Sigma_{rr} - \Sigma_{\theta\theta}, \tag{30}$$

$$\rho\left[\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+\bar{v}_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+V_r\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}-\overline{V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}}+\right.$$

$$+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}-\overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}}+\bar{v}_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}+V_z\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z}+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}-$$

$$\left.-\overline{V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}}+\frac{\bar{v}_r V_\theta}{r}+\frac{\bar{v}_\theta V_r}{r}+\frac{V_r V_\theta}{r}-\overline{\frac{V_r V_\theta}{r}}\right]=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+$$

$$+\frac{\partial \Sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \Sigma_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2}{r}\Sigma_{r\theta}, \tag{31}$$

$$\rho\left[\frac{\partial V_z}{\partial t}+\bar{v}_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+V_r\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}-\overline{V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta}+\right.$$

$$+\frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}-\overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}}+\bar{v}_z\frac{\partial V_z}{\partial z}+V_z\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}+$$

$$\left.+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}-\overline{V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}}\right]=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial \Sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial \Sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Sigma_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\Sigma_{rz}, \tag{32}$$

$$\Sigma_{rr}+\lambda\left[\frac{\partial \Sigma_{rr}}{\partial t}+\bar{v}_r\frac{\partial \bar{\Sigma}_{rr}}{\partial r}+V_r\frac{\partial \bar{\Sigma}_{rr}}{\partial r}+V_r\frac{\partial \Sigma_{rr}}{\partial r}-\overline{V_r\frac{\partial \Sigma_{rr}}{\partial r}}+\right.$$

$$+\frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\Sigma_{rr}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\bar{\Sigma}_{rr}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\Sigma_{rr}-\overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial \Sigma_{rr}}{\partial \theta}}-\frac{\bar{v}_\theta}{r}\Sigma_{\theta r}-$$

$$-\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{\theta r}+\overline{\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{\theta r}}-\frac{\bar{v}_\theta}{r}\bar{\Sigma}_{r\theta}-\frac{V_\theta}{r}\bar{\Sigma}_{r\theta}-\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{r\theta}+\overline{\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{r\theta}}+$$

$$+\bar{v}_z\frac{\partial}{\partial z}\Sigma_{rr}+V_z\frac{\partial \bar{\Sigma}_{rr}}{\partial z}+V_z\frac{\partial}{\partial z}\Sigma_{rr}-\overline{V_z\frac{\partial \Sigma_{rr}}{\partial z}}-2\bar{\Sigma}_{rr}\frac{\partial V_r}{\partial r}-$$

$$-2\Sigma_{rr}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r}+2\overline{\Sigma_{rr}\frac{\partial V_r}{\partial r}}-2\Sigma_{rr}\frac{\partial V_r}{\partial r}-\frac{2}{r}\bar{\Sigma}_{r\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}-\frac{2}{r}\Sigma_{r\theta}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta}-$$

$$-\frac{2}{r}\Sigma_{r\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+\frac{2}{r}\overline{\Sigma_{r\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}}+2\frac{\bar{\Sigma}_{r\theta}V_\theta}{r}+2\frac{\Sigma_{r\theta}\bar{v}_\theta}{r}+2\frac{\Sigma_{r\theta}V_\theta}{r}+$$

$$\left.+\frac{2}{r}\overline{\Sigma_{r\theta}V_\theta}-2\bar{\Sigma}_{rz}\frac{\partial V_r}{\partial z}-2\Sigma_{rz}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z}-2\Sigma_{rz}\frac{\partial V_r}{\partial z}+2\overline{\Sigma_{rz}\frac{\partial V_r}{\partial z}}\right]=2\mu\frac{\partial V_r}{\partial r}, \tag{33}$$

$$\Sigma_{\theta\theta} + \lambda\left[\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial r} + V_r\frac{\partial\bar{\Sigma}_{\theta\theta}}{\partial r} + V_r\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \overline{V_r\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial r}} +\right.$$

$$+\frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\bar{\Sigma}_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma_{\theta\theta} - \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\Sigma_{r\theta} + \frac{V_\theta}{r}\bar{\Sigma}_{r\theta} +$$

$$+\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{r\theta} - \overline{\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{r\theta}} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\Sigma_{r\theta} + \frac{V_\theta}{r}\bar{\Sigma}_{\theta r} + \frac{V_\theta}{r}\Sigma_{\theta r} - \overline{\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{\theta r}} +$$

$$+\bar{v}_z\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial z} + V_z\frac{\partial\bar{\Sigma}_{\theta\theta}}{\partial z} + V_z\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial z} - \overline{V_z\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial z}} - 2\bar{\Sigma}_{\theta r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} -$$

$$-2\Sigma_{\theta r}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial\theta} - 2\Sigma_{\theta r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} - 2\Sigma_{\theta r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + 2\overline{\Sigma_{\theta r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}} - 2\frac{\bar{\Sigma}_{\theta\theta}}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} -$$

$$-\frac{2}{r}\overline{\Sigma_{\theta\theta}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial\theta}} - \frac{2}{r}\Sigma_{\theta\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{2}{r}\Sigma_{\theta\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} - \frac{2}{r}\bar{\Sigma}_{\theta\theta}V_r - \frac{2}{r}\Sigma_{\theta\theta}\bar{v}_r -$$

$$-\frac{2}{r}\Sigma_{\theta\theta}V_r + \frac{2}{r}\overline{\Sigma_{\theta\theta}V_r} - 2\bar{\Sigma}_{\theta z}\frac{\partial v_\theta}{\partial z} - 2\Sigma_{\theta z}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial z} - 2\Sigma_{\theta z}\frac{\partial V_\theta}{\partial z} +$$

$$\left.+2\overline{\Sigma_{\theta z}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}}\right] = \frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{V_r}{r}\right), \tag{34}$$

$$\Sigma_{zz} + \lambda\left[\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial}{\partial r}\Sigma_{zz} + V_r\frac{\partial\bar{\Sigma}_{zz}}{\partial r} + V_r\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial r} - \overline{V_r\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial r}} +\right.$$

$$+\frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial\theta} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\bar{\Sigma}_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma_{zz} - \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial\theta}} + \bar{v}_z\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial z} +$$

$$+V_z\frac{\partial\bar{\Sigma}_{zz}}{\partial z} + V_z\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial z} - \overline{V_z\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial z}} - 2\bar{\Sigma}_{zr}\frac{\partial V_z}{\partial z} - 2\Sigma_{zr}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial z} -$$

$$-2\Sigma_{zr}\frac{\partial V_z}{\partial z} + \overline{2\Sigma_{zr}\frac{\partial V_z}{\partial z}} - \frac{2}{r}\bar{\Sigma}_{z\theta}\frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{2}{r}\Sigma_{z\theta}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial\theta} - \frac{2}{r}\Sigma_{z\theta}\frac{\partial V_z}{\partial\theta} +$$

$$\left.+\frac{2}{r}\overline{\Sigma_{z\theta}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}} - 2\bar{\Sigma}_{zz}\frac{\partial V_z}{\partial z} - 2\Sigma_{zz}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial z} - 2\Sigma_{zz}\frac{\partial V_z}{\partial z} + 2\overline{\Sigma_{zz}\frac{\partial V_z}{\partial z}}\right] = 2\mu\frac{\partial V_z}{\partial z}, \tag{35}$$

$$\Sigma_{r\theta} + \lambda\Big[\frac{\partial\Sigma_{r\theta}}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial}{\partial r}\Sigma_{r\theta} + V_r\frac{\partial}{\partial r}\bar{\Sigma}_{r\theta} + V_r\frac{\partial}{\partial r}\Sigma_{r\theta} - \overline{V_r\frac{\partial}{\partial r}\Sigma_{r\theta}} +$$

$$+\frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma_{r\theta} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\bar{\Sigma}_{r\theta} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma_{r\theta} - \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Sigma_{r\theta}} - \frac{\bar{v}_\theta}{r}\Sigma_{\theta\theta} -$$

$$-\frac{V_\theta}{r}\bar{\Sigma}_{\theta\theta} - \frac{V_\theta}{r}\Sigma_{\theta\theta} + \overline{\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{\theta\theta}} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\Sigma_{rr} + \frac{V_\theta}{r}\bar{\Sigma}_{rr} + \frac{V_\theta}{r}\Sigma_{rr} -$$

$$-\overline{\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{rr}} + \bar{v}_z\frac{\partial\Sigma_{r\theta}}{\partial z} + V_z\frac{\partial}{\partial z}\bar{\Sigma}_{r\theta} + V_z\frac{\partial}{\partial z}\Sigma_{r\theta} - \overline{V_z\frac{\partial\Sigma_{r\theta}}{\partial z}} -$$

$$-\bar{\Sigma}_{rr}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \Sigma_{rr}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial r} - \Sigma_{rr}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \bar{\Sigma}_{rr}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{\Sigma}_{r\theta}}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} -$$

$$-\frac{\Sigma_{r\theta}}{r}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial\theta} - \frac{\Sigma_{r\theta}}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \overline{\frac{\Sigma_{r\theta}}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}} - \bar{\Sigma}_{rz}\frac{\partial V_\theta}{\partial z} - \Sigma_{rz}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial z} - \Sigma_{rz}\frac{\partial V_\theta}{\partial z} +$$

$$+\overline{\Sigma_{rz}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}} - \bar{\Sigma}_{\theta r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \Sigma_{\theta r}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial r} - \Sigma_{\theta r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \overline{\Sigma_{\theta r}\frac{\partial V_r}{\partial r}} - \frac{\bar{\Sigma}_{\theta\theta}}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} -$$

$$-\frac{\bar{\Sigma}_{\theta\theta}}{r}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial\theta} - \frac{\Sigma_{\theta\theta}}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + \overline{\frac{\Sigma_{\theta\theta}}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}} + \frac{\bar{\Sigma}_{\theta\theta}V_\theta}{r} + \frac{\Sigma_{\theta\theta}\bar{v}_\theta}{r} + \frac{\Sigma_{\theta\theta}V_\theta}{r} -$$

$$-\overline{\frac{\Sigma_{\theta\theta}V_\theta}{r}} - \bar{\Sigma}_{\theta z}\frac{\partial V_r}{\partial z} - \bar{\Sigma}_{\theta z}\frac{\partial V_r}{\partial z} - \Sigma_{\theta z}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial z} - \Sigma_{\theta z}\frac{\partial V_r}{\partial z} + \overline{\Sigma_{\theta z}\frac{\partial V_r}{\partial z}}\Big] =$$

$$= \mu\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} - \frac{V_\theta}{r}\right), \tag{36}$$

$$\Sigma_{rz} + \lambda\Big[\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial r} + V_r\frac{\partial\bar{\Sigma}_{rz}}{\partial r} + V_r\frac{\partial}{\partial r}\Sigma_{rz} - \overline{V_r\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial r}} +$$

$$+\frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial\theta} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\bar{\Sigma}_{rz}}{\partial\theta} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial\theta} - \overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial\theta}} - \frac{\bar{v}_\theta}{r}\Sigma_{\theta z} - \frac{V_\theta}{r}\bar{\Sigma}_{\theta z} -$$

$$-\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{\theta z} + \overline{\frac{V_\theta\Sigma_{\theta z}}{r}} + \bar{v}_z\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial z} + V_z\frac{\partial\bar{\Sigma}_{rz}}{\partial z} + V_z\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial z} - \overline{V_z\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial z}} -$$

$$-\bar{\Sigma}_{rr}\frac{\partial V_z}{\partial r}-\Sigma_{rr}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}-\Sigma_{rr}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\overline{\Sigma_{rr}\frac{\partial V_z}{\partial r}}-\frac{\bar{\Sigma}_{r\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V_z-$$

$$-\frac{\Sigma_{r\theta}}{r}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial\theta}-\frac{\Sigma_{r\theta}}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}+\overline{\frac{\Sigma_{r\theta}}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}}-\bar{\Sigma}_{rz}\frac{\partial V_z}{\partial z}-\Sigma_{rz}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}-\Sigma_{rz}\frac{\partial V_z}{\partial z}+$$

$$+\overline{\Sigma_{rz}\frac{\partial V_z}{\partial z}}-\bar{\Sigma}_{zr}\frac{\partial V_z}{\partial r}-\Sigma_{zr}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r}-\Sigma_{zr}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\overline{\Sigma_{zr}\frac{\partial V_r}{\partial r}}-$$

$$-\frac{\bar{\Sigma}_{z\theta}}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\frac{\Sigma_{z\theta}}{r}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial\theta}-\frac{\Sigma_{z\theta}}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\overline{\frac{\Sigma_{z\theta}}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}}+\frac{\bar{\Sigma}_{z\theta}V_\theta}{r}+\frac{\Sigma_{z\theta}\bar{v}_\theta}{r}+$$

$$+\frac{\Sigma_{z\theta}V_\theta}{r}-\overline{\frac{\Sigma_{z\theta}V_\theta}{r}}-\bar{\Sigma}_{zz}\frac{\partial V_r}{\partial z}-\Sigma_{zz}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z}-\Sigma_{zz}\frac{\partial V_r}{\partial z}+\overline{\Sigma_{zz}\frac{\partial V_r}{\partial z}}\Bigg]=$$

$$=\mu\left(\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{\partial V_r}{\partial z}\right), \tag{37}$$

$$\Sigma_{\theta z}+\lambda\Bigg[\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial t}+\bar{v}_r\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial r}+V_r\frac{\partial\bar{\Sigma}_{\theta z}}{\partial r}+V_r\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial r}-\overline{V_r\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial r}}+$$

$$+\frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\bar{\Sigma}_{\theta z}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial\theta}-\overline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial\theta}}+\frac{\bar{v}_\theta}{r}\Sigma_{rz}+$$

$$+\frac{V_\theta}{r}\bar{\Sigma}_{rz}+\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{rz}-\overline{\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{rz}}+\frac{\bar{v}_\theta}{r}\Sigma_{\theta r}+\frac{V_\theta}{r}\bar{\Sigma}_{\theta r}+\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{\theta r}-$$

$$-\frac{V_\theta}{r}\Sigma_{\theta r}+\bar{v}_z\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial z}+V_z\frac{\partial\bar{\Sigma}_{\theta z}}{\partial z}+V_z\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial z}-\overline{V_z\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial z}}-\bar{\Sigma}_{\theta r}\frac{\partial V_z}{\partial r}-$$

$$-\Sigma_{\theta r}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial r}-\Sigma_{\theta r}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\overline{\Sigma_{\theta r}\frac{\partial V_z}{\partial r}}-\frac{\bar{\Sigma}_{\theta\theta}}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}-\frac{\Sigma_{\theta\theta}}{r}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial\theta}-\frac{\Sigma_{\theta\theta}}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}+$$

$$+\overline{\frac{\Sigma_{\theta\theta}}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}}-\bar{\Sigma}_{\theta z}\frac{\partial V_z}{\partial z}-\Sigma_{\theta z}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial z}-\Sigma_{\theta z}\frac{\partial V_z}{\partial z}+\overline{\Sigma_{\theta z}\frac{\partial V_z}{\partial z}}-\bar{\Sigma}_{zr}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-$$

$$-\Sigma_{zr}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial r}-\Sigma_{zr}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\overline{\Sigma_{zr}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}}-\frac{\bar{\Sigma}_{z\theta}}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}-\frac{\Sigma_{z\theta}}{r}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial\theta}-\frac{\Sigma_{z\theta}}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{\overline{\Sigma_{z\theta}}\,\overline{\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}}}{r}-\frac{\bar{\Sigma}_{z\theta}}{r}V_r-\frac{\Sigma_{z\theta}\bar{v}_r}{r}-\frac{\Sigma_{z\theta}V_r}{r}+\frac{\overline{\Sigma_{z\theta}V_r}}{r}-\bar{\Sigma}_{zz}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}-\Sigma_{zz}\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial z}-$$

$$-\Sigma_{zz}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}+\overline{\Sigma_{zz}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}}\Bigg]=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}+\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right). \tag{38}$$

Neglijînd termenii neliniari în fluctuaţii din ecuaţiile (30) — (38) şi ţinînd seama de (28′), ecuaţiile (30) — (38) devin

$$\rho\left[\frac{\partial V_r}{\partial t}+\bar{v}_z\frac{\partial V_r}{\partial z}\right]=-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial\Sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Sigma_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\partial\Sigma_{zr}}{\partial z}+\frac{1}{r}\Sigma_{rr}-\Sigma_{\theta\theta}, \tag{30′}$$

$$\rho\left[\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+\bar{v}_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right]=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{\partial\Sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\Sigma_{r\theta}+\frac{\partial\Sigma_{z\theta}}{\partial z}, \tag{31′}$$

$$\rho\left[\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial\bar{v}_z}{\mathrm{d}r}+\bar{v}_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right]=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{r}\Sigma_{rz}, \tag{32′}$$

$$\Sigma_{rr}+\lambda\left[\frac{\partial\Sigma_{rr}}{\partial t}+\bar{v}_z\frac{\partial\Sigma_{rr}}{\partial z}-2\bar{\Sigma}_{rz}\frac{\partial V_r}{\partial z}\right]=2\mu\frac{\partial V_r}{\partial r}, \tag{33′}$$

$$\Sigma_{\theta\theta}+\lambda\left[\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial t}+\bar{v}_z\frac{\partial\Sigma_{\theta\theta}}{\partial z}\right]=\frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{V_r}{r}\right), \tag{34′}$$

$$\Sigma_{zz}+\lambda\left[\frac{\partial\Sigma_{zz}}{\partial t}+V_r\frac{\mathrm{d}\bar{\Sigma}_{zz}}{\mathrm{d}r}+\bar{v}_z\frac{\mathrm{d}\Sigma_{zz}}{\partial z}-2\bar{\Sigma}_{zr}\frac{\partial V_z}{\partial z}-2\bar{\Sigma}_{zz}\frac{\partial V_z}{\partial z}\right]=2\mu\frac{\partial V_z}{\partial z}, \tag{35′}$$

$$\Sigma_{r\theta}+\lambda\left[\frac{\partial\Sigma_{r\theta}}{\partial t}+\bar{v}_z\frac{\partial\Sigma_{r\theta}}{\partial z}-\bar{\Sigma}_{rz}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right]=\mu\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}-\frac{V_\theta}{r}\right), \tag{36′}$$

$$\Sigma_{rz}+\lambda\left[\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial t}+V_r\frac{\partial\bar{\Sigma}_{rz}}{\mathrm{d}r}+\bar{v}_z\frac{\partial\Sigma_{rz}}{\partial z}-\Sigma_{rr}\frac{\mathrm{d}\bar{v}_z}{\mathrm{d}r}-\bar{\Sigma}_{rz}\frac{\partial V_z}{\partial z}-\right.$$

$$\left.-\bar{\Sigma}_{rz}\frac{\partial V_r}{\partial r}-\bar{\Sigma}_{zz}\frac{\partial V_r}{\partial z}\right]=\mu\left(\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{\partial V_r}{\partial z}\right), \tag{37′}$$

$$\Sigma_{\theta z}+\lambda\left[\frac{\partial\Sigma_{\theta z}}{\partial t}+\frac{V_\theta}{r}\bar{\Sigma}_{rz}+\bar{v}_z\frac{\partial\Sigma_{\theta r}}{\partial z}-\Sigma_{\theta r}\frac{\mathrm{d}\bar{v}_z}{\mathrm{d}r}-\bar{\Sigma}_{zr}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\bar{\Sigma}_{zz}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right]=$$

$$=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}+\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right). \tag{38′}$$

Să particularizăm și mai mult fluctuațiile și anume să presupunem că ele sînt sub formă de moduri normale axial simetrice: $V_r(t, r, \theta, z) = \mathrm{Re}[V_r(r)T]$, $V_\theta(t, r, \theta, z) = \mathrm{Re}[V_z(r)T]$, $V_z(t, r, \theta, z) = \mathrm{Re}[V_z(r)T]$, $P(t, r, \theta, z) = \mathrm{Re}[P(r)\,T]$, unde $T = \sqrt{2}\ \exp[\{i\alpha z - i\alpha ct\}$ și să notăm $\chi = 1 + i\alpha\lambda[B(r^2 - R^2) - c]$. În acest caz ecuațiile (29′) și (30′) — (38′) în care se ține seama de (28′) devin

$$V_r' + i\alpha V_z + V_r/r = 0, \tag{29''}$$

$$\rho\frac{(\chi-1)}{\lambda}V_r = -P' + \Sigma_{rr}' + i\alpha\Sigma_{zr} + \Sigma_{rr}/r - \Sigma_{\theta\theta}, \tag{30''}$$

$$\rho\frac{(\chi-1)}{\lambda}V_\theta = \Sigma_{r\theta}' + i\alpha\Sigma_{z\theta} + 2\Sigma_{r\theta}/r, \tag{31''}$$

$$\rho\left[\frac{\chi-1}{\lambda}V_z + 2BrV_z\right] = -i\alpha P + \Sigma_{rz}' + i\alpha\Sigma_{zz} + \Sigma_{rz}/r, \tag{32''}$$

$$\Sigma_{rr}\chi - 4\lambda i\alpha\mu BrV_r = 2\mu V_r', \tag{33'}$$

$$\Sigma_{\theta\theta}\chi = 2\mu V_z/r^2, \tag{34''}$$

$$\Sigma_{zz}\chi + 16\lambda^2\mu B^2rV_r - 4\mu B\lambda i\alpha rV_z - 16\lambda^2\mu B^2i\alpha r^2V_z = 2i\alpha\mu V_z, \tag{35''}$$

$$\Sigma_{r\theta}\chi - 2\mu\lambda i\alpha BrV_\theta = \mu V_\theta' - \mu V_\theta/r, \tag{36''}$$

$$\Sigma_{rz}\chi + 2\mu\lambda BV_r - 2B\lambda r\Sigma_{rr} - 2\mu Bi\alpha\lambda rV_z - 2\mu B\lambda rV_r' - 8\lambda^2\mu B^2i\alpha r^2V_r = \mu V_z' + i\alpha\mu V_r, \tag{37''}$$

$$\Sigma_{\theta z}\chi + 2\mu\lambda BV_\theta - 2\lambda Br\Sigma_{\theta r} - 2\mu\lambda BrV_\theta' - 8\lambda^2\mu B^2i\alpha r^2V_\theta = \mu i\alpha V_\theta, \tag{38''}$$

unde $' \equiv d/dr$. Din (6″) — (11″) se găsește imediat

$$\Sigma_{rr} = (2\mu V_r' + 4i\alpha\lambda\mu BrV_r)/\chi, \tag{39}$$

$$\Sigma_{\theta\theta} = 2\mu V_r/(r^2\chi), \tag{40}$$

$$\Sigma_{zz} = [V_z(2i\alpha\mu + 4i\alpha\mu\lambda Br + 16i\alpha\mu\lambda^2B^2r^2) - 16\mu\lambda^2B^2rV_r]/\chi. \tag{41}$$

$$\Sigma_{r\theta} = [\mu V_\theta' + V_\theta(2i\alpha\mu\lambda Br - \mu/r)]/\chi, \tag{42}$$

$$\Sigma_{rz} = \{\mu V_z' + V_r[i\alpha\mu - 2\mu\lambda B + 8i\alpha\mu\lambda^2B^2r^2(1 + \chi^{-1})] + V_r'2\mu\lambda Br(1 + 2\chi^{-1}) + V_z 2i\alpha\mu\lambda Br\}/\chi. \tag{43}$$

$$\Sigma_{\theta z} = \{V_\theta[i\alpha\mu + 4i\alpha\mu\lambda^2B^2r^2(2 + \chi^{-1}) - 2\mu\lambda B(1 + \chi^{-1})] + V_\theta' 2\mu\lambda Br(1 + \chi^{-1})\}/\chi. \tag{44}$$

Din (29'') avem $V_z = -(V_r/r + V_r')\,(i\alpha)^{-1}$. Ţinînd seama de această expresie în (41) şi (42) găsim

$$\Sigma_{zz} = [V_r'(-2\mu - 4\mu\lambda Br - 16\mu\lambda^2 B^2 r^2) + V_r(-2\mu/r - 4\mu\lambda B - \\ - 32\mu\lambda^2 B^2 r)]/\chi, \tag{41'}$$

$$\Sigma_{rz} = \{ - V_r''\mu/(i\alpha) + V_r'[-\mu/(ri\alpha) + 4\mu\lambda Br/\chi] + \\ + V_r[i\alpha\mu - 4\mu\lambda B + \mu/(i\alpha r^2) + 8i\alpha\mu\lambda^2 B^2 r^2(1 + 1/\chi)]\}/\chi. \tag{43'}$$

Pentru eliminarea presiunii între (30'') şi (32'') înmulţim (30'') cu $-i\alpha$ şi adunăm ecuaţia obţinută cu ecuaţia (32'') derivată (în raport cu r). Obţinem ecuaţia

$$\rho\frac{(1-\chi)}{i\alpha\lambda}[V_r'' + V_r'/r - (\alpha^2 + r^{-2})V_r] = \\ = -i\alpha\Sigma_{rr}' + (\alpha^2 r^2 - 1)r^{-2}\Sigma_{zr} - i\alpha\Sigma_{rr}r^{-1} + i\alpha\Sigma_{\theta\theta} + \Sigma_{rz}'' + i\alpha\Sigma_{zz}' + \\ + \Sigma_{rz}'r^{-1}, \tag{45}$$

care se mai scrie sub forma

$$[c + B(R^2 - r^2)][V_r'' + V_r'/r - (\alpha^2 + r^{-2})\,V_r] = \frac{\nu}{i\alpha\chi}\left\{-V_r^{IV} - V_r'''\left[\frac{2}{r} - \right.\right. \\ \left. - \frac{8\lambda Bri\alpha}{\chi}\right] + V_r''\left[2\alpha^2 + 4\alpha^2\lambda Br + \frac{20i\alpha\lambda B}{\chi} + \frac{3}{r^2} - \right. \\ \left. - 4i\alpha\lambda B + 8\alpha^2\lambda^2 B^2 r^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}\right)\right] + V_r'\left[\frac{2\alpha^2}{r} + 4i\alpha^3\lambda Br + \right. \\ + 8\alpha^2\lambda B - \frac{8i\alpha^3\lambda^2 B^2 r^2}{\chi} - \frac{4i\alpha\lambda B}{r\chi} - \frac{4i\alpha\lambda B}{r} - \frac{3}{r^3} + 8\alpha^2\lambda^2 B^2 r\left(3 - \frac{7}{x} + \right. \\ \left. + \frac{9}{x^2}\right) + 32\,i\alpha^3\lambda^3 B^3 r^3\left(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)\Big] + V_r\left[4i\alpha^3\lambda B - \frac{8i\alpha^3\lambda^2 B^2 r}{x} - \right. \\ \left. - \alpha^4 - \frac{2\alpha^2}{r^2} - 8\alpha^4\lambda^2 B^2 r^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{4i\alpha\lambda B}{r^2} + \frac{3}{r^4} + \frac{4i\alpha\lambda B}{r^2 x} - \right. \\ \left. - 8\alpha^2\lambda^2 B^2\left(-1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + 16i\alpha^3\lambda^3 B^3 r^2\left(\frac{2}{x} + \frac{14}{x^2}\right) + \right. \\ \left.\left. + 64\alpha^4\lambda^4 B^4 r^4\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)\right]\right\} \tag{45'}$$

și reprezintă ecuația Orr-Sommerfeld generalizată la cazul fluidelor de tip Maxwell. Această ecuație devine cea clasică pentru fluide vîscoase incompresibile cînd $\lambda = 0$ și $\chi = 1$ și anume

$$[c - B(r^2 - R^2)]\left[V_r'' + V_r'/r - \left(\alpha^2 + \frac{1}{r^2}\right)V_r\right] = \frac{\nu}{i\alpha}\left\{-V_r^{iv} - \right.$$

$$- \frac{2}{r}V_r''' + V_r''\left(2\alpha^2 + \frac{3}{r^2}\right) + V_r'\left(\frac{2\alpha^2}{r} - \frac{3}{r^3}\right) +$$

$$\left. + V_r\left(-\alpha^4 - \frac{2\alpha^2}{r^2} + \frac{3}{r^4}\right)\right\} \tag{46}$$

care, de obicei [8], se găsește sub forma

$$(U - c)\left(\varphi'' - \frac{1}{r}\varphi' - \alpha^2\varphi\right) = \frac{y}{i\alpha}\left[\varphi^{iv} - \frac{2\varphi'''}{r} + \varphi''\left(\frac{3}{r^2} - 2\alpha^2\right) + \right.$$

$$\left. + \varphi'\left(-\frac{3}{r^3} + \frac{2\alpha^2}{r}\right) + \varphi\alpha^4\right] \tag{46'}$$

sau, echivalent, sub forma

$$(U - c)(\ (L - \alpha^2)\varphi = \nu(i\alpha)^{-1}(L - \alpha^2)^2\ \varphi \tag{46''}$$

unde $\psi(t, r, z) = \varphi(r)\ \exp\{i\alpha(z - ct)\}$ reprezintă funcția de curent a perturbației (legată de viteza de perturbații prin relațiile $V_z = \varphi'/r$, $V_r = -\varphi i\alpha/r$), $L \dfrac{d}{dr^2} - \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}$, iar $U = \bar{v}_z$ este profilul vitezei de bază.

Asemănarea cu cazul laminar este datorată presupunerilor noastre (asupra independnței necunoscutelor de anumite variabile independente) care au făcut superfluă vreun model de turbulență.

Primit în redacție la 3 aprilie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. M. A. GOLDSHTIK, V. V., ZAMETALIN, V. N. SHTERN, *Simplified theory of the near wall turbulent layer of Newtonian and drag-reducing fluids*, Journal of Fluid Mech., **119** (1982).
2. J. L. LUMLEY, *Applicability of the Oldroyd constitutive equation to flow of dilute polymer solutions*, Physics Fluids, **14** (1971).
3. Y. C. M. KHABAKHPASHEVA, B. V. PEREPELITZA, *Peculiarities of nearwall turbulence in water flows with high molecular additives*, Journal Engng. Phys., **18** (1970).
4. M. LECA, A. LECA, *Aditivarea lichidelor, soluție modernă de economisire a energiei*, Edit. tehnică, București, 1982.
5. E. SOÓS, C. TEODOSIU, *Calculul tensorial cu aplicații în mecanica solidelor*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1983.
6. M. J. RUDD, *Velocity measurements made with a laser depplemeter on the turbulent pipe flow of dilute polymer solutions*, Journal of Fluid Mechanics, **51** (1972).
7. ADELINA GEORGESCU, *Hydrodynamic stability theory*, Kluwer, Dordrecht, 1985.
8. P. G. DRAZIN, W. H. REID, *Hydraulic stability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

STUDIU AERODINAMIC ANALITIC AL ELICEI EOLIENE CU AX ORIZONTAL

de S. GĂLETUȘE

Institutul Politehnic București

Deoarece, pentru elicea eoliană cu număr finit de pale, nu se pot obține formule analitice de calcul al randamentului, rezistenței opusă vîntului etc. se prezintă o cale aproximativă utilizînd caracteristicile unei elici echivalente cu număr infinit de pale. Pentru aceasta din urmă se poate determina analitic randamentul indus necesar pentru randament global maxim și stabilind deasemeni o relație analitică pentru un coeficient de corecție se poate trece la elicea reală cu număr finit de pale.

În cîteva lucrări anterioare [1] — [3] s-au utilizat formule proprii (corectate față de formulele Glauert) pentru vitezele induse $\bar{v}$, $\bar{\omega}$ ale elicei eoliene cu număr finit de pale

$$\frac{\bar{v}}{1-\bar{v}} = \frac{\sigma C_z \sin(\beta+\alpha_i)}{4\varkappa \cos^2(\beta+\alpha_i)}, \quad \frac{\bar{\omega}}{1+\bar{\omega}} = \frac{\sigma C_z}{4\varkappa \sin(\beta+\alpha_i)}, \tag{1}$$

(s-a demonstrat că sînt corecte și cînd se ține seama de frecare) unde $\varkappa$ este coeficientul de corecție al lui Prandtl [4]

$$\varkappa = \frac{2}{\pi} \arccos e^{-\frac{N}{2}\frac{1-\bar{r}}{\cos(\beta_1+\alpha_{i_1})}}, \tag{2}$$

în care

$$\sigma = \frac{Nc}{2\pi r}, \quad \bar{v} = \frac{\bar{v}}{V},$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R}, \tag{3}$$

iar R—raza elicei, V — viteza vîntului, Ω — viteza unghiulară, N — numărul de pale, C_z — coeficientul de portanță c — coarda profilului, β_1 și α_{i1} unghiurile β și respectiv α_i (figura 1) pentru $\bar{r}=1$.

Utilizînd prima relație (1) se deduce pentru portanța elementară dP formula

$$\mathrm{d}P = \frac{4\pi\rho\varkappa(V-v)vr\,\mathrm{d}r}{\sin(\beta+\alpha_i)}, \tag{4}$$

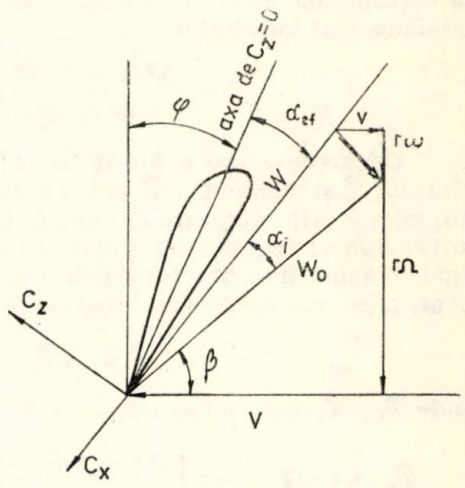


Fig. 1

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 5—6, 1991, P. 323—328

unde ρ este densitatea aerului iar dacă se ţine seama şi de relaţia geometrică

$$\operatorname{tg}(\beta + \alpha_i) = \frac{v}{r\omega}, \tag{5}$$

se obţin formulele pentru rezistenţa opusă vîntului $\bar{T}$ şi momentul $\bar{M}$ sub formă adimensională

$$\bar{T} = 8\left[\int_0^1 \varkappa(1-\bar{v})\bar{v}\bar{r}\,\mathrm{d}\bar{r} + \Lambda\mu_m\int_0^1 \varkappa(1-\bar{v})\bar{r}\bar{\omega}\bar{r}\,\mathrm{d}\bar{r}\right],$$

$$\bar{M} = 8\left[\Lambda\int_0^1 \varkappa(1-\bar{v})\bar{r}\bar{\omega}\bar{r}^2\,\mathrm{d}\bar{r} - \mu_m\int_0^1 \varkappa(1-\bar{v})\bar{v}\bar{r}^2\,\mathrm{d}\bar{r}\right], \tag{6}$$

unde

$$\bar{T} = \frac{T}{\frac{\rho}{2}V^2\pi R^2}, \quad \bar{M} = \frac{M}{\frac{\rho}{2}V^2\pi R^3}, \quad \Lambda = \frac{R\Omega}{V}, \tag{7}$$

iar μ_m este raportul C_x/C_z la fineţea maximă a profilului utilizat (C_x — coeficient de rezistenţă).

În lucrarea [1] s-a arătat că pentru a obţine randament maxim pentru elicea eoliană (considerînd şi frecarea) condiţia rămîne aceeaşi cu cea de la elicea ideală (fără frecare), adică randamentul indus η_i să fie constant în lungul razei. În ceea ce priveşte incidenţa efectivă, aceasta trebuie să corespundă peste tot finetei maxime. Atunci, vitezele $\bar{v}$, $\bar{\omega}$ funcţie de randamentul indus sînt

$$\bar{v} = \frac{\Lambda^2(1-\eta_i)\bar{r}^2}{\Lambda^2\bar{r}^2 + \eta_i^2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\eta_i(1-\eta_i)}{\Lambda^2\bar{r}^2 + \eta_i^2}. \tag{8}$$

Deoarece $\varkappa$ are o formă destul de complicată (2), rezistenţa opusă vîntului $\bar{T}$ şi momentul $\bar{M}$ pot fi calculate, după înlocuirea relaţiilor (8) în (6), numai prin integrare numerică. Pentru a putea efectua un calcul rapid în vederea proiectării aerodinamice a elicei eoliene se propune o cale aproximativă folosind caracteristicile elicei echivalente cu număr infinit de pale. Atunci, se vor considera integralele (6) sub forma

$$\bar{T} = K\bar{T}_e, \quad \bar{M} = K\bar{M}_e, \tag{9}$$

unde $\bar{T}_e$, $\bar{M}_e$ corespund elicei cu $N = \infty$ ($\varkappa = 1$)

$$\bar{T}_e = 4\eta_i(1-\eta_i)\left\{\frac{\Lambda^2 + 2\eta_i^2 - \eta_i}{\Lambda^2 + \eta_i^2} + \frac{\eta_i(1-2\eta_i)}{\Lambda^2}\ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\eta_i^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \mu_m\Lambda\left[\frac{3\eta_i - 1}{\Lambda^2} + \frac{1-\eta_i}{\Lambda^2 + \eta_i^2} + \frac{\eta_i(1-3\eta_i)}{\Lambda^3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\eta_i}\right]\right\} \tag{10}$$

și

$$\bar{M}_e = 4\eta_i(1-\eta_i)\left\{\frac{\eta_i}{\Lambda}\left[\frac{\Lambda^2+2\eta_i^2-\eta_i}{\Lambda^2+\eta_i^2}+\frac{\eta_i(1-2\eta_i)}{\Lambda^2}\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\eta_i^2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\mu_m\left[\frac{2\Lambda^2+5\eta_i^2-3\eta_i}{3(\Lambda^2+\eta_i^2)}+\frac{\eta_i(3-5\eta_i)}{\Lambda^2}+\frac{\eta_i^2(5\eta_i-3)}{\Lambda^3}\operatorname{arctg}\frac{\Lambda}{\eta_i}\right]\right\}, \quad (11)$$

iar randamentul elicei eoliene fictive este

$$\eta_e = \bar{M}_e\Lambda = \frac{P_e}{\frac{\rho}{2}V^3\pi R^2}, \quad (12)$$

unde P_e — puterea elicei.

Pentru a putea propune o relație analitică pentru coeficientul K s-au dedus valorile acestuia prin calcul numeric al integralelor (6) și s-a constatat că acesta nu diferă mult pentru $\bar{T}$ și $\bar{M}$ și se poate considera o valoare unică. Același lucru s-a obținut și pentru elicea tractivă [5] și s-a propus atunci relația

$$K = \int_0^1\left(1-\frac{3\bar{r}}{N\cos(\beta_1+\alpha_{i1})}\right)\varkappa\,d\bar{r}. \quad (13)$$

Această relație a fost integrată analitic și s-a obținut [5]

$$K = 1-\frac{0{,}75}{A}+\frac{2}{\pi A}\left(1-\frac{1}{e^A}\right)\left(1-\frac{1{,}5}{A}+\frac{1{,}5}{A^2}\right), \quad (14)$$

unde A este acum

$$A = \frac{N}{2\cos(\beta_1+\alpha_{i1})} = \frac{N}{2}\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{\eta_i^2}} \quad (15)$$

În consecință, modul de proiectare a elicei eoliene cu număr finit de pale este :

— Să presupunem că se solicită proiectarea unei elice care să dea o putere P_1 la viteza vîntului V și viteza unghiulară Ω cu un număr de pale N. Eventual, puterea P_1 se corectează ținînd seama de existența butucului (pînă la raza r_b),

$$P = \frac{P_1}{1-r_b^2}; \quad (16)$$

— Se va considera apriori o rază R și cu aceasta se va putea calcula Λ, $\bar{M}$, η;

— Pentru momente absolute egale M se calculează momentul adimensional $\bar{M}_e$ şi randamentul η_e al elicei echivalente

$$\bar{M}_e = \frac{\bar{M}}{K}, \quad \eta_e = \frac{\eta}{K}, \tag{17}$$

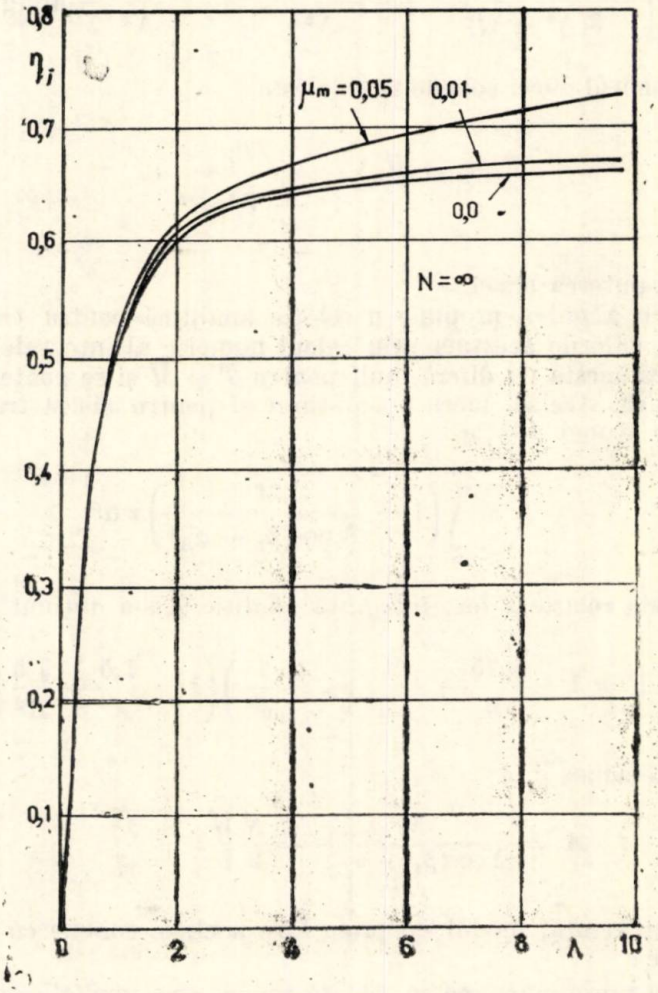


Fig. 2

unde K se calculează cu formula (14) folosind η_i obţinut din diagrama din figura 2 sau din relaţia obţinută din condiţia de optim al randamentului global [1]

$$\eta_i\left[(2-3\eta_i)+\frac{\eta_i(1-\eta_i)(5\eta_i-3)}{\Lambda^2+\eta_i^2}+\frac{2\eta_i^3(1-\eta_i)^2}{(\Lambda^2+\eta_i^2)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\eta_i(10\eta_i^2-12\eta_i+3)}{\Lambda^2}\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\eta_i^2}\right)\right]- \tag{18}$$

$$-\mu_m\Lambda\left[\frac{2(1-2\eta_i)}{3}-\frac{\eta_i^3(1-\eta_i)(5\eta_i-3)}{\Lambda^2(\Lambda^2+\eta_i^2)}+\frac{2\eta_i^3(1-\eta_i)^2}{(\Lambda^2+\eta_i^2)^2}+\right.$$

$$+\frac{2\eta_i(1-\eta_i)(2\eta_i-1)}{\Lambda^2+\eta_i^2}+\frac{2\eta_i(10\eta_i^2-12\eta_i+3)}{\Lambda^2}-$$

$$\left.-\frac{\eta_i^2(25\eta_i^2\,32\eta_i+9)}{\Lambda^3}\operatorname{arctg}\frac{\Lambda}{\eta_i}\right]=0;$$

— Raza elicei echivalente şi viteza V_e pentru care avem acelaşi pas Λ sînt

$$R_e=R\sqrt[3]{K},\quad V_e=V\frac{R_e}{R};\tag{19}$$

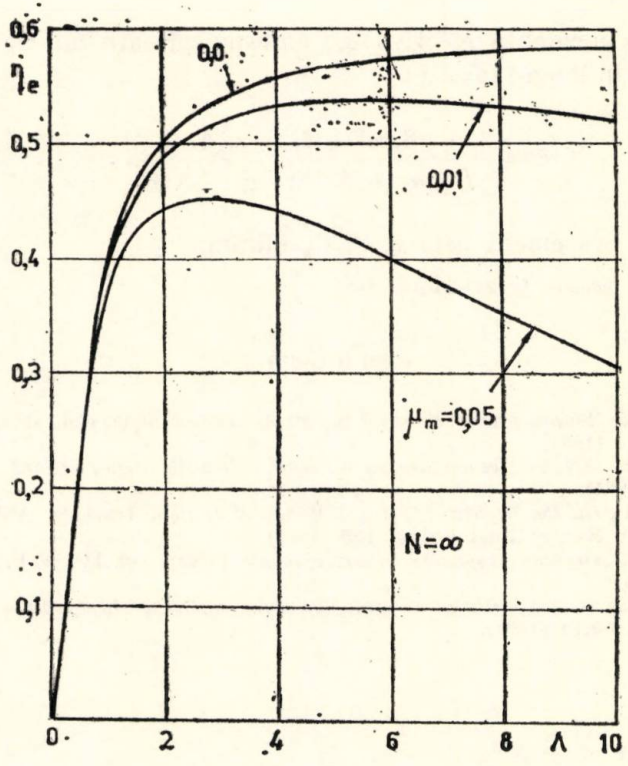


Fig. 3

— În condiţiile Λ şi η_i aceleaşi geometria unghiurilor pentru ambele elici este identică pentru $\bar{r}\in[0,1]$. Cu η_i calculat sau dedus din figura 2 se poate determina η_e din (11) ţinînd seamă de (12). În figura 3 se prezintă şi η_e optim pentru diferite valori Λ şi μ_m;

— Deoarece condiţia (18) este condiţie de optim pentru elicea echivalentă şi nu pentru elicea reală, se va reface calculul pentru încă cîteva valori η_i mai mici decît valoarea iniţială (K creşte cu scăderea lui η_i) pînă se găseşte $\eta = K\eta_e$ maxim;

— De regulă, valoarea η astfel calculată va diferi de cea obţinută iniţial prin presupunerea lui R cunoscut. În continuare se va relua calculul pentru altă rază R pînă cînd diferenţa între η iniţial şi final va fi cît mai mică (o precizie impusă);

— Pentru calculul de rezistenţă al lagărului axial, al stîlpului de susţinere este necesar a se obţine rezistenţa opusă vîntului de discul elicei. Astfel, cu η_i final se poate determina $\bar{T}_e$ din relaţia (10), şi respectiv $\bar{T}$ din (9).

Avînd datele finale R, Λ, η_i se poate calcula răsucirea palei faţă de planul de rotaţie [1]

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha_{\mu_m} - \operatorname{arctg} \frac{\Lambda \bar{r}}{\eta_i}, \tag{20}$$

unde α_{μ_m} este incidenţa efectivă α_{ef} corespunzătoare lui C_x/C_z minim şi variaţia corzii în lungul razei [1]

$$\bar{c} = \frac{8\pi x \bar{r}^2 \eta_i (1 - \eta_i)\Lambda}{NC_z(\eta_i + \Lambda^2 \bar{r}^2)\sqrt{\eta_i^2 + \Lambda^2 \bar{r}^2}}, \tag{21}$$

unde C_z este deasemeni pentru C_x/C_z minim.

Primit în redacţie la 26 aprilie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. S. GĂLETUŞE, *Asupra proiectării elicei eoliene de randament maxim*, St. cerc. mec. apl., **40**, *4* (1981).
2. S. GĂLETUŞE, *Efectul frecării asupra vitezelor induse la o elice eoliană*, Buletin I.P.B., 4 (1981).
3. S. GĂLETUŞE, *On the Highest Efficiency Windmill Design*, Trans. of ASME, Journal of Solar Energy Engineering, 108 (1986).
4. H. GLAUERT, *Airplane Propellers*, în *Aerodynamic Theory*, vol. IV, W. F. Durand, Berlin, 1935.
5. S. GĂLETUŞE, *Metodă analitică de proiectare aerodinamică a elicei tractive*, St. cerc. mec. apl., **50**, *1* (1991).

ANALIZA CINEMATICĂ A UNUI ROBOT BIPED : PROBLEMA DIRECTĂ

de V. HANDRA-LUCA şi M. C. BRIŞAN

Institutul Politehnic Cluj-Napoca

Pornind de la lanţul cinematic al unui robot biped care aproximează structura aparatului locomotor uman, se face analiza cinematică a acestui robot.

1. INTRODUCERE

Cercetările făcute în domeniul proiectării roboţilor păşitori au în vedere aplicarea principiului convergenţei de forme, care oferă posibilitatea alegerii celor mai potrivite modele rezultate din evoluţia filogenetică a vieţuitoarelor.

În lucrarea [1] este prezentată o schemă cinematică pentru aparatul locomotor al unui robot păşitor biped (fig. 1).

În continuare se face determinarea poziţiilor, vitezelor şi acceleraţiilor pentru robotul păşitor a cărui schemă cinematică este reprezentată în figura 1.

2. DETERMINAREA POZIŢIILOR

Se consideră schema cinematică (fig. 2) a unui robot păşitor. Elementul „i" are faţă de elementul „$i-1$" o mişcare de rotaţie. Vom nota coordonata generalizată corespunzătoare acestei mişcări cu q_i (care este un unghi) $i = \overline{1,13}$.

Se fac deasemenea următoarele notaţii :

a) $\cos q_i = c_i$, $\sin q_i = s_i$,

b) $|O_iO_{i-1}| = a_i$.

Pentru determinarea poziţiilor se va utiliza metoda matricială [2]. Presupunînd că se cunoaşte poziţia unui punct P în triedul (T_{i+1}) şi poziţia originii O_{i+1} a acestui triedru în raport cu triedrul următor (T_i), precum şi matricea de trecere de la triedrul (T_{i+1}) la triedrul (T_i)

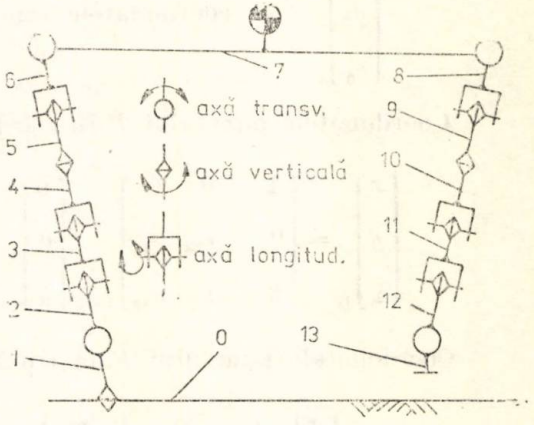


Fig. 1

rezultă relaţia de recurenţă :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{i,i+1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i+1} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_{i+1} \tag{1}$$

unde :

$$a_{11} = \cos(\widehat{Ox_i, Ox_{i+1}}) ; \quad a_{12} = \cos(\widehat{Ox_i, Oy_{i+1}}) ; \quad a_{13} = \cos(\widehat{Ox_i, Oz_{i+1}})$$

$$a_{21} = \cos(\widehat{Oy_i, Ox_{i+1}}) ; \quad a_{22} = \cos(\widehat{Oy_i, Oy_{i+1}}) ; \quad a_{23} = \cos(\widehat{Oy_i, Oz_{i+1}}) \tag{2}$$

$$a_{31} = \cos(\widehat{Oz_i, Ox_{i+1}}) ; \quad a_{32} = \cos(\widehat{Oz_i, Oy_{i+1}}) ; \quad a_{33} = \cos(\widehat{Oz_i, Oz_{i+1}})$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ — coordonatele punctului P în triedrul (T_i),

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i+1}$ — coordonatele punctului P în triedrul (T_{i+1})

$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_{i+1}$ — coordonatele originii O_{i+1} în triedrul (T_i)

Coordonatele punctului P în triedrul T_{12} sînt :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{13} & s_{13} \\ 0 & -s_{13} & c_{13} \end{bmatrix}_{12,13} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}_{P,13} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ hs_{13} \\ hc_{13} - a_{12} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Coordonatele punctului P în triedrul T_{11} sînt :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{11} \begin{bmatrix} c_{12} & 0 & s_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{12} & 0 & c_{12} \end{bmatrix}_{11,12} \begin{bmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_{11} \end{bmatrix},$$

adică

$$\begin{cases} x_{11} = c_{12}x_{12} + s_{12}z_{12} = s_{12}(hc_{13} - a_{12}), \\ y_{11} = y_{12}, \\ z_{11} = -s_{12}x_{12} + c_{12}z_{12} - a_{11} = c_{12}(hc_{13} - a_{12}) - a_{11}. \end{cases} \tag{4}$$

Coordonatele punctului P în triedrul T_{10} sînt:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{10} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & -s_{11} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{11} & 0 & c_{11} \end{bmatrix}_{10,11} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_{10} \end{bmatrix} \quad \text{sau}$$

$$\begin{cases} x_{10} = c_{11}x_{11} - s_{11}z_{11}, \\ y_{10} = y_{11}, \\ z_{10} = s_{11}x_{11} + c_{11}z_{11} - a_{10}. \end{cases} \tag{5}$$

Coordonatele punctului P în triedrul T_9 sînt:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_9 = \begin{bmatrix} c_{10} & s_{10} & 0 \\ -s_{10} & c_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{9,10} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{sau}$$

$$\begin{cases} x_9 = c_{10}x_{10} + s_{10}y_{10} + a_9, \\ y_9 = -x_{10}s_{10} + y_{10}c_{10}, \\ z_9 = z_{10}. \end{cases} \tag{6}$$

Coordonatele punctului P în triedrul T_8 sînt:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_8 \begin{bmatrix} c_9 & 0 & s_9 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_9 & 0 & c_9 \end{bmatrix}_{8,9} \cdot \begin{bmatrix} x_9 \\ y_9 \\ z_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_8 \end{bmatrix} \quad \text{sau}$$

$$\begin{cases} x_8 = x_9c_9 + z_9s_9, \\ y_8 = y_9 \\ z_8 = -x_9s_9 + z_9c_9 - a_8. \end{cases} \tag{7}$$

Coordonatele punctului P în triedrul T_7 sînt:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_8 & s_8 \\ 0 & -s_8 & c_8 \end{bmatrix}_{7,8} \begin{bmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x_7 = x_8 \\ y_7 = y_8c_8 + z_8s_8 + a_7 \\ z_7 = -y_8s_8 + c_8z_8 \end{cases} \tag{8}$$

Coordonatele punctului P în triedrul T_6 sînt :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_7 & -s_7 \\ 0 & s_7 & c_7 \end{bmatrix}_{6,7} \begin{bmatrix} x_7 \\ y_7 \\ z_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x_6 = x_7 \\ y_6 = y_7 c_7 - s_7 z_7 \\ z_6 = y_7 s_7 + z_7 c_7 + a_6 \end{cases} \tag{9}$$

Coordonatele punctului P în triedrul T_5 sînt :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_5 = \begin{bmatrix} c_6 & 0 & s_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & 0 & c_6 \end{bmatrix}_{5,6} \begin{bmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x_5 = x_6 c_6 + z_6 s_6 + a_5 \\ y_5 = y_6 \\ z_5 = -x_6 s_6 + z_6 c_6 \end{cases} \tag{10}$$

Coordonatele punctului P în triedrul T_4 sînt :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_4 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4,5} \begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x_4 = x_5 c_5 - y_5 s_5 \\ y_4 = x_5 s_5 + y_5 c_5 \\ z_4 = z_5 + a_4 \end{cases} \tag{11}$$

Coordonatele punctului P în triedrul T_3 sînt :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 \end{bmatrix}_{3,4} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x_3 = x_4 c_4 - z_4 s_4 \\ y_3 = y_4 \\ z_3 = x_4 s_4 + c_4 z_4 + a_3 \end{cases} \tag{12}$$

Coordonatele punctului P în triedrul T_2 sînt :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 \end{bmatrix}_{2,3} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x_2 = x_3 c_3 + z_3 s_3 \\ y_2 = y_3 \\ z_2 = -x_3 s_3 + z_3 c_3 + a_2 \end{cases} \tag{13}$$

Coordonatele punctului P în triedrul T_1 sînt :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{bmatrix}_{1,2} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = -z_2 s_2 + y_2 c_2 \\ z_1 = y_2 s_2 + z_2 c_2 + a_1 \end{cases} \tag{14}$$

Coordonatele punctului P în triedrul T_0 sînt:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{0,1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x_0 = c_1 x_1 - y_1 s_1 \\ y_0 = x_1 s_1 + y_1 c_1 \\ z_0 = z_1 \end{cases} \tag{15}$$

3. DETERMINAREA VITEZELOR

Pentru determinarea vitezelor se va folosi metoda matricială [2]. Astfel avem relaţia:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{i-0} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{i,i-1} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & -y & 1 & 0 & 0 \\ -z & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ y & -x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i,i-1} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{i-1,0} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{i,i-1} \cdot \tag{16}$$

unde x, y, z sînt coordonatele originii O_i a triedrului (T_i) în raport cu triedrul (T_{i-1}) şi:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(\widehat{Ox_i, Ox_{i-1}}); \quad a_{12} = \cos(\widehat{Ox_i, Oy_{i-1}}), \quad a_{13} = \cos(\widehat{Ox_i, Oz_{i-1}}) \\ a_{21} &= \cos(\widehat{Oy_i, Ox_{i-1}}); \quad a_{22} = \cos(\widehat{Oy_i, Oy_{i-1}}); \quad a_{23} = \cos(\widehat{Oy_i, Oz_{i-1}}) \\ a_{31} &= \cos(\widehat{Oz_i, Ox_{i-1}}); \quad a_{32} = \cos(\widehat{Oz_i, Oy_{i-1}}); \quad a_{33} = \cos(\widehat{Oz_i, Oz_{i-1}}) \end{aligned} \tag{17}$$

Pentru elementul 1:

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_1; \quad a_{12} = -s_1; \quad a_{13} = 0 \\ a_{21} &= s_1; \quad a_{22} = c_1; \quad a_{23} = 0 \\ a_{31} &= 0; \quad a_{32} = 0; \quad a_{33} = 1 \\ x &= y = z = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Înlocuind în relația (16) relațiile (18) se obține;

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Pentru elementul 2 :

$$a_{11} = 1\,;\ a_{12} = 0\,;\ a_{13} = 0 \qquad x = 0\,;\ y = 0\,;\ z = a_1$$

$$a_{21} = 0\,;\ a_{22} = c_2\,;\ a_{23} = -s_2 \tag{20}$$

$$a_{31} = 0\,;\ a_{32} = s_2\,;\ a_{33} = c_2$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{2,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & -s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{sau :} \quad \begin{cases} \omega_{x2,0} = \dot{q}_2 \\ \omega_{y2,0} = -\dot{q}_1 s_2 \\ \omega_{z2,0} = \dot{q}_1 c_2 \\ v_{x2,0} = v_{y2,0} = v_{z2,0} = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Pentru elementul 3 :

$$a_{11} = c_3\,;\ a_{12} = 0\,;\ a_{13} = -s_3 \qquad x = y = 0$$

$$a_{21} = 0\,;\ a_{22} = 1\,;\ a_{23} = 0 \qquad z = a_2 \tag{22}$$

$$a_{31} = s_3\,;\ a_{32} = 0\,;\ a_{33} = c_3$$

Înlocuind relaţiile (22) în relaţia (16) se obţine :

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{3,0} = \begin{bmatrix} c & 0 & -s_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ s_3 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & -s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 s_2 \\ \dot{q}_1 c_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \omega_{x3,0} = -c_2 s_3 \dot{q}_1 + c_3 \dot{q}_2 \\ \omega_{y3,0} = -s_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_3 \\ \omega_{z3,0} = c_2 c_3 \dot{q}_1 + s_3 \dot{q}_2 \\ v_{x3,0} = -c_3 s_2 a_2 \dot{q}_1 \\ v_{y3,0} = -a_2 \dot{q}_2 \\ v_{z3,0} = -s_2 s_3 a_2 \dot{q}_1 \end{cases} \tag{23}$$

Pentru elementul 4 :

$$a_{11} = c_4 ; \quad a_{12} = 0 ; \quad a_{13} = s_4 \quad x = y = 0$$

$$a_{21} = 0 ; \quad a_{22} = 1 ; \quad a_{23} = 0 \quad z = a_3$$

$$a_{31} = -s_4 ; \quad a_{32} = 0 ; \quad a_{33} = c_4$$

Înlocuind relaţiile (24) în relaţia (16) se obţine :

$$\begin{cases} \omega_{x4,0} = c_4 \omega_{x3,0} + s_4 \omega_{z3,0} \\ \omega_{y4,0} = \omega_{y3,0} + \dot{q}_4 \\ \omega_{z4,0} = -s_4 \omega_{x3,0} + c_4 \omega_{z3,0} \\ v_{x4,0} = c_4 a_3 \omega_{y3,0} + c_4 v_{x3,0} + s_4 v_{z3,0} \\ v_{y4,0} = -a_3 \omega_{x3,0} + v_{y3,0} \\ v_{z4,0} = -s_4 a_3 \omega_{y3,0} - s_4 v_{x3,0} + c_4 v_{z3,0} \end{cases} \tag{25}$$

Pentru elementul 5 :

$$a_{11} = c_5 ; \quad a_{12} = s_5 ; \quad a_{13} = 0 \quad x = y = 0$$

$$a_{21} = -s_5 ; \quad a_{22} = c_5 ; \quad a_{23} = 0 \quad z = a_4 \tag{26}$$

$$a_{31} = 0 ; \quad a_{32} = 0 ; \quad a_{33} = 1$$

Înlocuind relațiile (26) în relația (16) și efectuînd calculele se obține :

$$\begin{cases} \omega_{x5,0} = c_5\omega_{x4,0} + s_5\omega_{y4,0} \\ \omega_{y5,0} = -s_5\omega_{x4,0} + c_5\omega_{y4,0} \\ \omega_{z5,0} = \omega_{z4,0} + \dot{q}_5 \\ v_{x5,0} = -s_5a_4\omega_{x4,0} + c_5a_4\omega_{y4,0} + c_5v_{x4,0} + s_5v_{y4,0} \\ v_{y5,0} = -c_5a_4\omega_{x4,0} - s_5a_4\omega_{y4,0} - s_5v_{x4,0} + c_5v_{y4,0} \\ v_{z5,0} = v_{z4,0} \end{cases} \tag{27}$$

Pentru elementul 6 :

$$\begin{aligned} &a_{11} = c_6\,;\ a_{12} = 0\,;\ a_{13} = -s_6 \quad x = a_5\,;\ y = z = 0 \\ &a_{21} = 0\,;\ a_{22} = 1\,;\ a_{23} = 0 \\ &a_{31} = s_6\,;\ a_{32} = 0\,;\ a_{33} = c_6 \end{aligned} \tag{28}$$

Înlocuind relațiile (28) în relația (16) și efectuînd calculele se obține :

$$\begin{cases} \omega_{x6,0} = c_6\omega_{x5,0} - s_6\omega_{z5,0} \\ \omega_{y6,0} = \omega_{y5,0} + \dot{q}_6 \\ \omega_{z6,0} = s_6\omega_{x5,0} + c_6\omega_{z5,0} \\ v_{x6,0} = s_6a_5\omega_{y5,0} + c_6v_{x5,0} - s_6v_{z5,0} \\ v_{y6,0} = a_5\omega_{z5,0} + v_{y5,0} \\ v_{z6,0} = -a_5c_6\omega_{y5,0} + s_6v_{x5,0} + c_6v_{z5,0} \end{cases} \tag{29}$$

Pentru elementul 7 :

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1\,;\ a_{12} = 0\,; \quad a_{13} = 0 \quad x = y = 0 \\ &a_{21} = 0\,;\ a_{22} = c_7\,; \quad a_{23} = s_7 \quad z = a_6 \\ &a_{31} = 0\,;\ a_{32} = -s_7\,;\ a_{33} = c_7 \end{aligned} \tag{30}$$

Înlocuind relațiile (30) în relația (16) și efectuînd calculele se obține :

$$\begin{cases} \omega_{x7,0} = \omega_{x6,0} + \dot{q}_7 \\ \omega_{y7,0} = c_7\omega_{y6,0} + s_7\omega_{z6,0} \\ \omega_{z7,0} = -s_7\omega_{y6,0} + c_7\omega_{z6,0} \\ v_{x7,0} = a_6\omega_{y6,0} + v_{x6,0} \\ v_{y7,0} = -c_7a_6\omega_{x6,0} + c_7v_{y6,0} + s_7v_{z6,0} \\ v_{z7,0} = -s_7a_6\omega_{x6,0} - s_7v_{y6,0} + c_7v_{z6,0} \end{cases} \tag{31}$$

Pentru elementul 8 :

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1\,;\ a_{12} = 0\,;\ a_{13} = 0 \qquad y = a_7 \\ &a_{21} = 0\,;\ a_{22} = c_8\,;\ a_{23} = -s_8 \quad x = z = 0 \\ &a_{31} = 0\,;\ a_{32} = s_8\,;\ a_{33} = c_8 \end{aligned} \tag{32}$$

Înlocuind relaţiile (32) în relţia (16) şi efectuînd calculele se obţine :

$$\begin{cases} \omega_{x8,0} = \omega_{x7,0} + \dot{q}_8 \\ \omega_{y8,0} = c_8\omega_{y7,0} - s_8\omega_{z7,0} \\ \omega_{z8,0} = s_8\omega_{y7,0} + c_8\omega_{z7,0} \\ v_{x8,0} = -a_7\omega_{x7,0} + v_{x7,0} \\ v_{y8,0} = -s_8a_{7\,x7,0} + c_8v_{y7,0} - s_8v_{z7,0} \\ v_{z8,0} = c_8a_7\omega_{x7,0} + s_8v_{y7,0} + c_8v_{z7,0} \end{cases} \tag{33}$$

Pentru elementul 9 :

$$\begin{aligned} &a_{11} = c_9\,;\ a_{12} = 0\,;\ a_{13} = -s_9 \quad x = y = 0 \\ &a_{21} = 0\,;\ a_{22} = 1\,;\ a_{23} = 0 \qquad z = -a_8 \\ &a_{31} = s_9\,;\ a_{32} = 0\,;\ a_{33} = c_9 \end{aligned} \tag{34}$$

Înlocuind relaţiile (34) în relaţia (16) şi efectuînd calculele se obţine :

$$\begin{cases} \omega_{x9,0} = c_9\omega_{x8,0} - s_9\omega_{z8,0} \\ \omega_{y9,0} = \omega_{y8,0} + \dot{q}_9 \\ \omega_{z9,0} = s_9\omega_{x8,0} + c_9\omega_{z8,0} \\ v_{x9,0} = -c_9a_8\omega_{y8,0} + c_9v_{x8,0} - s_9v_{z8,0} \\ v_{y9,0} = a_8\omega_{x8,0} + v_{y8,0} \\ v_{z9,0} = -a_8s_9\omega_{y8,0} + s_9v_{x8,0} + c_9v_{z8,0} \end{cases} \tag{35}$$

Pentru elementul 10 :

$$\begin{aligned} &a_{11} = c_{10}\,;\ a_{12} = s_{10}\,;\ a_{13} = 0 \quad x = a_9 \\ &a_{21} = -s_{10}\,;\ a_{22} = c_{10}\,;\ a_{23} = 0 \quad y = z = 0 \\ &a_{31} = 0\,;\ a_{32} = 0\,;\ a_{33} = 1 \end{aligned} \tag{36}$$

Înlocuind relațiile (36) în relația (16) și efectuînd calculele se obține :

$$\begin{cases} \omega_{x10,0} = c_{10}\omega_{x9,0} + s_{10}\omega_{y9,0} \\ \omega_{y10,0} = -s_{10}\omega_{x9,0} + c_{10}\omega_{y9,0} \\ \omega_{z10,0} = \omega_{z9,0} + \dot{q}_{10} \\ v_{x10,0} = a_9 s_{10}\omega_{z9,0} + c_{10}v_{x9,0} + s_{10}v_{y9,0} \\ v_{y10,0} = a_9 c_{10}\omega_{z9,0} - s_{10}v_{x9,0} + c_{10}v_{y9,0} \\ v_{z10,0} = -a_9\omega_{y9,0} + v_{z9,0} \end{cases} \tag{37}$$

Pentru elementul 11 ;

$$\begin{aligned} &a_{11} = c_{11}\,;\ a_{12} = 0\,;\ a_{13} = -s_{11} && x = y = 0 \\ &a_{21} = 0\,;\ a_{22} = 1\,;\ a_{23} = 0 && z = -a_{10} \\ &a_{31} = s_{11}\,;\ a_{32} = 0\,;\ a_{33} = c_{11} \end{aligned} \tag{38}$$

Înlocuind relațiile (37), (38) în relația (16) și efectuînd calculele se obține :

$$\begin{cases} \omega_{x11,0} = c_{11}\omega_{x10,0} - s_{11}\omega_{z10,0} \\ \omega_{y11,0} = \omega_{y10,0} + \dot{q}_{11} \\ \omega_{z11,0} = s_{11}\omega_{x10,0} + c_{11}\omega_{z10,0} \\ v_{x11,0} = -a_{10}c_{11}\omega_{y10,0} + c_{11}v_{x10,0} - s_{11}v_{z10,0} \\ v_{y11,0} = a_{10}\omega_{x10,0} + v_{y10,0} \\ v_{z11,0} = -a_{10}s_{11}\omega_{y10,0} + s_{11}v_{x10,0} + c_{11}v_{z10,0} \end{cases} \tag{39}$$

Pentru elementul 12 :

$$\begin{aligned} &a_{11} = c_{12}\,;\ a_{12} = 0\,;\ a_{13} = -s_{12} && x = y = 0 \\ &a_{21} = 0\,;\ a_{22} = 1\,;\ a_{23} = 0 && z = -a_{11} \\ &a_{31} = s_{12}\,;\ a_{32} = 0\,;\ a_{33} = c_{12} \end{aligned} \tag{40}$$

Înlocuind relațiile (39), (40), în relația (16) și efectuînd calculele se obține :

$$\begin{cases} \omega_{x12,0} = c_{12}\omega_{x11,0} - s_{12}\omega_{z11,0} \\ \omega_{y12,0} = \omega_{y11,0} + \dot{q}_{12} \\ \omega_{z12,0} = s_{12}\omega_{x11,0} + c_{12}\omega_{z11,0} \\ v_{x12,0} = -a_{11}c_{12}\omega_{y11,0} + c_{12}v_{x11,0} - s_{12}v_{z11,0} \\ v_{y12,0} = a_{11}\omega_{x11,0} + v_{y11,0} \\ v_{z12,0} = -a_{11}s_{12}\omega_{y11,0} + s_{12}v_{x11,0} + c_{12}v_{z11,0} \end{cases} \tag{41}$$

Pentru elementul 13 :

$$a_{11} = 1\,;\ a_{12} = 0\,;\quad a_{13} = 0 \qquad x = y = 0$$

$$a_{21} = 0\,;\ a_{22} = c_{13}\,;\ a_{23} = -\,s_{13} \quad z = -\,a_{12} \tag{42}$$

$$a_{31} = 0\,;\ a_{32} = s_{13}\,;\ a_{33} = c_{13}$$

Înlocuind relaţiile (41), (42) în relaţia (16) şi efectuînd calculele se obţine :

$$\begin{cases} \omega_{x13,0} = \omega_{x12,0} + \dot{q}_{13} \\ \omega_{y13,0} = c_{13}\omega_{y12,0} - s_{13}\omega_{z12,0} \\ \omega_{z13,0} = s_{13}\omega_{y12,0} + c_{13}\omega_{z12,0} \\ v_{x13,0} = -a_{12}\omega_{y12,0} + v_{x12,0} \\ v_{y13,0} = c_{13}a_{12}\omega_{x12,0} + c_{13}v_{y12,0} - s_{13}v_{z12,0} \\ v_{z13,0} = s_{13}a_{12}\omega_{x12,0} + s_{13}v_{y12,0} + c_{13}v_{z12,0} \end{cases} \tag{43}$$

4. DETERMINAREA ACCELERAŢIILOR

Fie A un punct oarecare al triedrului (T_n). Acceleraţia absolută a acestui punct este :

$$\bar{\gamma}_A = \bar{\gamma}_{n0} + \bar{\varepsilon}_{n0} \times \overline{O_nA} + \bar{\omega}_{n0} \times (\bar{\omega}_{n0} \times \overline{O_nA}) \tag{44}$$

unde $\bar{\gamma}_{n0}$ şi $\bar{\varepsilon}_{n0}$ reprezintă vectorul acceleraţie liniară absolută respectiv acceleraţie unghiulară absolută a originii O_n a triedrului (T_n).

Vectorul $\bar{\varepsilon}_{n0}$ se poate determina astfel :

$$\bar{\varepsilon}_{n0} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\varepsilon}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \bar{\omega}_{j,j-1} \times \bar{\omega}_{i,i-1}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n-1,0} = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\varepsilon}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} \bar{\omega}_{j,j-1} \times \bar{\omega}_{i,i-1}$$

Notăm cu $\bar{S} = \bar{\varepsilon}_{n0} - \bar{\varepsilon}_{n-1,0}$. În continuare se obţine :

$$\bar{S} = \bar{\varepsilon}_{n,n-1} + \sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_{i0} \times \bar{\omega}_{i,i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\omega}_{i0} \times \bar{\omega}_{i,i-1} = \bar{\varepsilon}_{n,n-1} + \bar{\omega}_{n0} \times \bar{\omega}_{n,n-1}$$

Deci :

$$\bar{\varepsilon}_{n0} - \bar{\varepsilon}_{n-1,0} = \bar{\varepsilon}_{n,n-1} + \bar{\omega}_{n0} \times \bar{\omega}_{n,n-1} \quad \text{sau}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n0} = \bar{\varepsilon}_{n-1,0} + \bar{\varepsilon}_{n,n-1} + \bar{\omega}_{n0} \times \bar{\omega}_{n,n-1}.$$

Pentru $n = i$ obținem :

$$\bar{\varepsilon}_{i,0} = \bar{\varepsilon}_{i-1,0} + \bar{\varepsilon}_{i,i-1} + \bar{\omega}_{i0} \times \bar{\omega}_{i,i-1}.$$

Notînd cu $[\alpha_{i,i-1}]$ matricea de trecere de la triedrul (T_{i-1}) la triedrul (T_i) și proiectînd pe axele triedrului (T_i) se obține relația matricială :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}_{i,0} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}_{i,i-1} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}_{i,0} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{i,i-1} +$$

$$+ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}_{i-1,0} \tag{45}$$

unde elementele a_{ij} sînt date de relațiile (17).

Pentru lanțul cinematic din figura 2 se obține :

Pentru elementul 1 :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} \tag{46}$$

Pentru elementul 2 :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}_{2,0} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}_{2,1} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{2,0z} & \omega_{2,0y} \\ \omega_{2,0z} & 0 & -\omega_{2,0x} \\ -\omega_{2,0y} & \omega_{2,0x} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} \quad \text{sau :} \quad \begin{cases} \varepsilon_{x2,0} = \ddot{q}_2 \\ \varepsilon_{y2,0} = \omega_{2,0z}\dot{q}_2 - s_2\ddot{q}_1 \\ \varepsilon_{z2,0} = -\omega_{2,0y}\dot{q}_2 + c_2\ddot{q}_1 \end{cases} \tag{47}$$

Pentru elementul 3 :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}_{3,0} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}_{3,2} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z3,0} & \omega_{y3,0} \\ \omega_{z3,0} & 0 & -\omega_{x3,0} \\ -\omega_{y3,0} & \omega_{x3,0} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_3 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_3 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{x2,0} \\ \varepsilon_{y2,0} \\ \varepsilon_{z2,0} \end{bmatrix} \quad \text{sau :} \quad \begin{cases} \varepsilon_{x3,0} = -\omega_{z3,0}\dot{q}_3 + c_3\varepsilon_{x2,0} - s_3\varepsilon_{z2,0} \\ \varepsilon_{y3,0} = \ddot{q}_3 + \varepsilon_{y2,0} \\ \varepsilon_{z3,0} = \omega_{x3,0}\dot{q}_3 + s_3\varepsilon_{x2,0} + c_3\varepsilon_{z2,0} \end{cases} \tag{48}$$

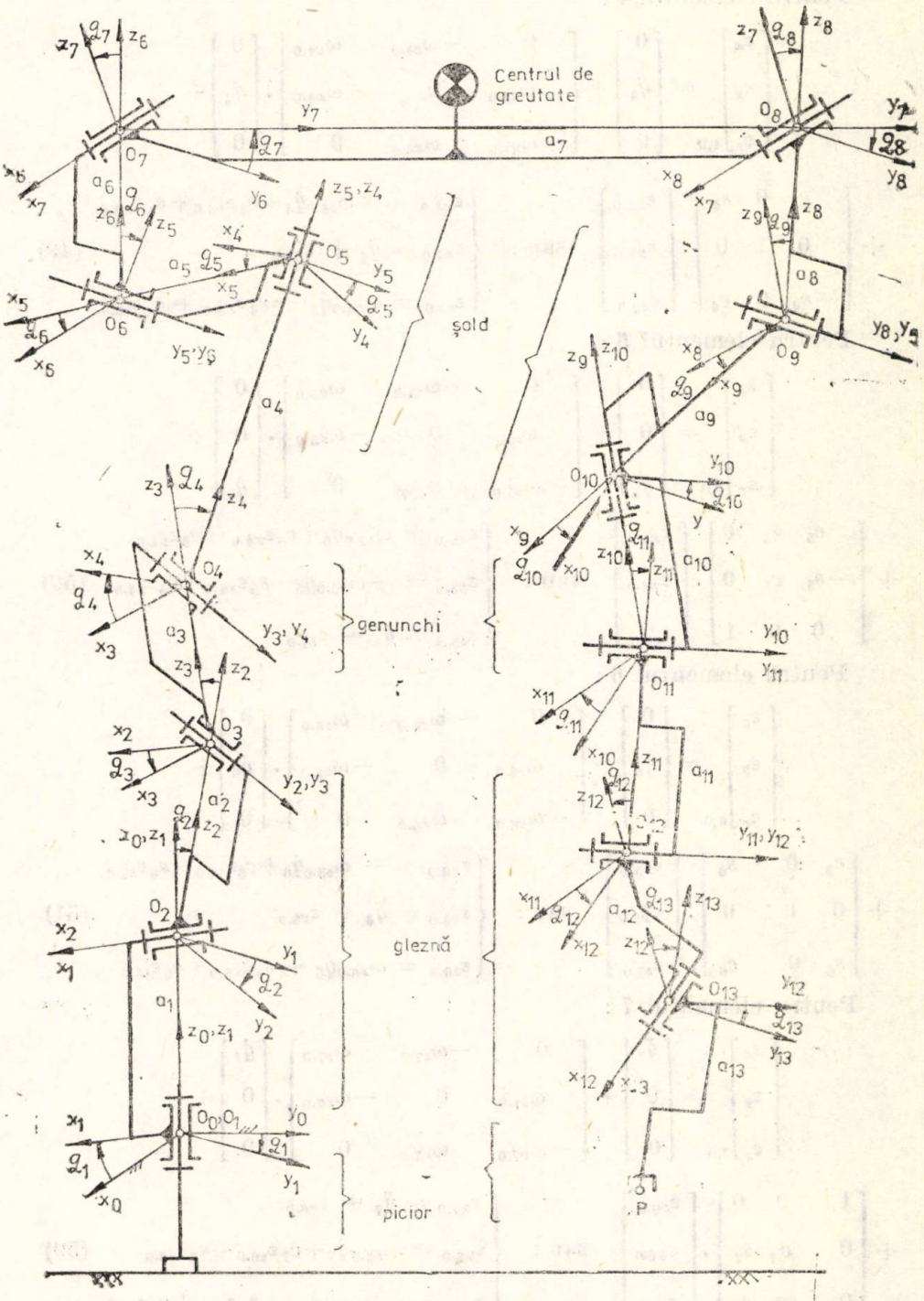


Fig. 2

Pentru elementul 4 :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}_{4,0}=\begin{bmatrix}0\\ \ddot{q}_4\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_{z4,0} & \omega_{y4,0}\\ \omega_{z4,0} & 0 & -\omega_{x4,0}\\ -\omega_{y4,0} & \omega_{x4,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ \dot{q}_4\\ 0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}c_4 & 0 & s_4\\ 0 & 1 & 0\\ -s_4 & 0 & c_4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{x3,0}\\ \varepsilon_{y3,0}\\ \varepsilon_{z3,0}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}\quad\begin{cases}\varepsilon_{x4,0}=-\omega_{z4,0}\dot{q}_4+c_4\varepsilon_{x3,0}+s_4\varepsilon_{z3,0}\\ \varepsilon_{y4,0}=\ddot{q}_4+\varepsilon_{y3,0}\\ \varepsilon_{z4,0}=\omega_{x4,0}\dot{q}_4-s_4\varepsilon_{x3,0}+c_4\varepsilon_{z3,0}\end{cases}\tag{49}$$

Pentru elementul 5 :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}_{5,0}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \ddot{q}_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_{z5,0} & \omega_{y5,0}\\ \omega_{z5,0} & 0 & -\omega_{x5,0}\\ -\omega_{y5,0} & \omega_{x5,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{q}_5\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}c_5 & s_5 & 0\\ -s_5 & c_5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{x4,0}\\ \varepsilon_{y4,0}\\ \varepsilon_{z4,0}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}\quad\begin{cases}\varepsilon_{x5,0}=\omega_{y5,0}\dot{q}_5+c_5\varepsilon_{x4,0}+s_5\varepsilon_{y4,0}\\ \varepsilon_{y5,0}=-\omega_{x5,0}\dot{q}_5-s_5\varepsilon_{x4,0}+c_5\varepsilon_{y4,0}\\ \varepsilon_{z5,0}=\ddot{q}_5+\varepsilon_{z4,0}\end{cases}\tag{50}$$

Pentru elementul 6 :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}_{6,0}=\begin{bmatrix}0\\ \ddot{q}_6\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_{z6,0} & \omega_{y6,0}\\ \omega_{z6,0} & 0 & -\omega_{x6,0}\\ -\omega_{y6,0} & \omega_{x6,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ \dot{q}_6\\ 0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}c_6 & 0 & -s_6\\ 0 & 1 & 0\\ s_6 & 0 & c_6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{x5,0}\\ \varepsilon_{y5,0}\\ \varepsilon_{z5,0}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}\quad\begin{cases}\varepsilon_{x6,0}=-\omega_{z6,0}\dot{q}_6+c_6\varepsilon_{x5,0}-s_6\varepsilon_{z5,0}\\ \varepsilon_{y6,0}=\ddot{q}_6+\varepsilon_{y5,0}\\ \varepsilon_{z6,0}=\omega_{x6,0}\dot{q}_6+s_6\varepsilon_{x5,0}+c_6\varepsilon_{z5,0}\end{cases}\tag{51}$$

Pentru elementul 7 :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}_{7,0}=\begin{bmatrix}\ddot{q}_7\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_{z7,0} & \omega_{y7,0}\\ \omega_{z7,0} & 0 & -\omega_{x7,0}\\ -\omega_{y7,0} & \omega_{x7,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{q}_7\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c_7 & s_7\\ 0 & -s_7 & c_7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{x6,0}\\ \varepsilon_{y6,0}\\ \varepsilon_{z6,0}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}\quad\begin{cases}\varepsilon_{x7,0}=\ddot{q}_7+\varepsilon_{x6,0}\\ \varepsilon_{y7,0}=\omega_{z7,0}\dot{q}_7+c_7\varepsilon_{y6,0}+s_7\varepsilon_{z6,0}\\ \varepsilon_{z7,0}=-\omega_{y7,0}\dot{q}_7-s_7\varepsilon_{y6,0}+c_7\varepsilon_{z6,0}\end{cases}\tag{52}$$

Pentru elementul 8 :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}_{8,0}=\begin{bmatrix}\ddot{q}_8\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_{z8,0} & \omega_{y8,0}\\ \omega_{z8,0} & 0 & -\omega_{x8,0}\\ -\omega_{y8,0} & \omega_{x8,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{q}_8\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c_8 & -s_8\\ 0 & s_8 & c_8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{x7,0}\\ \varepsilon_{y7,0}\\ \varepsilon_{z7,0}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}\quad\begin{cases}\varepsilon_{x8,0}=\ddot{q}_8+\varepsilon_{x7,0}\\ \varepsilon_{y8,0}=\omega_{z8,0}\dot{q}_8+c_8\varepsilon_{y7,0}-s_8\varepsilon_{z7,0}\\ \varepsilon_{z8,0}=-\omega_{y8,0}\dot{q}_8+s_8\varepsilon_{y7,0}+c_8\varepsilon_{z7,0}\end{cases}\quad(53)$$

Pentru elementul 9 :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}_{9,0}=\begin{bmatrix}0\\ \ddot{q}_9\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_{z9,0} & \omega_{y9,0}\\ \omega_{z9,0} & 0 & -\omega_{x9,0}\\ -\omega_{y9,0} & \omega_{x9,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ \dot{q}_9\\ 0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}c_9 & 0 & -s_9\\ 0 & 1 & 0\\ s_9 & 0 & c_9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{x8,0}\\ \varepsilon_{y8,0}\\ \varepsilon_{z8,0}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}\quad\begin{cases}\varepsilon_{x9,0}=-\omega_{z9,0}\dot{q}_9+c_9\varepsilon_{x8,0}-s_9\varepsilon_{z8,0}\\ \varepsilon_{z9,0}=\ddot{q}_9+\varepsilon_{y8,0}\\ \varepsilon_{z9,0}=\omega_{x9,0}\dot{q}_9+s_9\varepsilon_{x8,0}+c_9\varepsilon_{z8,0}\end{cases}\quad(54)$$

Pentru elementul 10 :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}_{10,0}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \ddot{q}_{10}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_{z10,0} & \omega_{y10,0}\\ \omega_{z10,0} & 0 & -\omega_{x10,0}\\ -\omega_{y10,0} & \omega_{x10,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{q}_{10}\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}c_{10} & s_{10} & 0\\ -s_{10} & c_{10} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{x9,0}\\ \varepsilon_{y9,0}\\ \varepsilon_{z9,0}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}\quad\begin{cases}\varepsilon_{x10,0}=\omega_{y10,0}\dot{q}_{10}+c_{10}\varepsilon_{x9,0}+s_{10}\varepsilon_{y9,0}\\ \varepsilon_{y10,0}=-\omega_{x10,0}\dot{q}_{10}-s_{10}\varepsilon_{x9,0}+c_{10}\varepsilon_{y9,0}\\ \varepsilon_{z10,0}=\ddot{q}_{10}+\varepsilon_{z9,0}\end{cases}\quad(55)$$

Pentru elementul 11 :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}_{11,0}=\begin{bmatrix}0\\ \ddot{q}_{11}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_{z11,0} & \omega_{y11,0}\\ \omega_{z11,0} & 0 & -\omega_{x11,0}\\ -\omega_{y11,0} & \omega_{x11,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ \dot{q}_{11}\\ 0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}c_{11} & 0 & -s_{11}\\ 0 & 1 & 0\\ s_{11} & 0 & c_{11}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{x10,0}\\ \varepsilon_{y10,0}\\ \varepsilon_{z10,0}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}\quad\begin{cases}\varepsilon_{x11,0}=-\omega_{z11,0}\dot{q}_{11}+c_{11}\varepsilon_{x10,0}-s_{11}\varepsilon_{z10,0}\\ \varepsilon_{y11,0}=\ddot{q}_{11}+\varepsilon_{y10,0}\\ \varepsilon_{z11,0}=\omega_{x11,0}\dot{q}_{11}+s_{11}\varepsilon_{x10,0}+c_{11}\varepsilon_{z10,0}\end{cases}\quad(56)$$

Pentru elementul 12 :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}_{12,0}=\begin{bmatrix}0\\ \ddot{q}_{12}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_{z12,0} & \omega_{y12,0}\\ \omega_{z12,0} & 0 & -\omega_{x12,0}\\ -\omega_{y12,0} & \omega_{x12,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ \dot{q}_{12}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_{12} & 0 & -s_{12}\\ 0 & 1 & 0\\ s_{12} & 0 & c_{12}\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{x11,0}\\ \varepsilon_{y11,0}\\ \varepsilon_{z11,0}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}\quad\begin{cases}\varepsilon_{x12,0}=-\omega_{z12,0}\dot{q}_{12}+c_{12}\varepsilon_{x11,0}-s_{12}\varepsilon_{z11,0}\\ \varepsilon_{y12,0}=\ddot{q}_{12}+\varepsilon_{y11,0}\\ \varepsilon_{z12,0}=\omega_{x12,0}\dot{q}_{12}+s_{12}\varepsilon_{x11,0}+c_{12}\varepsilon_{z11,0}\end{cases}\tag{57}$$

Pentru elementul 13 :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}_{13,0}=\begin{bmatrix}\ddot{q}_{13}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_{z13,0} & \omega_{y13,0}\\ \omega_{z13,0} & 0 & -\omega_{x13,0}\\ -\omega_{y13,0} & \omega_{x13,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{q}_{13}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c_{13} & -s_{13}\\ 0 & s_{13} & c_{13}\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{x12,0}\\ \varepsilon_{y12,0}\\ \varepsilon_{z12,0}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}\quad\begin{cases}\varepsilon_{x13,0}=\ddot{q}_{13}+\varepsilon_{x12,0}\\ \varepsilon_{y13,0}=\omega_{z13,0}\dot{q}_{13}+c_{13}\varepsilon_{y12,0}-s_{13}\varepsilon_{z12,0}\\ \varepsilon_{z13,0}=-\omega_{y13,0}\dot{q}_{13}+s_{13}\varepsilon_{y12,0}+c_{13}\varepsilon_{z12,0}\end{cases}\tag{58}$$

Se pot determina acum acceleraţiile liniare absolute. Pentru aceasta se va scrie expresia (44) sub formă matricială. Astfel avem :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_A=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{n0}+\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y\\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x\\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0\end{bmatrix}_{n0}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-(\omega_y^2+\omega_z^2) & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z\\ \omega_x\omega_y & -(\omega_x^2+\omega_z^2) & \omega_y\omega_z\\ \omega_x\omega_z & \omega_y\omega_z & -(\omega_x^2+\omega_y^2)\end{bmatrix}_{n0}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\tag{59}$$

unde x, y, z sînt coordonatele punctului A în triedrul (T_n).

Pentru elementul 1 :

$$\gamma_{01x}=\gamma_{01y}=\gamma_{01z}=0\tag{60}$$

Pentru elementul 2 :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{0_1}=\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_1 & 0\\ \varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ a_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\dot{q}_1^2 & 0 & 0\\ 0 & -\dot{q}_1^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\tag{61}$$

Pentru elementul 3 :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O3}=\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_{z2,0} & \varepsilon_{y2,0}\\ \varepsilon_{z2,0} & 0 & -\varepsilon_{x2,0}\\ -\varepsilon_{y2,0} & \varepsilon_{x2,0} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\a_2\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-(\omega_{y2,0}^2+\omega_{z2,0}^2) & \omega_{x2,0}\omega_{y2,0} & \omega_{x2,0}\omega_{z2,0}\\ \omega_{x2,0}\omega_{y2,0} & -(\omega_{x2,0}^2+\omega_{z2,0}^2) & \omega_{y2,0}\omega_{z2,0}\\ \omega_{x2,0}\omega_{z2,0} & \omega_{y2,0}\omega_{z2,0} & -(\omega_{x2,0}^2+\omega_{y2,0}^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\a_2\end{bmatrix}\quad \text{sau :}$$

$$\begin{cases}\gamma_{xO3}=a_2\varepsilon_{y2,0}+a_2\omega_{x2,0}\omega_{z2,0}\\ \gamma_{yO3}=-a_2(\varepsilon_{x2,0}-\omega_{y2,0}\omega_{z2,0})\\ \gamma_{zO3}=-a_2(\omega_{x2,0}^2+\omega_{y2,0}^2)\end{cases}\qquad (62)$$

Pentru elementul 4 :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O4}=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O3}+\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_{z3,0} & \varepsilon_{y3,0}\\ \varepsilon_{z3,0} & 0 & -\varepsilon_{x3,0}\\ -\varepsilon_{y3,0} & \varepsilon_{x3,0} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\a_3\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}-(\omega_{y3,0}^2+\omega_{z3,0}^2) & \omega_{x3,0}\omega_{y3,0} & \omega_{x3,0}\omega_{z3,0}\\ \omega_{x3,0}\omega_{y3,0} & -(\omega_{x3,0}^2+\omega_{z3,0}^2) & \omega_{y3,0}\omega_{z3,0}\\ \omega_{x3,0}\omega_{z3,0} & \omega_{y3,0}\omega_{z3,0} & -(\omega_{x3,0}^2+\omega_{y3,0}^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\a_3\end{bmatrix}\quad \text{sau :}$$

$$\begin{cases}\gamma_{xO4}=\gamma_{xO3}+a_3(\varepsilon_{y3,0}+\omega_{x3,0}\omega_{z3,0})\\ \gamma_{yO4}=\gamma_{yO3}-a_3(\varepsilon_{x3,0}-\omega_{y3,0}\omega_{z3,0})\\ \gamma_{zO4}=\gamma_{zO3}-a_3(\omega_{x3,0}^2+\omega_{y3,0}^2)\end{cases}\qquad (63)$$

Pentru elementul 5 :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O5}=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O4}+\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_{z4,0} & \varepsilon_{y4,0}\\ \varepsilon_{z4,0} & 0 & -\varepsilon_{x4,0}\\ -\varepsilon_{y4,0} & \varepsilon_{x4,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\a_4\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-(\omega_{y4,0}^2+\omega_{z4,0}^2) & \omega_{x4,0}\omega_{y4,0} & \omega_{x4,0}\omega_{z4,0}\\ \omega_{x4,0}\omega_{y4,0} & -(\omega_{x4,0}^2+\omega_{z4,0}^2) & \omega_{y4,0}\omega_{z4,0}\\ \omega_{x4,0}\omega_{z4,0} & \omega_{y4,0}\omega_{z4,0} & -(\omega_{x4,0}^2+\omega_{y4,0}^2)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\a_4\end{bmatrix}\quad \text{sau :}$$

$$\begin{cases}\gamma_{xO5}=\gamma_{xO4}+a_4(\varepsilon_{y4,0}+\omega_{x4,0}\omega_{z4,0})\\ \gamma_{yO5}=\gamma_{yO4}-a_4(\varepsilon_{x4,0}-\omega_{y4,0}\omega_{z4,0})\\ \gamma_{zO5}=\gamma_{zO4}-a_4(\omega_{x4,0}^2+\omega_{y4,0}^2)\end{cases}\qquad (64)$$

Pentru elementul 6 :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O6}=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O5}+\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_{z5,0} & \varepsilon_{y5,0}\\ \varepsilon_{z5,0} & 0 & -\varepsilon_{x5,0}\\ -\varepsilon_{y5,0} & \varepsilon_{x5,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_5\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-(\omega_{y5,0}^2+\omega_{z5,0}^2) & \omega_{x5,0}\omega_{y5,0} & \omega_{x5,0}\omega_{z5,0}\\ \omega_{x5,0}\omega_{y5,0} & -(\omega_{x5,0}^2+\omega_{z5,0}^2) & \omega_{y5,0}\omega_{z5,0}\\ \omega_{x5,0}\omega_{z5,0} & \omega_{y5,0}\omega_{z5,0} & -(\omega_{x5,0}^2+\omega_{y5,0}^2)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_5\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad\text{sau :}$$

$$\begin{cases}\gamma_{xO6}=\gamma_{O5}-a_5(\omega_{y5,0}^2+\omega_{z5,0}^2)\\ \gamma_{yO6}=\gamma_{yO5}+a_5(\varepsilon_{z5,0}+\omega_{x5,0}\omega_{y5,0})\\ \gamma_{zO6}=\gamma_{zO5}-a_5(\varepsilon_{y5,0}-\omega_{x5,0}\omega_{z5,0})\end{cases}\tag{65}$$

Pentru elementul 7 :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O7}=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O6}+\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_{z6,0} & \varepsilon_{y6,0}\\ \varepsilon_{z6,0} & 0 & -\varepsilon_{x6,0}\\ -\varepsilon_{y6,0} & \varepsilon_{x6,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ a_6\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-(\omega_{y6,0}^2+\omega_{z6,0}^2) & \omega_{x6,0}\omega_{y6,0} & \omega_{x6,0}\omega_{z6,0}\\ \omega_{x6,0}\omega_{y6,0} & -(\omega_{x6,0}^2+\omega_{z6,0}^2) & \omega_{y6,0}\omega_{z6,0}\\ \omega_{x6,0}\omega_{z6,0} & \omega_{y6,0}\omega_{z6,0} & -(\omega_{x6,0}^2+\omega_{y6,0}^2)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ a_6\end{bmatrix}\quad\text{sau :}$$

$$\begin{cases}\gamma_{xO7}=\gamma_{xO6}+a_6(\varepsilon_{y6,0}+\omega_{x6,0}\omega_{z6,0})\\ \gamma_{yO7}=\gamma_{yO6}-a_6(\varepsilon_{x6,0}-\omega_{y6,0}\omega_{z6,0})\\ \gamma_{zO7}=\gamma_{zO6}-a_6(\omega_{x6,0}^2+\omega_{y6,0}^2)\end{cases}\tag{66}$$

Pentru elementul 8 :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O8}=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O7}+\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_{z7,0} & \varepsilon_{y7,0}\\ \varepsilon_{z7,0} & 0 & -\varepsilon_{x7,0}\\ -\varepsilon_{y7,0} & \varepsilon_{x7,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ a_7\\ 0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-(\omega_{y7,0}^2+\omega_{z7,0}^2) & \omega_{x7,0}\omega_{y7,0} & \omega_{x7,0}\omega_{z7,0}\\ \omega_{x7,0}\omega_{y7,0} & -(\omega_{x7,0}^2+\omega_{z7,0}^2) & \omega_{y7,0}\omega_{z7,0}\\ \omega_{x7,0}\omega_{z7,0} & \omega_{y7,0}\omega_{z7,0} & -(\omega_{x7,0}^2+\omega_{y7,0}^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ a_7\\ 0\end{bmatrix}\quad\text{sau :}$$

$$\begin{cases}\gamma_{xO8}=\gamma_{xO7}-a_7(\varepsilon_{z7,0}-\omega_{x7,0}\omega_{y7,0})\\ \gamma_{yO8}=\gamma_{yO7}-a_7(\omega_{x7,0}^2+\omega_{z7,0}^2)\\ \gamma_{zO8}=\gamma_{zO7}+a_7(\varepsilon_{x7,0}-\omega_{y7,0}\omega_{z7,0})\end{cases}\tag{67}$$

Pentru elementul 9 :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O9}=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O8}+\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_{z8,0} & \varepsilon_{y8,0}\\ \varepsilon_{z8,0} & 0 & -\varepsilon_{x8,0}\\ -\varepsilon_{y8,0} & \varepsilon_{x8,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -a_8\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-(\omega^2_{y8,0}+\omega^2_{y8,0}) & \omega_{x8,0}\omega_{y8,0} & \omega_{x8,0}\omega_{z8,0}\\ \omega_{x8,0}\omega_{y8,0} & -(\omega^2_{x8,0}+\omega^2_{z8,0}) & \omega_{y8,0}\omega_{z8,0}\\ \omega_{x8,0}\omega_{z8,0} & \omega_{y8,0}\omega_{z8,0} & -(\omega^2_{x8,0}+\omega^2_{y8,0})\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -a_8\end{bmatrix}\quad\text{sau :}$$

$$\begin{cases}\gamma_{xO9}=\gamma_{xO8}-a_8(\varepsilon_{y8,0}+\omega_{x8,0}\omega_{z8,0})\\ \gamma_{yO9}=\gamma_{yO8}+a_8(\varepsilon_{x8,0}-\omega_{y8,0}\omega_{z8,0})\\ \gamma_{zO9}=\gamma_{zO8}+a_8(\omega^2_{x8,0}+\omega^2_{y8,0})\end{cases}\qquad(68)$$

Pentru elementul 10 :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O10}=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O9}+\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_{z9,0} & \varepsilon_{y9,0}\\ \varepsilon_{z9,0} & 0 & -\varepsilon_{x9,0}\\ -\varepsilon_{y9,0} & \varepsilon_{x9,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_9\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-(\omega^2_{y9,0}+\omega^2_{z9,0}) & \omega_{x9,0}\omega_{y9,0} & \omega_{x9,0}\omega_{z9,0}\\ \omega_{x9,0}\omega_{y9,0} & -(\omega^2_{x9,0}+\omega^2_{z9,0}) & \omega_{y9,0}\omega_{z9,0}\\ \omega_{x9,0}\omega_{z9,0} & \omega_{y9,0}\omega_{z9,0} & -(\omega^2_{x9,0}+\omega^2_{y9,0})\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_9\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad\text{sau :}$$

$$\begin{cases}\gamma_{xO10}=\gamma_{xO9}-a_9(\omega^2_{y9,0}+\omega^2_{z9,0})\\ \gamma_{yO10}=\gamma_{yO9}+a_9(\varepsilon_{z9,0}+\omega_{x9,0}\omega_{y9,0})\\ \gamma_{zO10}=\gamma_{zO9}-a_9(\varepsilon_{y9,0}-\omega_{x9,0}\omega_{z9,0})\end{cases}\qquad(69)$$

Pentru elementul 11 :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O11}=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O10}+\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_{z10,0} & \varepsilon_{y10,0}\\ \varepsilon_{z10,0} & 0 & -\varepsilon_{x10,0}\\ -\varepsilon_{y10,0} & +\varepsilon_{x10,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -a_{10}\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-(\omega^2_{y10,0}+\omega^2_{z10,0}) & \omega_{x10,0}\omega_{y10,0} & \omega_{x10,0}\omega_{z10,0}\\ \omega_{x10,0}\omega_{y10,0} & -(\omega^2_{x10,0}+\omega^2_{z10,0}) & \omega_{y10,0}\omega_{z10,0}\\ \omega_{x10,0}\omega_{z10,0} & \omega_{y10,0}\omega_{z10,0} & -(\omega^2_{x10,0}+\omega^2_{y10,0})\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -a_{10}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}$$

$$\begin{cases}\gamma_{xO11}=\gamma_{xO10}-a_{10}(\varepsilon_{y10,0}+\omega_{x10,0}\omega_{z10,0})\\ \gamma_{yO11}=\gamma_{yO10}+a_{10}(\varepsilon_{x10,0}-\omega_{y10,0}\omega_{z10,0})\\ \gamma_{zO11}=\gamma_{zO10}+a_{10}(\omega^2_{x10,0}+\omega^2_{y10,0})\end{cases}\qquad(70)$$

Pentru elementul 12 :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O12}=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O11}+\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_{z11,0} & \varepsilon_{y11,0}\\ \varepsilon_{z11,0} & 0 & -\varepsilon_{x11,0}\\ -\varepsilon_{y11,0} & \varepsilon_{x11,0} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -a_{11}\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-(\omega^2_{y11,0}+\omega^2_{z110}) & \omega_{x11,0}\omega_{y11,0} & \omega_{x11,0}\omega_{z11,0}\\ \omega_{x11,0}\omega_{y11,0}) & -(\omega^2_{x11,0}+\omega^2_{z11,0}) & \omega_{y11,0}\omega_{z11,0}\\ \omega_{x11,0}\omega_{z11,0} & \omega_{y11,0}\omega_{z11,0} & -(\omega^2_{x11,0}+\omega^2_{y11,0})\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -a_{11}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}$$

$$\begin{cases}\gamma_{xO12}=\gamma_{xO11}-a_{11}(\varepsilon_{y11,0}+\omega_{x11,0}\omega_{z11,0})\\ \gamma_{yO12}=\gamma_{yO11}+a_{11}(\varepsilon_{x11,0}-\omega_{y11,0}\omega_{z11,0})\\ \gamma_{zO12}=\gamma_{zO11}+a_{11}(\omega^2_{x11,0}+\omega^2_{y11,0})\end{cases}\tag{71}$$

Pentru elementul 13 :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O13}=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O12}+\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_{z12,0} & \varepsilon_{y12,0}\\ \varepsilon_{z12,0} & 0 & -\varepsilon_{x12,0}\\ -\varepsilon_{y12,0} & \varepsilon_{x12,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -a_{12}\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-(\omega^2_{y12,0}+\omega^2_{z12,0}) & \omega_{x12,0}\omega_{y12,0} & \omega_{x12,0}\omega_{z12,0})\\ \omega_{x12,0}\omega_{y12,0} & -(\omega^2_{x12,0}+\omega^2_{z12,0}) & \omega_{y12,0}\omega_{z12,0}\\ \omega_{x12,0}\omega_{z12,0} & \omega_{y12,0}\omega_{z12,0} & -(\omega^2_{x12,0}+\omega^2_{y12,0})\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -a_{12}\end{bmatrix}\quad\text{sau :}$$

$$\begin{cases}\gamma_{xO13}=\gamma_{xO12}-a_{12}(\varepsilon_{y12,0}+\omega_{x12,0}\omega_{z12,0})\\ \gamma_{yO13}=\gamma_{yO12}+a_{12}(\varepsilon_{x12,0}-\omega_{y12,0}\omega_{z12,0})\\ \gamma_{zO13}=\gamma_{zO12}+a_{12}(\omega^2_{x12,0}+\omega^2_{y12,0})\end{cases}\tag{72}$$

Pentru punctul P :

$$\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{P}=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix}_{O13}+\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon_{z13,0} & \varepsilon_{y13,0}\\ \varepsilon_{z13,0} & 0 & -\varepsilon_{x13,0}\\ -\varepsilon_{y13,0} & \varepsilon_{x13,0} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -h\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-(\omega^2_{y13,0}+\omega^2_{z13,0}) & \omega_{x13,0}\omega_{y13,0} & \omega_{x13,0}\omega_{z13,0}\\ \omega_{x13,0}\omega_{y12,0} & -(\omega^2_{x13,0}+\omega^2_{z13,0}) & \omega_{y13,0}\omega_{z13,0}\\ \omega_{x13,0}\omega_{z13,0} & \omega_{y13,0}\omega_{z13,0} & -(\omega^2_{x13,0}+\omega^2_{y13,0})\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -h\end{bmatrix}\quad\text{sau :}$$

$$\begin{cases}\gamma_{xP}=\gamma_{xO13}-h(\varepsilon_{y13,0}+\omega_{x13,0}\omega_{z13,0})\\ \gamma_{yP}=\gamma_{yO13}+h(\varepsilon_{x13,0}-\omega_{y13,0}\omega_{z13,0})\\ \gamma_{zP}=\gamma_{zO13}+h(\omega^2_{x13,0}+\omega^2_{y13,0})\end{cases}\tag{73}$$

4. CONCLUZII

Analizînd rezultatele obținute se observă că este posibil ca prin impunerea parametrilor cinematici $q_i(t)$, $i = \overline{1, 13}$ și a parametrilor geometrici $a_i (i = \overline{1, 12})$, h să se determine cu ajutorul relațiilor de tipul (1), (16), (45), (59) pozițiile, vitezele liniare și unghiulare respectiv accelerațiile unghiulare și liniare pentru punctul caracteristic P al lanțului cinematic din figura 2.

Primit în redacție la 1 martie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. I. KATO, *Development of the legged walking robot*, Robototehnica (1988).
2. R. VOINEA. ș.a., *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1983.
3. N. IONIȚĂ, *Elemente de mecanica automatelor și dinamica automatizării proceselor industriale*, Edit. tehnică, București, 1985.
4. R. VOINEA, s.a., *Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie*, Edit. Academiei, București, 1989.
5. E. NAKANO, *Vedenie v robototehniky*, Mir, Moskva, 1988.
6. ȘT., STAICU *Aplicații ale calculului matriceal în mecanica solidelor*, Edit. Academiei, București, 1986.
7. V. HANDRA-LUCA, *Funcțiile de transmitere în studiul mecanismelor*, Edit. Academiei, București, 1983.

VIBRAȚIILE AXIALE ALE GARNITURILOR DE PRĂJINI DE FORAJ.

de N. POSEA, S. ȚILIMPEA și S. CHERGUI

Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

În lucrare se dezvoltă un algoritm general pentru analiza vibrațiilor axiale libere și forțate, ale garniturilor de prăjini de foraj, ținînd seama de masa lor distribuită, de masa racordurilor și de elementele de susținere și antrenare, cum ar fi capul hidraulic, sistemul macara-geamblac, mastul.

Algoritmul este transpus într-un program specializat, cu ajutorul căruia sînt analizate vibrațiile libere și forțate ale mai multor tipuri de garnituri de prăjini de foraj, evidențiindu-se deplasările axiale și eforturile dinamice în orice secțiune a sistemului. Pe baza acestora se adoptă o alcătuire rațională a garniturii de foraj și se alege viteza optimă de forare în funcție de lungimea garniturii și de caracteristicile mecanice ale rocii forate.

Garnitura de prăjini de foraj este un sistem mecanic complex a cărui comportare dinamică în timpul operațiilor de manevră și al forării trebuie cunoscută cît mai exact, în scopul unei alcătuiri raționale a tronsoanelor și adoptării unui program tehnologic de funcționare optimă, în condiții de siguranță deplină.

Întrucît comportarea dinamică a sistemului depinde de foarte mulți factori atît ai garniturii de prăjini propriu-zise cît și ai elementelor de susținere și antrenare (cap hidraulic, macara-geamblac, mast, sapă, rocă etc.), este necesară adoptarea unui model dinamic cît mai adecvat , astfel încît rezultatele obținute pe baza acestuia să fie cît mai apropiate de determinările experimentale, ce pot fi efectuate pentru anumite stări particulare de funcționare [4], [6], [8].

Ținînd seama de aceste considerente, structura mecanică alcătuită din garnitura de prăjini și elementele de susținere se modelează, pentru vibrații axiale într-un sistem de elemente (tronsoane) uni-direcționale, cu masă continuă sau fără masă dar cu rigiditate cunoscută (fig. 1).

Evident, la granița dintre elemente pot fi considerate și mase concentrate, care, în cazul prăjinilor de foraj, ar fi tocmai masele racordurilor speciale. Masele concentrate de la partea superioară a modelului (fig. 1) sînt masa mastului (m_1), legată de punctul fix O (substructura instalației) prin elementul elastic k_1 care este coeficientul de rigiditate axială al mastului și masa sistemului macara-geamblac (m_2) legată prin elementul elastic k_2 care este coeficientul de rigiditate axială al cablului de manevră. La partea inferioară a modelului, masa m_n este masa sapei, care este liberă în timpul operațiilor de manevră și sprijinită pe rocă în timpul forării. Condițiile de rezemare la acest capăt al garniturii și dinamica dizlocării rocii influențează, după cum arată rezultatele obținute, în mare măsură răspunsul dinamic în deplasări sau eforturi al garniturii de prăjini.

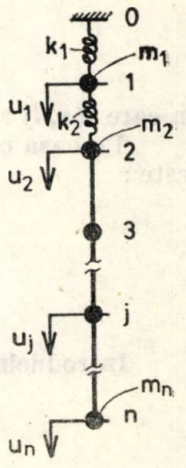


Fig. 1

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 5–6, 1991, P. 351–366

1. ECUAŢIA DE MIŞCARE A UNUI TRONSON CU MASĂ CONTINUĂ

Se consideră tronsonul j cu nodurile consecutive $j-1$ şi j (fig. 2a). Deplasările şi eforturile sînt pozitive cînd au sensul pozitiv al axei x, axa barei.

Se aleg ca parametrii de oscilaţie deplasările nodurilor în lungul axei garniturii.

Se izolează un element dx (fig. 2b) pe care, în conformitate cu principul lui d'Alambert, se introduce şi forţa de inerţie $dF^i = -\rho A\,\ddot{u}dx$, unde ρ este densitatea materialului prăjinilor şi A aria secţiunii transversale.

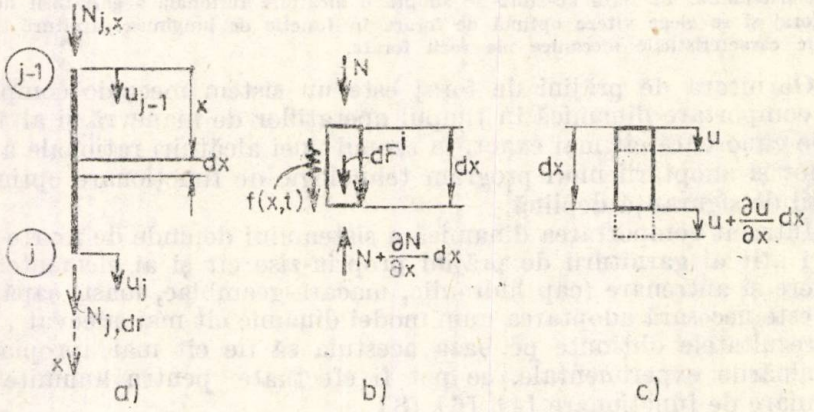


Fig. 2

Din echilibrul forţelor de pe element se obţine ecuaţia:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + \rho A\ddot{u} = f(x, t), \tag{1}$$

în care $f(x, t)$ reprezină intensitatea forţei perturbatoare.

Pe baza convenţiei de semne adoptate, relaţia dintre u şi N (fig. 2c) este:

$$N = -EA\varepsilon = -EA\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2}$$

Introducînd (2) în (1) se obţine ecuaţia diferenţială:

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x, t). \tag{3}$$

care descrie oscilaţiile unui punct oarecare al barei în lungul axei.

În absența forțelor perturbatoare, ecuația (3) devine :

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

și descrie oscilațiile libere. Se alege soluția ecuației (4) de forma

$$u(x, t) = U(x)\cos(pt - \theta). \tag{5}$$

Soluția (5), introdusă în (4), conduce la ecuația :

$$E\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \rho p^2 U(x) = 0. \tag{a}$$

Introducînd notația :

$$\alpha^2 = \frac{\rho}{E}p^2 \text{ sau } p = \alpha\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{6}$$

ecuația (a) devine :

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \alpha^2 U(x) = 0. \tag{b}$$

Soluția acestei ecuații,

$$U(x) = C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x, \tag{c}$$

precizează forma deformației barei la un moment dat.

Pe baza condițiilor la limită, $U(0) = U_{j-1}$ și $U(1) = U_j$, se obțin constantele $C_1 = U_{j-1}$ și $C_2 = \dfrac{U_j - U_{j-1}\cos\alpha l}{\sin\alpha l}$

și expresia (c) devine :

$$U(x) = U_{j-1}\left(\cos\alpha x - \frac{\sin\alpha x}{\operatorname{tg}\alpha l}\right) + U_j\frac{\sin\alpha x}{\sin\alpha l} \tag{7}$$

Introducînd (7) în (2) se obține expresia :

$$N(x) = EA\alpha\left[U_{j-1}\left(\sin\alpha x + \frac{\cos\alpha x}{\operatorname{tg}\alpha l}\right) - U_j\frac{\cos\alpha x}{\sin\alpha l}\right] \tag{8}$$

care permite determinarea forței axiale în orice secțiune în funcție de deplasările capetelor tronsonului.

2. MATRICEA DE RIGIDITATE DINAMICĂ A TRONSONULUI

Eforturile şi deplasările capetelor tronsonului j (cu nodurile $j-1$ j) se aranjează în vectorii coloană :

$$\underset{\sim}{U_j} = [U_{j-1} \quad U_j]^T : \underset{\sim}{N_j} = [N_{j,st} \quad N_{j,dr}]^T, \tag{9}$$

unde indicele superior indică operaţia de transpunere.

Particularizînd expresia (8) pentru $x = 0$ şi pentru $x = 1$, se obţin relaţiile :

$$N(0) = N_{j,st} = U_{j-1}\left(\frac{EA\,\alpha}{\operatorname{tg}\alpha l}\right) + U_j\left(-\frac{EA\,\alpha}{\sin\alpha l}\right);$$

$$N(1) = N_{j,dr} = U_{j-1}\left(\frac{EA\,\alpha}{\sin\alpha l}\right) - U_j\left(\frac{EA\,\alpha}{\operatorname{tg}\alpha l}\right);$$

care se aranjează sub forma :

$$\underset{\sim}{N_j} = \begin{bmatrix} N_{j,st} \\ N_{j,dr} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha l}{\alpha l} & -\dfrac{\alpha l}{\sin\alpha l} \\ -\dfrac{\alpha l}{\sin\alpha l} & \dfrac{\alpha l}{\operatorname{tg}\alpha l} \end{bmatrix} \tag{10}$$

sau mai concentrat :

$$\underset{\sim}{N_j} = \underset{\sim}{r_j} \cdot \underset{\sim}{U_j}. \tag{11}$$

Se pune astfel în evidenţă matricea :

$$\underset{\sim}{r_j} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha l}{\operatorname{tg}\alpha l} & -\dfrac{\alpha l}{\sin\alpha l} \\ -\dfrac{\alpha l}{\sin\alpha l} & \dfrac{\alpha l}{\operatorname{tg}\alpha l} \end{bmatrix}_{(j)} \tag{12}$$

denumită matricea de rigiditate dinamică la vribraţii axiale a tronsonului j, cu masă distribuită. Evident elementele E, A, l din (12) se referă la tronsonul j.

Pentru un tronson fără masă, cu constanta de elasticitate K, matricea de rigiditate dinamică la vibraţii axiale este :

$$\underset{\sim}{r_j} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}_{(j)} \tag{13}$$

Matricile (12) și (13) se pot pune sub forma generală :

$$\underset{\sim}{r_j} = \begin{bmatrix} S & s \\ s & S \end{bmatrix}_{(j)} \tag{14}$$

în care :

$$S = \begin{cases} EA\,\alpha \operatorname{ctg} \alpha l & \text{pentru tronsonul cu masă} \\ K & \text{pentru tronsonul fără masă} \end{cases} \tag{15}$$

și

$$s = \begin{cases} -\dfrac{EA\,\alpha}{\sin \alpha l} & \text{pentru tronsonul cu masă} \\ -K & \text{pentru tronsonul fără masă.} \end{cases} \tag{16}$$

3. ECUAȚIILE AMPLITUDINILOR SISTEMULUI ÎN VIBRAȚIA LIBERĂ

Așa cum s-a arătat, pentru modelul dinamic al sistemului se aleg ca parametri independenți, deplasările nodurilor u_j cu $j = 1, 2, \ldots, n$.

Izolînd nodul j(fig. 3a), introducînd forțele de legătură conform convenției adoptate și aplicînd legea a doua a dinamicii se obține ecuația de mișcare a nodului j :

$$m_j \ddot{u}_j = -N_{j,dr} - N_{j+1,st} \tag{17}$$

în care m_j este masa concentrată din nodul j, iar u_j are forma (5) :

$$u_j(t) = U_j \cos(pt - \theta). \tag{18}$$

Folosind (10), (14), (15), (16), (18) relația (17) se transformă în ecuația algebrică :

$$s_j U_{j-1} + (S_j + S_{j+1} - m_j \cdot p^2) U_j + s_{j+1} U_{j+1} = 0 \tag{19}$$

între amplitudinile nodurilor consecutive $j - 1, j, j + 1$.

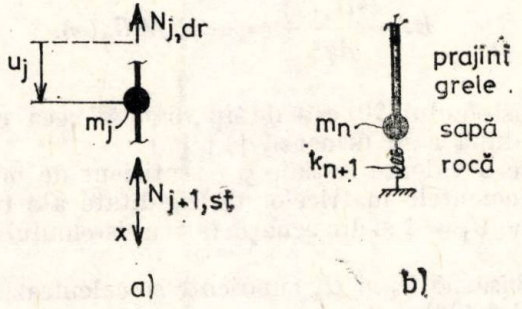


Fig. 3

Scriind ecuaţia (19) pentru toate nodurile garniturii, se obţine sistemul de ecuaţii algebrice

$$\begin{cases} (S_1 + S_2 - m_1 p^2) U_1 + s_2 U_2 = 0 \\ s_2 U_1 + (S_1 + S_2 - m_2 p^2) U_2 + s_3 U_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_j U_{j-1} + (S_j + S_{j+1} - m_j p^2) U_j + s_{j+1} U_{j+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_{n-1} U_{n-2} + (S_{n-1} + S_n - m_{n-1} p^2) U_{n-1} + s_n U_n = 0 \\ s_n U_{n-1} + (S_n - m_n p^2) U_n = 0 \end{cases} \tag{20}$$

care permite determinarea amplitudinilor nodurilor în vibraţia liberă stabilizată.

4. DETERMINAREA PULSAŢIILOR ŞI FORMELOR PROPRII DE OSCILAŢIE

Valorile p pentru care sistemul (20) are determinantul principal nul sînt tocmai pulsaţiile proprii axiale ale garniturii. Prin rezolvarea sistemului (20) pentru fiecare din pulsaţiile proprii, alegînd arbitrar una din amplitudini — de exemplu $U_1 = 1$ se obţin modurile proprii de oscilaţie.

Verificarea ortogonalităţii modurilor de osciaţie α şi β ($\alpha \neq \beta$) se poate face cu relaţia :

$$\sum m_j U_{j\alpha} U_{j\beta} + \sum \int_0^{l_j} \rho_j A_j U_{j\alpha}(x) \cdot U_{j\beta}(x)\, dx = 0, \tag{21}$$

în care $U_{j\alpha}$, $U_{j\beta}$ sînt soluţii ale sistemului (20), iar $U_{j\alpha}(x)$, $U_{j\beta}(x)$ sînt date de (7).

Se precizează, de asemenea, că fiecare formă proprie verifică ecuaţia (4), ceea ce conduce la relaţia :

$$EA \frac{\partial^2 U_\alpha(x)}{\partial x^2} = - p_\alpha^2 \rho A U_\alpha(x). \tag{22}$$

Matricea sistemului (20) este de tip „bandă" ceea ce permite o rezolvare iterativă, după cum urmează [1], [7] :

— se alege o valoare iniţială p — suficient de mică — pentru care se calculează elementele matricelor de rigiditate ale tronsoanelor ;

— se impune $U_1 = 1$ şi din ecuaţia întîi a sistemului (20), se calculează U_2;

— cu deplasările U_1 şi U_2 cunoscute se calculează U_3 din ecuaţia a doua a sistemului (20) ;

— se continuă acest mod de calcul pînă cînd, din ecuația $n-1$, se calculează U_n :

— ultima ecuație — în care se cunosc acum U_{n-1} și U_n — constituie relația de verificare. Dacă expresia din membrul drept este nulă (sau are o valoare suficient de mică), atunci valoarea p inițial aleasă este o pulsație proprie iar soluția (U_1, U_2, . . ., U_n) este un mod propriu de oscilație. Dacă expresia nu este nulă, atunci trebuie aleasă o altă valoare p, crescînd-o pe prima cu un anumit pas.

Forma (20) a ecuațiilor ce descriu mișcarea nodurilor corespunde situației în care partea inferioară a garniturii are deplasarea liberă (cazul manevrării prăjinilor).

Dacă se blochează deplasarea axială a nodului n (sapa), va trebui verificat restul ce rezultă în ecuația $n-1$, obținîndu-se astfel pulsațiile axiale proprii ale garniturii pentru situația forajului.

Algoritmul prezentat a fost transpus într-un program, numit „VLPF" (Vibrațiile Libere ale prăjinilor de Foraj), în limbajul BASIC.

5. ALGORITM PENTRU DETERMINAREA RĂSPUNSULUI DINAMIC PRIN METODA MODALĂ

Dacă pe elementul de bază din figura 2b se introduce și forța de frecare cu intensitatea

$$f_r = \frac{\mathrm{d}F_f}{\mathrm{d}x} = b\dot{u}, \tag{23}$$

unde b este constanta de amortizare, distribuită uniform, ecuația (3) ia forma :

$$A\ddot{u} + b\dot{u} - EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \tag{24}$$

și descrie oscilațiile generale ale tronsonului.

Se alege soluția vibrațiilor forțate sub forma :

$$u(x, t) = \sum_{\alpha} U_\alpha(x) q_\alpha(t), \tag{25}$$

în care $q_\alpha(t)$ este o funcție de timp care reprezintă ponderea armonicii α în amplitudinea u.

Introducînd (25) în (24) și ținînd seama de (22) se obține relația :

$$\sum_{\alpha} \rho A U_\alpha(x)\left(\ddot{q} + \frac{b}{\rho A}\dot{q} + p^2 q\right) = f(x, t), \alpha = 1, 2, 3, \ldots \tag{26}$$

Înmulţind relaţia (26) cu $U_\alpha(x)$ integrînd de-a lungul întregii lungimi L a sistemului şi ţinînd seama de ortogonalitatea formelor proprii (21), se obţine ecuaţia diferenţială :

$$\ddot{q}_\alpha + 2\beta_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha + p_\alpha^2 q_\alpha = \frac{\int_0^1 U_\alpha(x) f(x,t)\,dx}{\int_0^1 \rho A U_\alpha^2(x)\,dx}; \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots \tag{27}$$

în care s-a notat $\frac{b}{2A} = 2\beta_\alpha$. Dacă sistemul are şi mase concentrate (fig. 1) atunci la numitorul termenului din partea dreaptă se adaugă $\sum_j m_j U_{j\alpha}^2$.

Notînd membrul drept al ecuaţiei (27) cu $s_\alpha(t)$

$$s_\alpha(t) = \frac{\int_0^1 U_\alpha(x) f(x,t)\,dx}{\int_0^1 \rho A U_\alpha^2(x)\,dx}, \tag{28}$$

soluţia ecuaţiei diferenţiale (27) ia forma :

$$q_\alpha = \frac{1}{p_\alpha^*}\int_0^t s_\alpha(\tau)\cdot \exp[-\beta_\alpha p_\alpha (t-\tau)]\sin p_\alpha^*(t-\tau)\,d\tau +$$

$$+ \exp(-\beta_\alpha p_\alpha t)(B_\alpha \cdot \cos p_\alpha^* \cdot t + C_\alpha \sin p_\alpha^* \cdot t) \tag{29}$$

în care s-a notat $p_\alpha^* = p_\alpha\sqrt{1-\beta_\alpha^2}$.

Constantele de integrare B_α şi C_α se determină din condiţiile iniţiale. Dacă $q_\alpha(0) = \dot{q}_\alpha(0) = 0$, atunci $B_\alpha = C_\alpha = 0$.

După stabilirea parametrilor q_α, se determină deplasările cu (25) şi apoi forţa axială cu expresia (2).

Algoritmul a fost, de asemenea, transpus într-un program BASIC — „VFPE" (Vibraţiile forţate ale Prăjinilor de Foraj) — cuplat cu programul „VLPF".

6. PARTICULARIZAREA ALGORITMULUI PENTRU O GARNITURĂ DE PRĂJINI DE FORAJ

Particularizarea se va face pentru o garnitură de prăjini aflată în procesul de foraj, deci în interacţiune directă cu roca dislocată.

Primele două elemente vor fi de tipul „fără masă" (fig. 1), reprezentînd rigiditatea mastului (turlei) și respectiv, a înfășurării cablului de manevră. Următoarele elemente reprezintă tronsoane de prăjini caracterizate de aceeași arie a secțiunii transversale. Ultimul element este iarăși un element „fără masă" materializînd rigiditatea rocii prin constanta elastică K_{n+1}.

Primele două mase concentrate reprezintă: m_1 — masa redusă a mastului, iar m_2 — masa redusă a sistemului macara-cîrlig. Următoarele mase concentrate, aflate la granița elementelor, pot fi masele racordurilor speciale sau, pentru un calcul aproximativ, pot fi nule. Ultima masă concentrată m_n este masa sapei.

Perturbația va fi considerată de natură cinematică și anume: deplasarea sapei pe talpă luată de forma:

$$u_{n+1} = U_{n+1} \cos\omega t, \tag{30}$$

unde U_{n+1} este amplitudinea cunoscută a acestei deplasări, iar ω pulsația perturbației, considerată, de asemenea, cunoscută. Astfel:

$$s_\alpha(t) = \frac{U_{n,\alpha}\, u_{n+1}\, k_{n+1}}{\int_0^L \rho A u_\alpha^2(x)\mathrm{d}x + \sum_j m_j U_{j,\alpha}^2} = D_\alpha \cos\omega t, \tag{31}$$

unde

$$D_\alpha = \frac{U_{n,\alpha} \cdot K_{n+1}}{\int_0^L \rho A u_\alpha^2(x)\mathrm{d}x + \sum_j m_j \cdot U_{j,\alpha}^2} \tag{32}$$

este o constantă dependentă de ordinul armonicii α și de perturbația cinematică U_{n+1}.

Determinînd constantele D_α, se poate integra (numeric sau analitic) expresia din relația (29), găsind ponderile q_α necesare în (25) pentru calculul răspunsului dinamic $u(x, t)$.

Eforturile secționale se calculează cu expresia (2).

Apăsarea pe sapă — cauzată de perturbație — va apărea ca forță elastică în ultimul element al garniturii, cel cu constanta elastică K_{n+1}.

7. ANALIZA DINAMICĂ, NUMERICĂ, A UNEI GARNITURI DE PRĂJINI DE FORAJ

Se consideră trei momente în timpul săpării unei sonde de mare adîncime, momentele la care configurația garniturii este prezentată în figura 4.

7.1. PULSAȚII ȘI FORME PROPRII DE OSCILAȚIE

Pulsațiile proprii și formele proprii de oscilație au fost determinate

— pentru fiecare din cele trei lungimi ale garniturii, notate în continuare L_1, L_2 şi L_3 — în două cazuri diferite :

I — capătul inferior liber (cazul manevrării prăjinilor);

II — capătul inferior blocat axial (cazul săpării). În acest caz deosebim trei situaţii :

a. rocă puţin dură, $K_{n+1} = 5{,}245$ MN/m;

b. rocă dură, $K_{n+1} = 20{,}886$ MN/m;

c. rocă cu duritate infinită (caz ideal), $K_{n+1} = 10^3$ MN/m.

Rezolvarea sistemului (20), cu ajutorul programului „VLPF", a condus la rezultate numerice cuprinse în tabelele 1, 2 şi 3 în care se prezintă primele şase pulsaţii proprii.

Tabelul 1

CAZUL	L_1					
	$P_1\ s^{-1}$	$P_2\ s^{-1}$	$P_3\ s^{-1}$	$P_4\ s^{-1}$	$P_5\ s^{-1}$	$P_6\ s^{-1}$
I	2,92	8,91	15,21	21,76	28,37	34,69
II a	6,38	12,66	18,55	23,92	29,48	35,24
II b	6,62	13,29	19,96	26,45	32,46	37,55
II c	6,70	13,47	20,30	27,06	33,51	39,00

Tabelul 2

CAZUL	L_2					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
I	2,07	6,53	10,98	15,38	20,13	24,61
II a	4,54	9,25	13,56	17,89	21,96	25,78
II b	4,66	9,52	14,04	18,83	23,39	27,81
II c	4,70	9,60	14,18	19,05	23,70	28,31

Tabelul 3

CAZUL	L_3					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
I	1,66	5,13	8,12	11,47	14,93	18,61
II a	3,62	6,88	10,14	13,46	17,02	20,00
II b	3,69	7,00	10,38	13,84	17,66	20,93
II c	3,71	7,04	10,44	13,94	17,81	21,11

Evident, programul furnizează, la cerere, oricîte pulsații proprii precum și modurile proprii de oscilație, care nu au fost însă prezentate.

Se constată că pulsațiile proprii scad pe măsura creșterii lungimii garniturilor de prăjini , fapt evident ținînd seama de sporul de masă și de elasticizarea structurii.

În situația capătului inferior al garniturii liber, ceea ce corespunde operațiilor de manevră, pulsația fundamentală este, pentru fiecare caz în parte, de peste două ori mai joasă decît pulsația fundamentală corespunzătoare capătului inferior fix. Evident, la pulsațiile superioare intervin alte rapoarte, ceea ce din punct de vedere practic nu mai prezintă importanță.

Referitor la influența coeficientului de elasticitate al rocii, valorile pulsațiilor proprii din tabelele 1, 2 și 3 indică diferențe relativ mici, ceea ce îndreptățește aprecierea că pulsațiile proprii ale garniturilor de prăjini pot fi determinate folosind un coeficient de rigiditate mediu.

Pulsațiile proprii trebuie analizate însă în funcție de adîncimea sondei întrucît au variații importante care influențează puternic dinamica garniturii de prăjini și tehnologia de forare.

De asemenea, influența maselor m_1, m_2 și a coeficienților de rigiditate K_1 și K_2 aparținînd mastului și sistemului macara-geamblac este relativ scăzută asupra pulsațiilor proprii, care pot fi deci calculate considerînd capătul superior al garniturii cu fix.

7.2. RĂSPUNSUL DINAMIC AL GARNITURII DE PRĂJINI LA DEPLASĂRI ALE SAPEI

Se analizează răspunsul dinamic al garniturilor indicate în figura 4 a, b, c, pentru o deplasare impusă sapei de tip armonic (30). Amplitudinea U_{n+1} impusă sapei se consideră ca un parametru nedeterminat, astfel încît răspunsul dinamic axial al garniturii se pune sub forma u/U_{n+1}, care are forma unui coeficient dinamic. Determinarea funcției u/U_{n+1} pe baza algoritmului și programului din § 5, se efectuează pentru $K_{n+1} = 5{,}24$ MN/m, ceea ce corespunde unei roci moi. Cum funcțiile $s_\alpha(31)$ și $q_\alpha(29)$ sînt proporționale cu K_{n+1}, rezultă că valorile răspunsului dinamic sînt mai mari în roci dure.

În evaluarea răspunsului dinamic se ține seama de fenomenele de amortizare, considerînd $\beta_1 = 0{,}05$ și

$$\beta_\alpha = \beta_1 \cdot \frac{p_\alpha}{p_1} \tag{33}$$

în conformitate cu lucrările [5],[6], [8].

Întrucît turația garniturii variază în timpul procesului de forare, se analizează răspunsul dinamic pentru frecvențele tehnice $n \in \{40, 95\}$ rot/min care, în situația forajului cu sape cu trei role, conduc la pulsațiile $\omega \in \{12,5 ; 30\}$ rad/s. Analiza răspunsului dinamic pentru aceste pulsații permite o apreciere corectă a influenței pulsației asupra dinamicii garniturii și permite deci alegerea unei viteze optime de forare în cazul căreia efectele dinamice să fie reduse.

Răspunsul dinamic în deplasări axiale este prezentat pentru toate cele trei tipuri de garnituri (fig. 4) la capetele superioare ale tronsoanelor de prăjini şi în dreptul sapei, distanţele fiind precizate prin distanţa de la gura sondei.

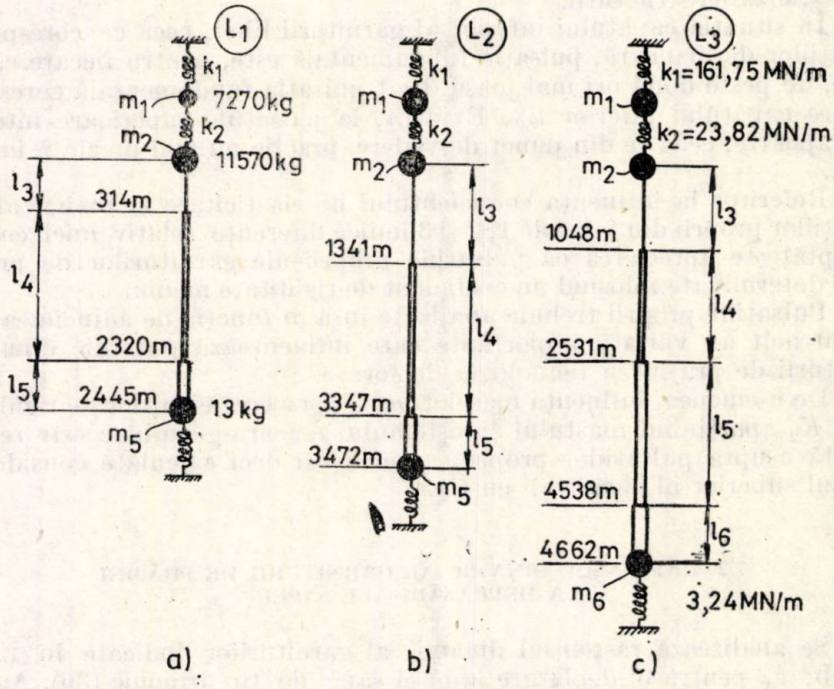


Fig. 4

În evaluarea răspunsului dinamic s-a ţinut seama de primele şase forme proprii de oscilaţie.

Răspunsul dinamic pentru situaţia L_1 este reprezentat în figurile 5 şi 6, pentru situaţia L_2 în figurile 7 şi 8, iar pentru situaţia L_3 în figurile 9 şi 10.

În toate situaţiile, răspunsul dinamic s-a limitat în timp la 1,5 s întrucît după acest timp oscilaţia este stabilizată.

Valorile maxime ale vibraţiilor forţate se manifestă la partea superioară a prăjinilor grele (ultimul tronson) în cazurile L_1 şi L_2 şi la nivelul sapei în cazul L_3.

Se observă o descreştere a maximelor odată cu creşterea lungimii prăjinilor de foraj şi aceasta se explică prin faptul că pulsaţia perturbatoare $\omega = 12{,}5$ rad/s este apropiată de armonica a doua în cazul L_1, de armonica a treia în cazul L_2 şi de armonica a patra în cazul L_3. Descreşterea este accentuată datorită amortizării relativ mari considerate în conformitate cu formula (33).

Unele măsurători experimentale [4] arată valori mai mici ale factorului de amortizare şi pentru o evaluare corectă a acestuia trebuie efectuate determinări experimentale riguroase, ţinînd seama de influenţa fluidului de foraj.

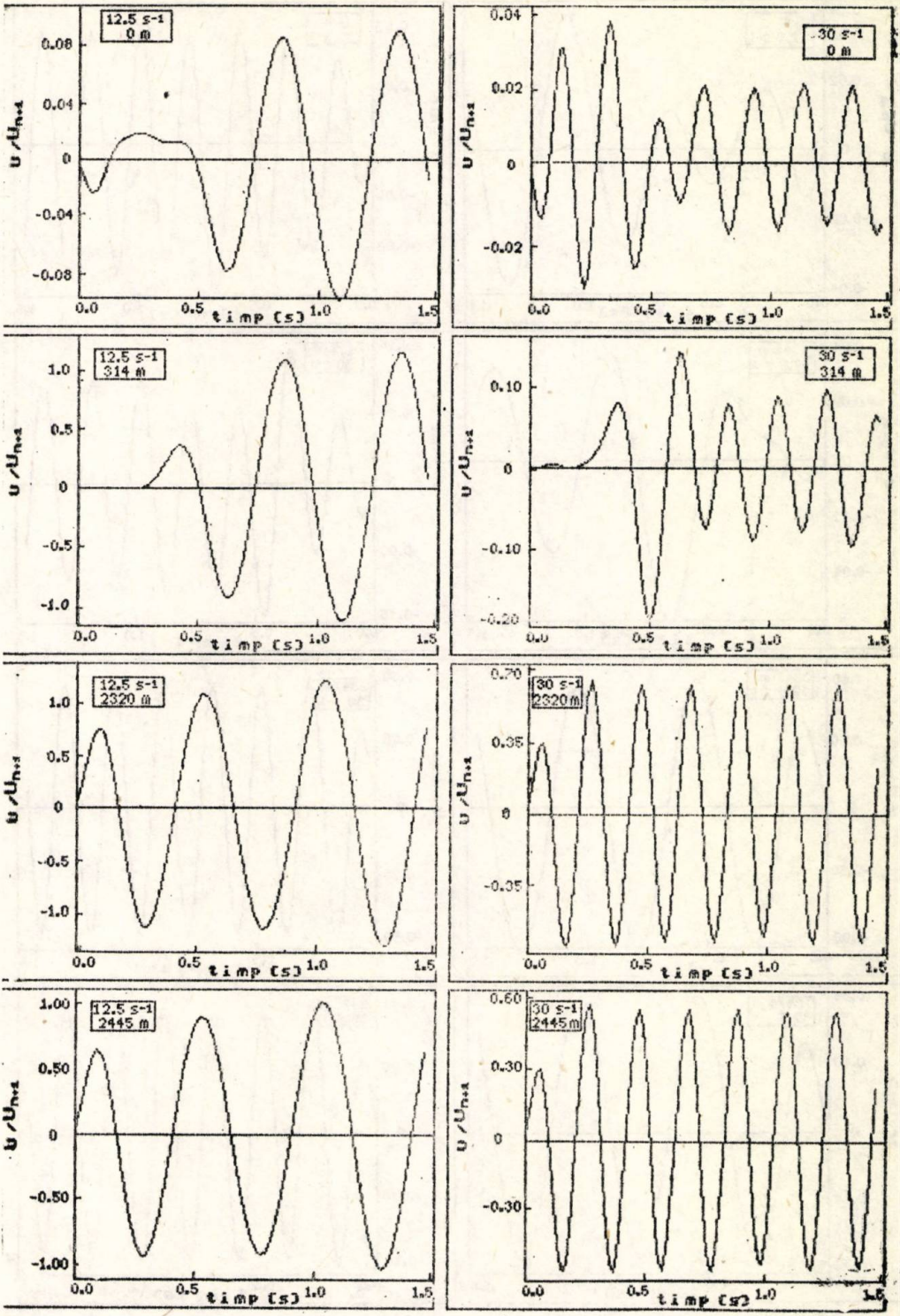

12.5 s-1
0 m
30 s-1
0 m
12.5 s-1
314 m
30 s-1
314 m
12.5 s-1
2320 m
30 s-1
2320 m
12.5 s-1
2445 m
30 s-1
2445 m
timp (s)

Fig. 5

Fig. 6

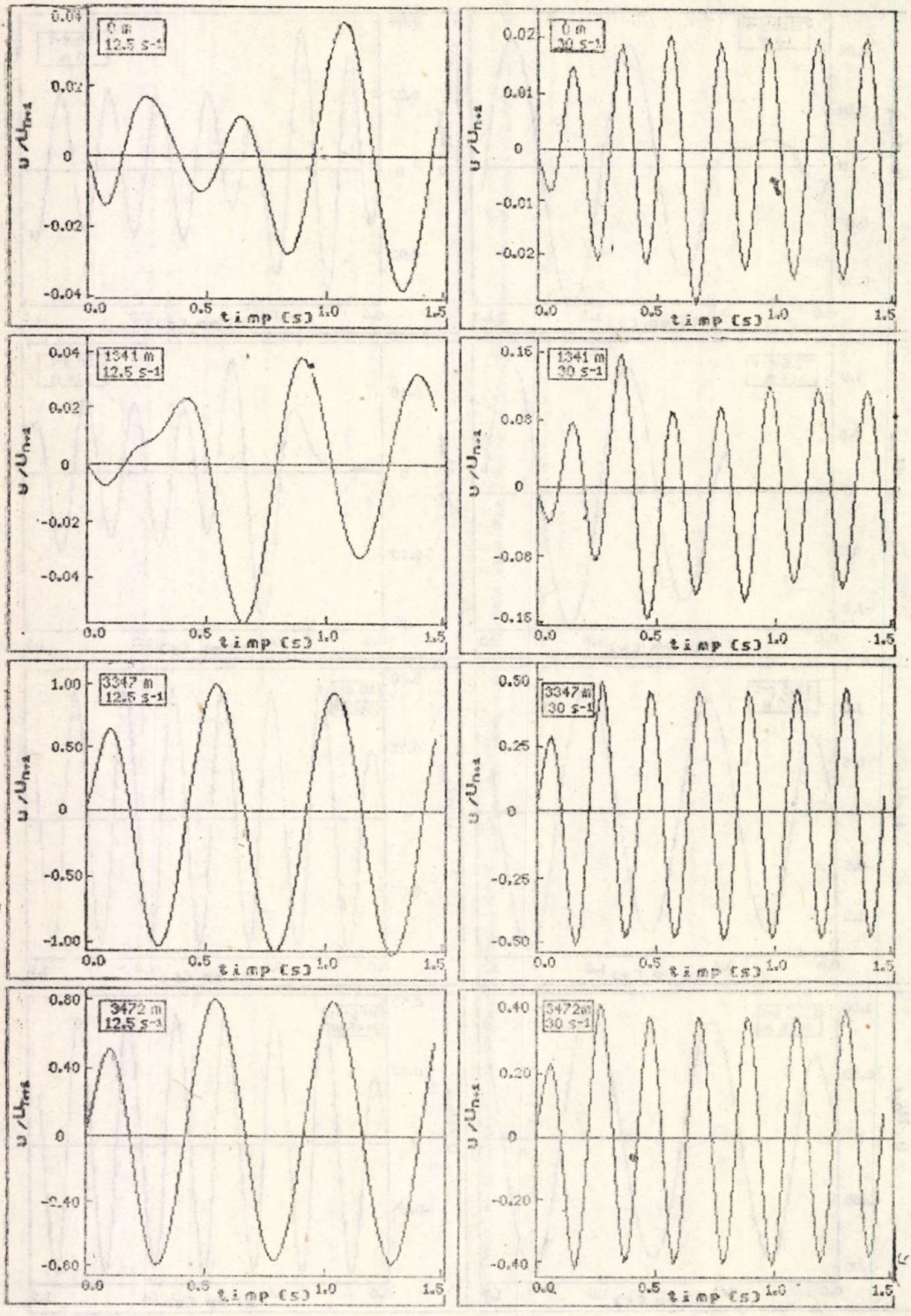
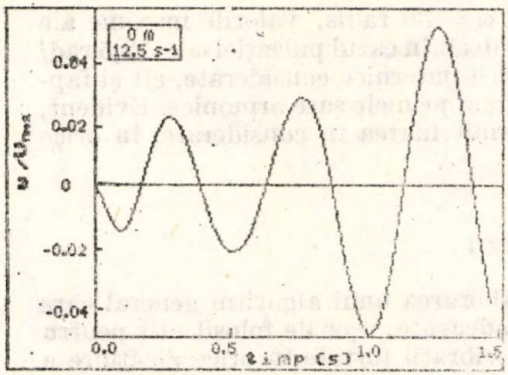
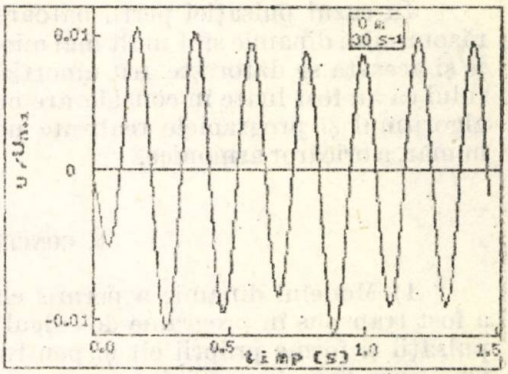
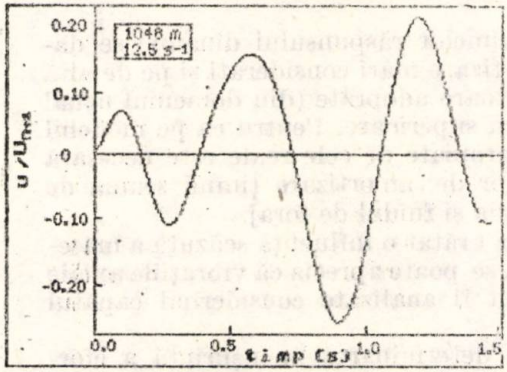
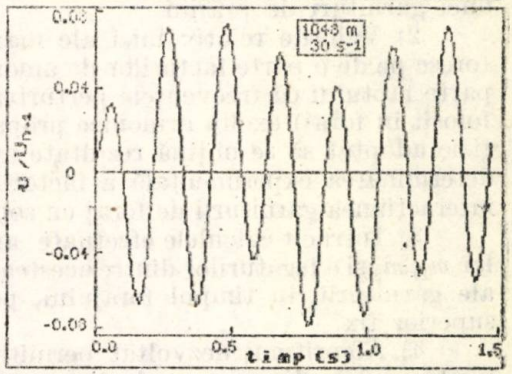

0 m
12,5 s-1
0 m
30 s-1
1341 m
12,5 s-1
1341 m
30 s-1
3347 m
12,5 s-1
3347 m
30 s-1
3472 m
12,5 s-1
3472 m
30 s-1
timp (s)

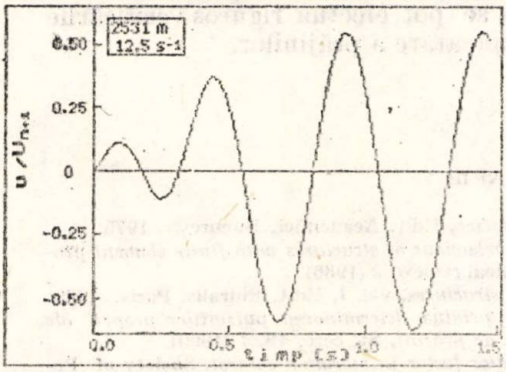
Fig. 7 Fig.

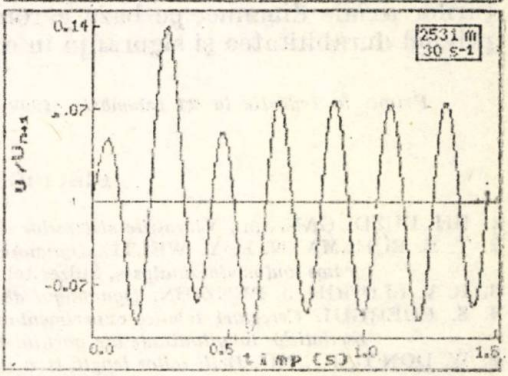

0 m
12,5 s-1
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
0.0
0.5
1.0
1.5
timp (s)

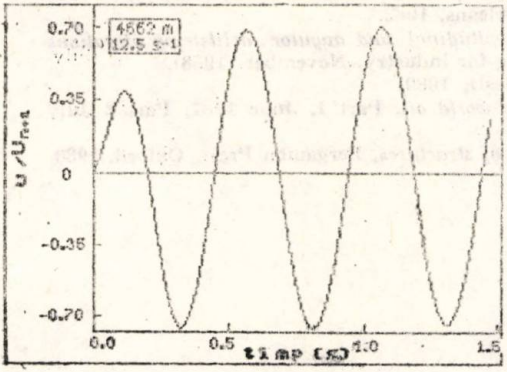

0 m
30 s-1
0.01
0
-0.01
0.0
0.5
1.0
1.5
timp (s)


1048 m
12,5 s-1
0.20
0.10
0
-0.10
-0.20
0.0
0.5
1.0
1.5
timp (s)


1048 m
30 s-1
0.04
0
-0.04
0.0
0.5
1.0
1.5
timp (s)


2531 m
12,5 s-1
0.50
0.25
0
-0.25
-0.50
0.0
0.5
1.0
1.5
timp (s)


2531 m
30 s-1
0.14
0.07
-0.07
0.0
0.5
1.0
1.5
timp (s)


4662 m
12,5 s-1
0.70
0.35
0
-0.35
-0.70
0.0
0.5
1.0
1.5
timp (s)

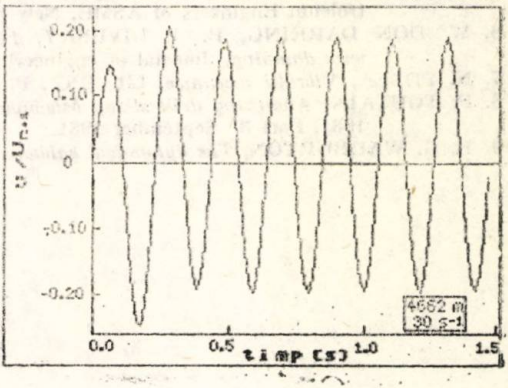

4662 m
30 s-1
0.20
0.10
0
-0.10
-0.20
0.0
0.5
1.0
1.5
timp (s)

Fig. 9

Fig. 10

În cazul pulsaţiei perturbatoare $\omega = 30$ rad/s, valorile maxime ale răspunsului dinamic sînt mult mai mici decît în cazul pulsaţiei $\omega = 12{,}5$ rad/s şi aceasta se datoreşte atît amortizării puternice considerate, cît şi faptului că au fost luate în considerare numai primele şase armonice. Evident, algoritmul şi programele realizate permit luarea în considerare, în orice număr, a oricăror armonice.

8. CONCLUZII

1) Modelul dinamic a permis elaborarea unui algoritm general care a fost transpus în programe de calcul adecvate, uşor de folosit atît pentru pulsaţii şi forme proprii cît şi pentru vibraţii forţate în orice alcătuire a unei garnituri de prăjini.

2) Valorile relativ mici ale maximelor răspunsului dinamic se datoresc pe de o parte factorilor de amortizare mari consideraţi şi pe de altă parte faptului că frecvenţele perturbatoare adoptate (din domeniul uzual folosit în foraj) excită armonice proprii superioare. Pentru ca pe modelul fizic adoptat să se obţină rezultate apropiate de cele reale este necesară determinarea experimentală a factorilor de amortizare ţinînd seama de interacţiunea garniturii de foraj cu sonda şi fuidul de foraj.

3) Întrucît calculele efectuate au arătat o influenţă scăzută a maselor m_1, m_2 şi a legăturilor dintre acestea, se poate aprecia că vibraţiile axiale ale garniturii, în timpul forajului, pot fi analizate considerînd capătul superior fix.

4) Algoritmul dezvoltat permite determinarea cu uşurinţă a eforturilor axiale dinamice pe baza cărora se pot efectua riguros verificările privind durabilitatea şi siguranţa în exploatare a prăjinilor.

Primit în redacţie la 27 octombrie, 1990

BIBLIOGRAFIE

1. GH. BUZDUGAN, ş.a., *Vibraţiile sistemelor elastice*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1975.
2. T. E. BÜHLMANN, P. Y. WELTE, *Dynamic behaviour of structures with finite element programs and modal analyses*, Sulzer tehnical review, *3* (1986).
3. R. V. CLOUGH, J. PENZIEN, *Dynamique des structures*, vol. I, Edit. Pluralis, Paris, 1980.
4. S. CHERGUI, *Cercetări tehnico-experimentale privind determinarea pulsaţiilor proprii ale oscilaţiilor longitudinale ale garniturii de prăjini*, St. cerc. **49**, *3* (1990),
5. W. DON DAREING, *Drill collar length is a major factor in vibration control*, Society of Petroleum Engineers of ASME, New Orleans, 1982.
6. W. DON DAREING, B. J. LIVESAY, *Longitudinal and angular drillstring vibrations with damping*, Journal of engineering for industry, November (1968).
7. N. POSEA, *Vibraţii mecanice*, Lit. IPG., Ploieşti, 1980.
8. P. TOUTAIN, *Analyzing drill string behaviour world oil*, Part I, June 1981, Part 2 July 1981, Part 3 September 1981.
9. B. G. WARBURTON, *The dynamical bahavior of structures*, Pergamon Press, Oxford, 1980

DIMENSIONAREA MELCULUI MAȘINII DE EXTRUDERE COMBINATE (DISC-MELC)

de GH. IORDACHE

Institutul Politehnic, București

Din corelarea debitului mașinii de extrudere cu disc cu al mașinii de extrudere cu melc, se obține o relație de dimensionare a înălțimii spirei de început a melcului mașinii de extrudere combinate.
De asemenea, pornind de la expresia componentei vitezei în lungul canalului melcului, se obține înălțimea spirei de ieșire a melcului.
Cele opt exemple de calcul avînd ca parametri variabili: diametrul melcului, temperatura topiturii și turația melcului, conduc la concluzia că relațiile stabilite, pentru prima oară, sînt utile în proiectarea mașinilor de extrudere combinate.

1. ASPECTE GENERALE

În dorința de perfecționare a procesului de extrudere s-a ajuns la ideea combinării avantajelor mașinii de extrudere clasice, cu melc, cu mașina de extrudere cu disc, un utilaj apărut mai de curînd printre utilajele de prelucrare a materialelor plastice.

Omogenizarea deosebit de bună a topiturii ca și construcția foarte simplă a mașinii de extrudere cu disc [1 — 5] la care se adaugă creșterea presiunii topiturii asigurată de un melc scurt, a condus la realizarea mașinii de extrudere combinate (fig. 1) [4, 7, 8].

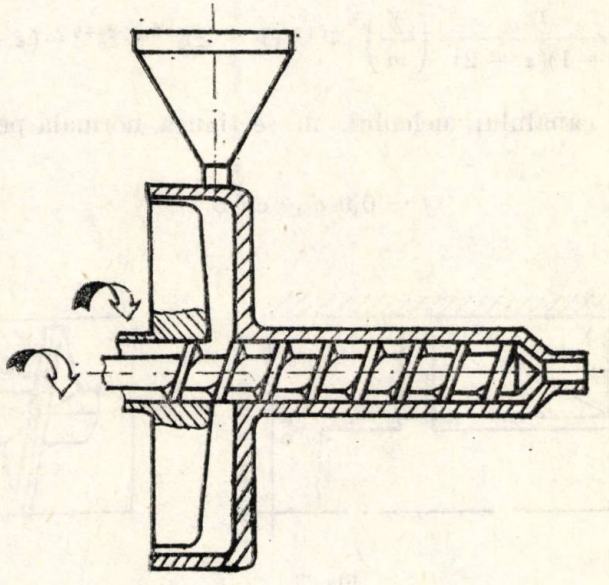


Fig. 1

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 5–6, 1991, P. 367–375

De la mașina de extrudere cu melc a fost preluată doar ultima zonă, așa numita zonă de pompare, discul asigurînd topitura necesară melcului. Prin eliminarea zonelor de alimentare și de tranziție de la mașina de extrudere cu melc [9] ca și prin asigurarea unei topituri cu omogenitate deosebită, de către disc, s-a putut reduce considerabil lungimea melcului.

S-a mai încercat combinarea mașinii de extrudere cu disc cu o pompă cu roți dințate [10]. Cu un astfel de utilaj s-a obținut presiunea în topitură de 3×10^7 N/m^2, ceea ce a permis extruderea de folie din polietilenă. Mașina de extrudere combinată (disc-melc), cu care s-a obținut 1×10^7 N/m^2, este un utilaj cu largi perspective în domeniul prelucrării materialelor plastice.

2. RELAȚIA DE CALCUL A ÎNĂLȚIMII SPIREI DE INCEPUT A MELCULUI

Înălțimea spirei melcului mașinii de extrudere combinate este variabilă. Spira de prelucrare a topiturii, furnizată de disc, are înălțimea mai mare decît spira de la evacuarea topiturii, realizînd astfel creșterea presiunii acesteia pentru împingerea prin capul de extrudere. Cunoscînd expresia debitului pentru mașina de extrudere cu melc [9], stabilită pentru zona de topitură și expresia debitului mașinii de extrudere cu disc [6] se poate deduce înălțimea spirei melcului mașinii combinate.

Debitul mașinii de extrudere cu melc, cu un singur început, în expresie volumică este [9]:

$$(Q_v)_m = \frac{f}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} \left(\frac{\bar{p}}{m}\right)^{\varepsilon} h^{\varepsilon+2}[(1-\xi)_0^{\varepsilon+2} + \xi_0^{\varepsilon+2} - (\varepsilon+2)\xi_0^{\varepsilon+1}], \quad (1)$$

unde lățimea canalului melcului, în secțiunea normală pe axa z este (fig. 1).

$$f = 0{,}9\, d_m \cdot \cos\varphi \quad (2)$$

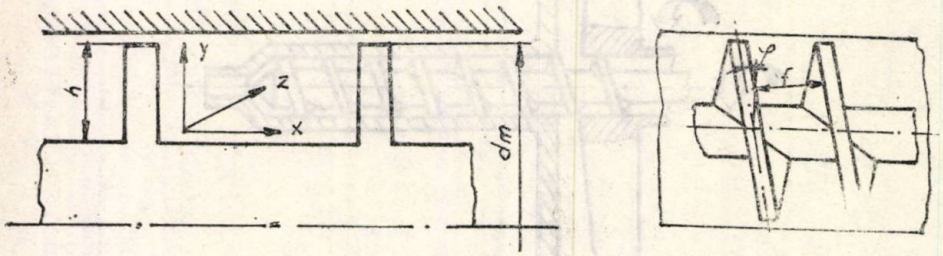


Fig. 2

în care: d_m este diametrul melcului: φ — unghiul de înclinare al spirei ($\varphi \approx 17°C0'$).

Notaţia $\bar{p}$ corespunde baropantei (gradientului de presiune, ϑ_p/ϑ_z); $m^{*)}$ — fiind constanta de material, iar $\varepsilon = 1/\nu$, unde ν este tot o constantă de material.

Cu ξ_0 s-a notat o mărime ce depinde de debitul relativ, care are expresia [9]:

$$\bar{Q} = \frac{(Q_v)_m}{Q_a} \tag{3}$$

unde Q_a este debitul de antrenare, a cărui relaţie de calcul este [9]:

$$Q_a = \frac{1}{2} f\ h\ V_z, \tag{4}$$

în care s-a notat V_z viteza de deplasare a materialului (topiturii) în lungul canalului (direcţiei axei z). Expresia de calcul este

$$V_z = \pi d_m \bar{n}\ \cos\varphi \tag{5}$$

unde $\bar{n}$ este turaţia în rot/s. Valoarea măririi ξ_0 se obţine din graficul prezentat în figura 3 [9], în funcţie de debitul relativ $\bar{Q}$ şi ε.

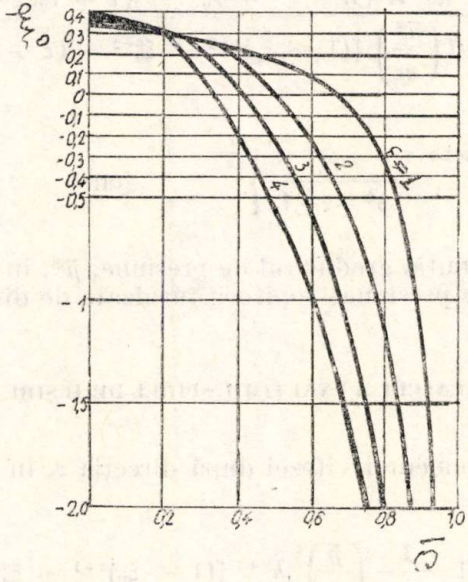


Fig. 3

*) m şi ν sînt constante din relaţia Ostwald — de Wale [9, 11, 12] care are forma

$$\tau = m\mathscr{R}^{\nu}$$

unde τ este tensiunea de forfecare; $\mathscr{R}$ — reopanta (gradientul de viteză).

Pentru mașina de extrudere cu disc, relația de calcul a debitului volumic este [6]:

$$(Q_v)_d = \frac{\pi\alpha^* H^2}{6m}\left(\frac{\omega_0}{H}\right)^{\beta^*-\nu+1}\frac{R^{\beta^*-\nu+1}-r_0^{\beta^*-\nu+1}}{\beta^*-\nu+1}\,r_0\ [\mathrm{cm^3/s}] \tag{6}$$

în care α^*, $\beta^{**)}$ constante de material; H — fanta dintre disc și stator; ω_0 — viteza unghiulară a discului; R — raza exterioară a discului; r_0 — raza orificiului de evacuare a topiturii [m și ν au aceeași semnificație ca în relația (1)].

Pentru ca melcul să poată prelua debitul furnizat de disc, trebuie ca acesta să fie egal cu debitul de intrare al melcului. Din egalarea celor două expresii [rel. (1) și (6)] se poate obține înălțimea spirei melcului:

$$h_0 = \left\{\frac{\dfrac{\pi\alpha^* H^2}{6m}\left(\dfrac{\omega_0}{H}\right)^{\beta^*-\nu+1}\dfrac{R^{\beta^*-\nu+1}-r_0^{\beta^*-\nu+1}}{\beta^*-\nu+1}\,r_0}{\dfrac{f}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}\left(\dfrac{\bar{p}^*}{m}\right)^{\varepsilon}\left[(1-\xi_0)^{\varepsilon+2}+\xi_0^{\varepsilon+2}-(\varepsilon+2)\xi_0^{\varepsilon+1}\right]}\right\}^{\frac{1}{\varepsilon+2}} \tag{7}$$

sau

$$h_0 = \left\{\frac{\pi\alpha^* H^2(R^{\beta^*-\nu+1}-r_0^{\beta^*-\nu+1})(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{6mf\left(\dfrac{\bar{p}^*}{m}\right)\left[(1-\xi_0)^{\varepsilon+2}+\xi_0^{\varepsilon+2}-(\varepsilon+2)\xi_0^{\varepsilon+1}\right]}\cdot\left(\frac{\omega_\omega}{H}\right)^{\beta^*-\nu+1}\frac{r_0}{\beta^*-\nu+1}\right\}^{\frac{1}{\varepsilon+2}}\ [\mathrm{cm}] \tag{8}$$

În relația obținută, gradientul de presiune, $\bar{p}^*$, în zona de început a melcului este dat de presiunea topiturii furnizate de disc.

3. RELAȚIA DE CALCUL A ÎNĂLȚIMII SPIREI DE IEȘIRE A MELCULUI

Expresia componentei vitezei după direcția z, în valoare maximă, este [9]:

$$V_z = 1\,\frac{1}{\varepsilon+1}\left(\frac{\bar{p}}{m}\right)^{\varepsilon} h^{\varepsilon+1}\left[(1-\xi_0)^{\varepsilon+1}-\xi_0^{\varepsilon+1}\right] \tag{9}$$

---

*) α^*, β^* — constante din expresia celei de a doua diferențe de tensiuni normale, $\sigma_2 - \sigma_3 = \alpha^* \mathscr{R}^{\beta^*}$, unde σ_2, σ_3 sînt tensiunile normale după direcțiile y și z; $\mathscr{R}$ — reopanta (gradientul de viteză). Valori ale diferențelor tensiunilor normale au fost măsurate [6, 11, 13–15], dar constantele α^* și β^* au fost determinate doar în [6].

Din relația (9) se poate obține expresia înălțimii spirei în zona de ieșire a topiturii.

$$h_e = \left\{ \frac{(\varepsilon + 1) V_z}{\left(\frac{\bar{p}}{m}\right)^{\varepsilon} [(1 - \xi_0)^{\varepsilon+1} - \xi_0^{\varepsilon+1}]} \right\}^{\frac{1}{\varepsilon+1}} \quad [\text{cm}] \qquad (10)$$

Cu excepția baropantei, $\bar{p}$, care este diferită, toate celelalte mărimi sînt aceleași cu cele din relația (8). Baropanta din această relație corespunde căderii de presiune pe lungimea melcului.

4. EXEMPLE DE CALCUL

Se va considera cazul unui extruder combinat (disc-melc) care lucrează cu polietilenă de fabricație indigenă, tip F 322/200. Se vor considera două temperaturi de lucru 483K (210°C) și 493 K (220°C). La aceste temperaturi constantele de material sînt [6]:

Tabelul 1

Temperatura	α^* daNs$^{\beta^*}$/cm^2	m daN·s$^{\nu}$/cm^2	β^*	ν
483K	0,00515	0,242	0,508	0,336
493K	0,00498	0,2155	0,492	0,323

Caracteristicile geometrice ale discului sînt:

— raza discului, $R = 7{,}5$ cm;

— raza orificiului de ieșire, $r_0 = 1{,}5$ cm și o a doua variantă $r_0 = 2{,}25$ cm (corespunzînd razei interioare a cilindrului melcului care preia topitura de la disc).

Turațiile de lucru ale discului vor fi 198 rot/min și o a doua variantă 282 rot/min. Fanta dintre disc și stator se consideră $H = 0{,}86$ cm.

Caracteristicile geometrice ale melcului sînt:

— diametrul melcului, $d_m = 3{,}5$ cm, iar a doua variantă $d_m = 45$ cm;

— lungimea melcului: în primul caz $L_m = 30$ cm, respectiv $L_m = 4{,}5$ cm.

Se apreciază presiunea de ieșire din capul de extrudere $\Delta p = 60$ daN/cm^2, respectiv 100 daN/cm^2 [7]. Aceste valori urmează să se realizeze din variația de înălțime a spirei, ce rezultă din calcul. Lățimea canalului melcului, calculată cu rel. (2) este $f = 2{,}575$ cm (pentru $d_m = 3{,}0$ cm) și $f = 3{,}8625$ cm (pentru $d_m = 4{,}5$ cm). Valoarea pentru $\bar{p}$ va fi ($\bar{p} = \Delta p / L_c$) 0,6014 daN/cm^3 respectiv 0,6682 daN/cm^2 (lungimea canalului $L_c = L_m / \sin\varphi$).

Debitele realizate de disc sînt indicate în tabelele 2 (debitul gravimetric) [6] și 3 (debitul volumetric).

Tabelul 2

Turația discului [rot/min]	$(Q_G)_d$, [kg/h]	
	Temperatura	
	483 K	493 K
198	12,32	12,9
282	19,0	20,6

Tabelul 3

Turația discului [rot/min]	$(Q_v)_d$, [cm³ s]	
	Temperatura	
	483K	493 K
198	4,55143	4,79728
282	7,01924	7,66078

Pentru obținerea debitului volumic, densitatea polietilenei a fost calculată cu relația [16]:

$$\rho = \frac{1}{0{,}900 + 0{,}00089\,T} \quad (T > 413\ \text{K}) \tag{11}$$

În cazul nostru la 483 K, $\rho = 0{,}75195$ g/cm³, iar la 493 K, $\rho = 0{,}74695$ g/cm³.

Pentru determinarea constantei ξ_0 trebuie să se calculeze debitul de antrenare [rel.(4)], pentru care este necesară calcularea componentei vitezei în lungul canalului [rel. (5)].

Melcul are antrenare separată de cea a discului, iar pentru a putea prelua debitul furnizat de disc melcul trebuie să fie prevăzut cu variație continuă de turație. Turația melcului se alege funcție de turația discului și de diametrul său, astfel ca debitul realizat de disc să poată fi preluat de melc. Valorile vitezei sînt prezentate în tabelul 4.

Pentru calculul debitului de antrenare s-a adoptat o înălțime medie a spirei, astfel pentru diametrul melcului de 3,0 cm s-a ales $h_m = 0{,}35$ cm, iar pentru diametrul de 4,5 cm, $h_m = 0{,}4$ cm. În final, dacă valoarea înălțimii medii diferă mult de valoarea adoptată, se reface calculul cu valoarea reală. Folosind relația (4) se obțin valorile debitului de antrenare, psezentate in tabelul 5.

Tabelul 4

Turația discului [rot/min]	Diametrul melcului [cm]	Turația melcului [rot/min]	Componenta V_z a vitezei [cm/s]
198	3,0	100	14,98095
	4,5	40	8,98857
282	3,0	140	20,9733
	4,5	55	12,35928

Tabelul 5

Turația discului [rot/min]	Diametrul melcului [cm]	Turația melcului [rot/min]	Q_a [cm³/s]
198	3,0	100	6,75079
	4,5	40	6,94367
282	3,0	140	9,45110
	4,5	55	9,54754

Utilizînd datele din tabelele 3 și 5, cu observația că debitul melcului este egal cu debitul furnizat de disc, deci $(Q_v)_m = (Q_v)_d$ și folosind relația (3) se calculează valorile debitului relativ, $\bar{Q}$ (tabelul 6).

Cu datele din tabelul 6 și cu valorile $\varepsilon = 2{,}9762$, la 483 K și $\varepsilon = 3{,}09597$, la 493 K ($\varepsilon = 1/\nu$) se obțin valorile constantei ξ_0 din diagrama prezentată în figura 3. Aceste valori sînt indicate în tabelul 7.

Tabelul 6

Turația discului [rot/min]	Diametrul melcului [cm]	Turația melcului [rot/min]	$\bar{Q} = (Q_v)_d/Q_d$ Temperatura 483 K	493 K
198	3,0	100	0,6742	0,71082
	4,5	40	0,65548	0,69088
282	3,0	140	0,7426	0,81056
	4,5	55	0,73518	0,80238

Tabelul 7

Turația discului [rot/min]	Diametrul melcului [cm]	Turația melcului [rot/min]	ξ_0 Temperatura 483 K	493 K
198	3,0	100	1,0	1,1
	4,5	40	−0,8	0,9
282	3,0	140	1,4	1,65
	4,5	55	1,2	1,6

Baropanta (gradientul de presiune) din relația (8) se consideră egală cu presiunea topiturii la ieșirea din zona discului raportată la 1 cm lungime de melc. Pe această distanță presiunea topiturii nu crește practic deloc. Cu această condiție baropanta la intrarea topiturii în zona melcului este [6] (tabelul 8) :

Tabelul 8

Turația discului [rot/min]	$\bar{p}^*$ daN/cm³ Temperatura 483 K	493 K
198	1,35	1,23
282	1,55	1,46

Cunoscînd toate mărimile din relaţiile (8) şi (10) se poate determina înălţimea spirei melcului, la ieşire şi la intrare (ieşirea şi intrarea topiturii, respectiv capul melcului şi coada sa). Valorile obţinute au fost inserate în în tabelul 9.

Tabelul 9

Turaţia discului [rot/min]	Diametrul melcului [cm]	Turaţia melcului [rot/min]	h_0, [cm]		h_e, [cm]	
			Temperatura			
			483 K	493 K	483 K	493 K
198	3,0	100	0,358	0,333	0,7188	0,610
	4,5	40	0,360	0,334	0,645	0,546
282	3,0	140	0,2943	0,254	0,6617	0,535
	4,5	55	0,290	0,234	0,543	0,415

5. CONCLUZII

Analizînd rezultatele prezentate în tabelul 9 se constată că :

— înălţimea spirei scade cu creşterea temperaturii, la acelaşi diametru de melc, deoarece viscozitatea topiturii scade şi deci curge mai uşor ;

— în general înălţimea spirei scade cu creşterea diametrului, datorită faptului că debitul furnizat de disc a rămas acelaşi pentru ambele diametre de melc (în aceste exemple) ;

— la acelaşi diametru şi aceeaşi temperatură înălţimea spirei scade cu creşterea turaţiei.

Cele două relaţii obţinute permite corelarea debitelor a două maşini de extrudere diferite (cu disc şi cu melc) prin intermediul unui parametru geometric, înălţimea spirei melcului.

Relaţiile sînt utile pentru proiectarea unor astfel de maşini, fiind prima încercare cunoscută în literatură, pentru stabilirea unor parametri geometrici ai maşinii de extrudere combinate.

Primit în redacţie la 22 februarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. J. E. HENRY, C. E. PLYMALE, *Applications of the Elastic Melt Extruder*, SPE Journal, **21** (1965).
2. IU. G. OSTAPCIUK, M. L. IAZLOVIŢKII, V. V. BERNAŢKII, N. K. JUK, K. K. BACINSKII, IA. G. KUZMIN, *Diskovie extruderi*, Izd. Tehnika, Kiev, 1972, p. 51—59.
3. P. P. PROHODCENKO, Naucino — issledovatelskie i optino-konstrucstorskie raboti Ukrniimplastmasa, **11** (1967).
4. H. G. FRITZ, *Konstrukzia des Machines Weissenberg*, Kunststoff Technik, **7** (1968).
5. J. W. JANKOW, *Zu einigen Problemen der Ermittlung rheologisher Grössen*, Plaste und Kautschuk, **31** (1984).
6. GH. IORDACHE, *Contribuţii la teoria extruderelor fără melc*, Teză de doctorat, IPB, 1987.

7. E. A. SPORIAGHIN, *Rabota kombiniravannîh extruderov*, Plasticeskie massî, **10** (1968).
8. V. K. ZAVGORODNÎI, *Oberudovanie predpriatii po pererabotka plastmass*, Izd. Himiia, Leningrad, 1972, p. 268.
9. M. RENERT, *Calculul și construcția utilajului chimic*, vol. II, ed. II, Ed. didactică și pedagogică, București, 1971, p. 520, 539.
10. V. L. KOTCEROV, J. J. LUCACI, V. N. NENNO, E. A. SPORINGHIN, *Untersuchnung das Weissenberg — und des Kombinierten Extrusionverfahrens*, Plaste und Kautschuk, **19** (1972).
11. A. S. LODGE, *Elastic Liquids*, Academic Press, London — New York, 1964, p. 70.
12. A.H. P. SEKELLAND, *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, Joh Wiley and Sons, New York — London — Sydney, 1967, p. 52
13. J. F. HUTON, *Fracture and Secondary Flow of Elastic Liquids*, Rheologica Acta, **8** (1968).
14. M. H. WAGNER, *Predication of primary normal stress difference from viscosity dala using a single integrale constitutive equation*, Rheologica Acta, **16** (1977).
15. D.T.C. MORGAN, K. PANELL, *Normal stress measurements on dragreducing polymer solutions*, Rheologica Acta, **11** (1972).
16. R. A. V. RAFF, J. B., ALLISON, *Polyetilen-High Polymer*, vol. XI, Interscience Publishers Inc., New York, 1956, p. 301.

METODA MARGINILOR RIGIDIZATE

de PH. RIGO

Universitatea din Liège

Se descrie elaborarea metodei marginilor rigidizate pentru calculul unei serii întregi de lucrări inginerești cum sînt porțile de ecluze, stavilele, digurile pentru flux și furtuni, navele și vasele, tablierele de poduri, diafragmele de compartimentare și acoperișurile în șed. Avantajul metodei constă în faptul că se pleacă de la soluția analitică a ecuațiilor diferențiale ale problemei plăcilor plane și cilindrice circulare subțiri ortotrope, de grosime constantă, cu introducerea seriilor trigonometrice. În baza acestei soluții, autorul a elaborat programul de calcul L.B.R. — 3 care se caracterizează prin simplitate, rapiditate, rezultate precise și variate, precum și o largă accesibilitate. Trei exemple de calcul (studiul unui pod-canal, studiul unei vane-cheson, poartă flux-furtună) încheie studiul.

1. INTRODUCERE

Lucrările hidrotehnice, cum sînt porțile de ecluze și stavilele sînt structuri simple ca principiu dar al căror calcul s-a dovedit totdeauna a fi extrem de delicat. Pentru a ușura munca de concepție și de a permite proiectanților să-și optimizeze proiectele, am elaborat o metodă numită *metoda marginilor rigidizate*.

Domeniul de aplicare al acestei metode este constituit de construcțiile hidrotehnice metalice și construcțiile navale. Acesta este cazul porților de ecluze (fig. 1), al stavilelor, al digurilor pentru flux și furtuni, al navelor și vaselor (fig. 2). Totodată și alte structuri cum sînt tablierele de poduri, diafragmele metalice de compartimentare, acoperișurile în șed sînt susceptibile de a fi studiate.

Toate aceste structuri au o caracteristică comună; ele posedă o rigiditate de anasmblu considerabilă. Într-adevăr, este vorba de structuri care trebuie să reziste unor forțe hidrostatice puternice și unor presiuni hidrodinamice importante. Aceste lucrări trebuie să suporte aceste solicitări fără să sufere deformații mari. Într-adevăr, mecanismele și etanșările aferente acestor lucrări nu permit producerea unor deformații mari.

Solicitările sînt relativ uniforme. Într-adevăr, la un moment dat, într-un același plan orizontal, acțiunea apei, a unui curent sau al hulei, sînt identice ca distribuție, dar cu intensități diferite.

Necesitatea unei rigidități de ansamblu puternice și uniformitatea solicitărilor au determinat pe ingineri să rigidizeze sistematic și de o manieră regulată carcasele metalice constituind coca navelor, porțile de ecluze, barajele mobile, etc.

Această rigidizare poate să fie simplă, dublă și chiar triplă. Într-adevăr nu arareori se întîlnesc grinzi puternice legînd reazemele de o parte și de alta a structurii. Aceste grinzi numite *traverse* reprezintă scheletul principal al structurii. Pentru a transmite încărcările traverselor și a asigura o rigidizare transversală, sînt dispuse curent *longrine*. În multe

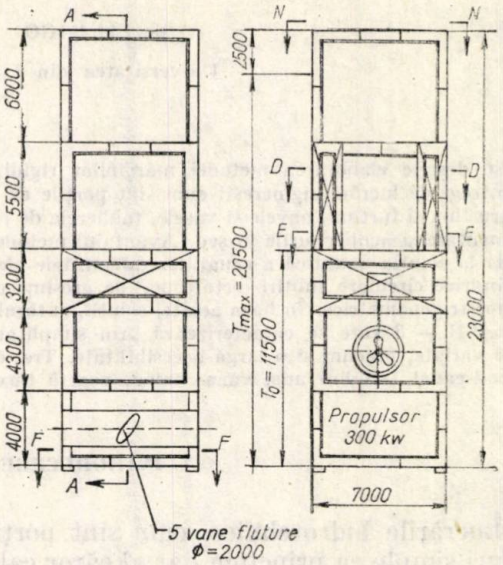


Fig. 1. — Poartă de ecluză cu deplasare laterală dotată cu chesoane de flotare.

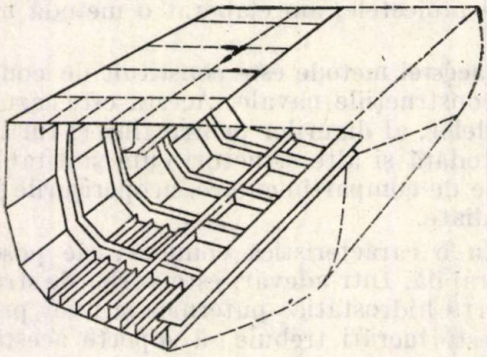


Fig. 2. — Vederea transversală a unei carcase de vas.

cazuri sînt prevăzute deasemeni *rigidizări secundare*, care ușurează bordajul și transmit încărcările numitelor *longrine*. Figurile 3 și 4 sînt exemple de panouri curbe, respectiv plane, rigidizate cu ajutorul a două feluri de nervuri. Un număr de structuri moderne, constituite din panouri ortotrope sînt deci susceptibile de a fi studiate cu ajutorul metodei marginilor rigidizate.

Din totdeauna inginerul întîmpină dificultăți la dimensionarea structurilor rigidizate puternic. Din lipsa unui instrument de calcul destul de eficient și adaptat acestui gen de construcții, el s-a mulțumit adesea cu metode aproximative, empirice sau experimentale. Urmarea acestei alegeri este faptul că mare număr de structuri hidrotehnice, de nave și de tabliere de pod sînt supradimensionate pentru a prezenta o siguranță suficientă.

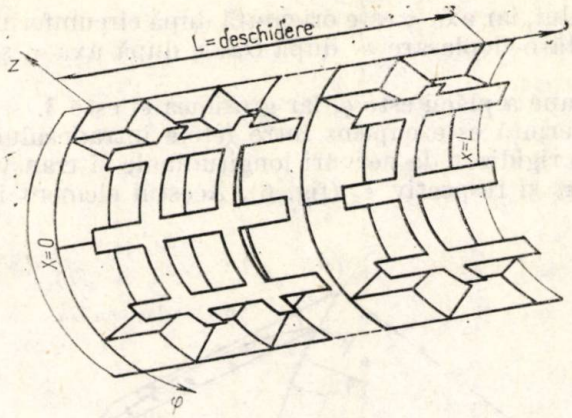


Fig. 3. — Placă cilindrică ortotropă rigidizată cu nervuri după două direcții.

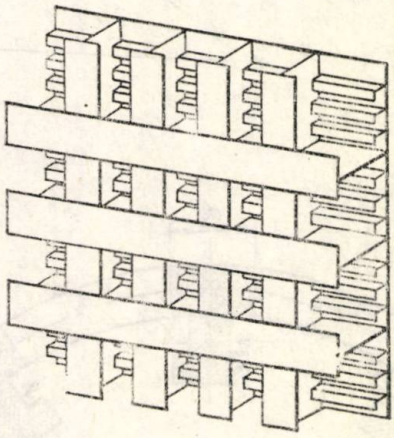


Fig. 4. — Placă ortotropă rigidizată cu traverse, longrine și rigidizări secundare.

Se înțelege deci că o tehnică de calcul specifică construcțiilor hidrotehnice era așteptată de multă vreme de ingineri. Această metodă o propunem sub forma programului pentru calculul marginilor rigidizate L.B.R. — 3*).

2. BAZELE TEORETICE ALE METODEI

Această metodă de calcul a plăcilor plane și cilindrice ortotrope (fig. 3 și 4) îmbină simplitatea și rapiditatea cu o mare precizie a rezultatelor, precizia fiind asigurată de rezolvarea analitică a ecuațiilor diferențiale de bază ale plăcilor cilindrice de grosime constantă. Ecuațiile diferențiale de bază [1] se bazează pe metoda Donnel, von Kármán și Jenkins.

Elementul de bază îl constituie placa subțire cilindrică, iar sistemul de coordonate utilizat este reprezentat în figura 5. Axa x-ilor este dirijată

*) În limba franceză inițialele denumirii *Logiciel des bordages raidis.*

după generatoarele cilindrului, iar axa φ este orientată după circumferință. Fiecărei axe îi este asociată o deplasare u după Ox, v după axa φ și w după Oz.

Raza suprafeței mediane a plăcii este q, iar grosimea ei este δ.

Acest element de referință este cuprins între fețele intradosului și extradosului plăcii; el este rigidizat de nervuri longitudinale și transversale, situate la distanțele ε_x și respectiv ε_φ (fig. 6). Acestui element i se

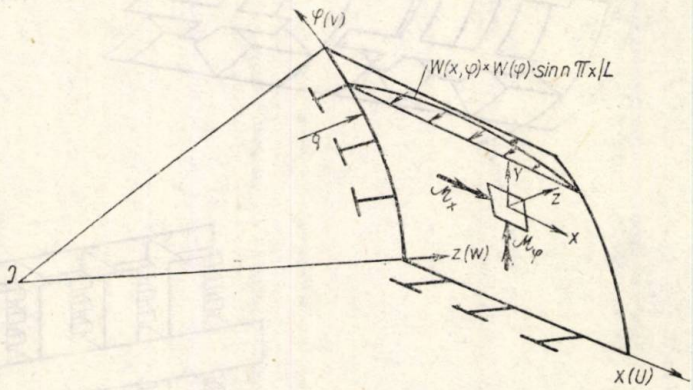


Fig. 5. — Placă subțire cilindrică cu rigidizări.

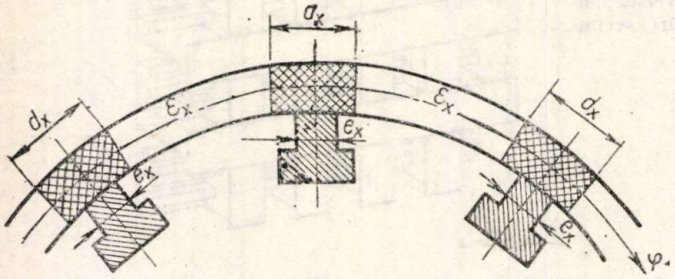


Fig. 6. — Elemente de rigidizare longitudinale.

asociază eforturile și momentele pe unitatea de lățime de placă, raportate la suprafața mediană (fig. 7). Ele sînt notate N_x, N_φ, $N_{x\varphi}$, $N_{\varphi x}$, Q_x, Q_φ, M_x, M_φ, $M_{x\varphi}$, și $M_{\varphi x}$; exemplificativ redăm expresiile lui N_x și M_x:

$$N_x = \frac{E\delta}{q(1-\nu^2)}(u'q + \nu v^0 + \nu w) + f(\varphi)\frac{E}{d_x}(u'\omega_x - w''h_x), \qquad (1)$$

$$M_x = \frac{E\delta^3}{q^2(1-\nu^2)}(q^2 w'' + \nu w^{00}) - f(\varphi)\frac{E}{d_x}(u'h_x - w''I_x) \qquad (2)$$

în care $w^0 = \dfrac{dw}{d\varphi}$, $w' = \dfrac{dw}{dx}$, $w'^0 = \dfrac{d^2w}{dx\,d\varphi}$, ...

ω_x și h_x coeficienți caracteristici ai geometriei nervurilor

d_x lățimea nervurilor (fig. 6).

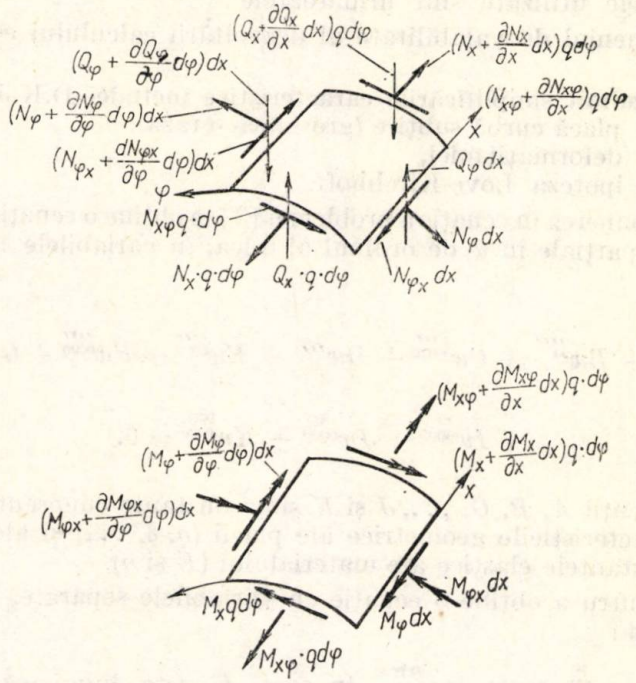


Fig. 7. — Eforturile şi momentele pe unitatea de lăţime de placă.

Funcţiile $f(\varphi)$ sînt funcţii compuse din funcţiile Heaviside [2] şi ele permit obţinerea unor funcţii (fig. 8) perfect compatibile cu geometria sistemului (fig. 6). Aceste funcţii $f(\varphi)$ sînt egale cu unitatea, dar se anulează în afara intervalelor d_x unde sînt nervurile (fig. 6 şi 8).

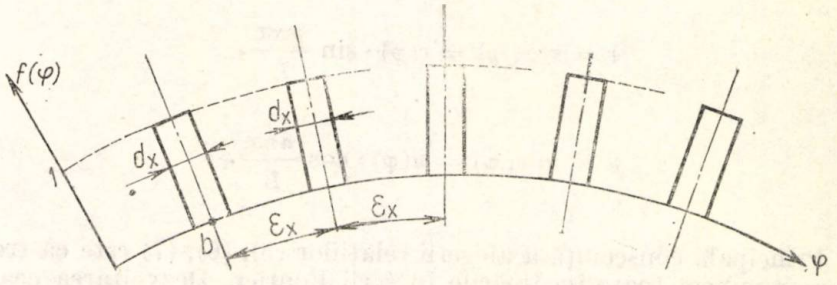


Fig. 8. — Variaţia funcţiei $f(\varphi)$ care permite să se ţină seama exact de poziţia diferitelor nervuri.

Suprafaţa mediană preia încărcarea exterioară (fig. 5) care se împarte după cum urmează : X, Y, Z componentele încărcării de suprafaţă (în N/m²) şi $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_\varphi$, $\mathcal{M}_z$ momentele de suprafaţă (în Nm/m²).

Ipotezele utilizate sînt următoarele :

— domeniul de valabilitate al dezvoltării calculului este domeniul elastic,

— se admit simplificările caracteristice metodei D.K.J.) şi anume
  — placă curbă subţire (grosimea ≪raza),
  — deformaţii mici,
  — ipoteza Love-Kirchhoff.

După punerea în ecuaţie a problemei [3] se obţine o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale în w de ordinul al 8-lea, în variabilele independente x şi φ :

$$Aw'''' + Bw''' + Cw''^{00} + Dw'''' + Ew^{00''''} + Fw^{0000''''} + Gw''^{00} +$$

$$+ Iw^{0000''} + Jw^{0000''00} + Kw^{0000}{}^{0000} = 0. \tag{3}$$

Coeficienţii A, B, C, ..., J şi K sînt constante cunoscute depinzînd doar de caracteristicile geometrice ale plăcii (q, δ, ...) şi ale nervurilor, ca şi de constantele elastice ale materialului (E şi ν).

Dar pentru a obţine o ecuaţie cu variabilele separate, sîntem conduşi să luăm :

$$w(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} w(\varphi) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{în care } L \text{ este lungimea plăcii} \tag{4}$$

în lungul plăcii Ox,

ceea ce se traduce pentru componentele deplasării corespunzătoare termenului n din dezvoltarea în serie :

$$w = w(x, \varphi) = w(\varphi) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{5}$$

$$v = v(x, \varphi) = v(\varphi) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{6}$$

$$u = u(x, \varphi) = u(\varphi) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{7}$$

Principala consecinţă a alegerii relaţiilor (5), (6), (7) este că trebuie să descompunem toate încărcările în serii Fourier. Dezvoltarea cea mai simplă este aceea a unei încărcări uniforme în sensul axei Ox, cum este presiunea hidrostatică Z. Figura 9 arată variaţia primilor trei termeni ai seriei, luaţi separat şi apoi însumaţi. Se observă că o dezvoltare în serie Fourier cu primii trei termeni este deja satisfăcătoare.

Încărcări exterioare (fig. 10) utilizate curent sînt *eforturile marginale* N_b *momentele marginale* M_b. Aceste încărcări acţionează în lungul marginilor de capăt $x = 0$ şi $x = L$ ale fiecărui element de placă plană sau

curbă subțire. Aceste eforturi N_b și momente M_b sînt numite *efecte de margini*. Ele permit să fie studiate structuri simplu rezemate, dublu încastrate sau încă rezemate elastic [4]. Astfel ele vor permite să fie simulate, de exemplu, eforturile și momentele pe care le transmit brațele la extremitățile unei vane segment de baraj mobil (fig. 11).

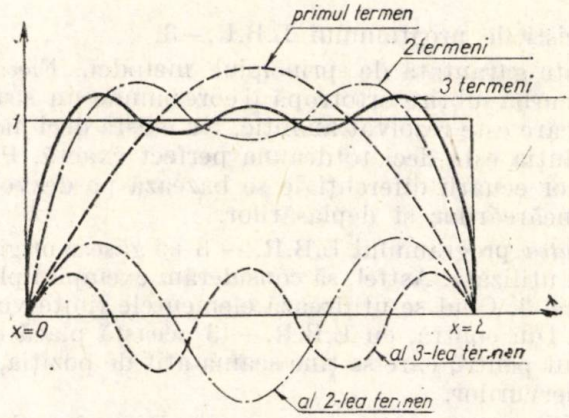


Fig. 9. — Dezvoltarea în serie Fourier a unei încărcări uniforme unitate.

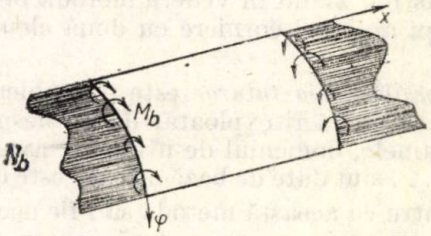


Fig. 10. — Eforturi marginale N_b și momente marginale M_b.

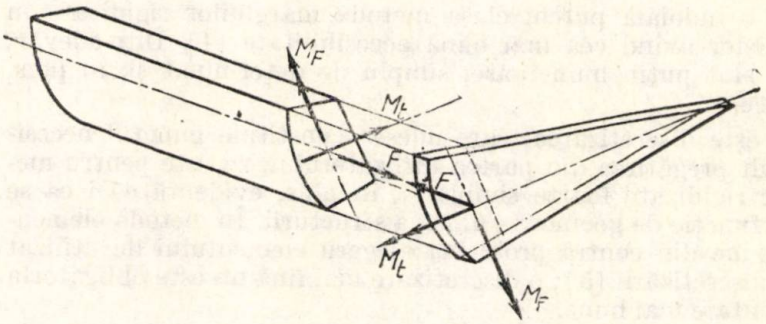


Fig. 11. — Eforturi și momente de legătură între vană și brațe.

3. PROGRAMUL DE CALCUL L.B.R.—3 BAZAT PE METODA MARGINILOR RIGIDIZATE

Acest program de calcul întrunește numeroase avantaje, simplitate, rapiditate, rezultate precise și variate (tensiuni, eforturi, momente și deplasări) și o accesibilitate tuturor.

Totuşi, spre deosebire de toate metodele specifice, L.B.R. — 3 nu este aplicabil decît în domeniul său, acesta putînd fi descris după cum urmează : orice structură posedînd o axă după care este dezvoltată. Ca exemplu, un cilindru corespunde dezvoltării unui cerc în lungul unei generatoare. Astfel, porţile de ecluze, tablierele de poduri, pereţii navelor, ... sînt în egală măsură structuri posedînd o axă privilegiată după care sînt dezvoltate.

Să detaliem caracteristicile programului L.B.R.—3.

Exactitatea soluţiei este garantată de principiul metodei. Fiecărui element de placă plană sau curbă subţire ortotropă îi corespunde un sistem de trei ecuaţii diferenţiale care este rezolvat analitic. Nu există deci nici o ipoteză simplificatoare, soluţia este deci totdeauna perfect exactă. Principiul de rezolvare a acestor ecuaţii diferenţiale se bazează pe dezvoltarea în serii Fourier ale încărcărilor şi deplasărilor.

Simplitatea şi *rapiditatea* programului L.B.R. — 3 îşi găsesc originea în însăşi principiul metodei utilizate. Astfel, să considerăm exemplul plăcii subţiri ortotrope din figura 3. Cînd se utilizează elementele finite vor fi necesare 250 de elemente. Din contră, cu L.B.R. — 3 această placă este tratată ca un singur element pentru care se ţine seama atît de poziţia, cît şi de geometria tuturor nervurilor.

Totodată este posibil să fie discretizată fiecare rigidizare în subelemente. Astfel, avînd în vedere metoda benzilor finite, putem asimila cele două aripi ale unei corniere cu două elemente placă avînd o margine comună.

Accesibilitatea tuturor este o problemă fundamentală pentru ca un program să poată fi exploatat de un nespecialist. Pentru cineva obişnuit cu programele, domeniul de utilizare, avantajele, restricţiile, discretizarea optimă, ... sînt date de bază cu care este obişnuit să lucreze.

Pentru ca această metodă să-i fie accesibilă unui novice, trebuie să-i ajungă o pregătire foarte redusă pentru a exploata cît mai bine această metodă. Vom defini această problemă ca fiind cea a *accesibilităţii* metodei.

Fără nici o îndoială putem clasa metoda marginilor rigidizate în categoria metodelor avînd cea mai bună accesibilitate [4]. Într-adevăr, datele necesare sînt puţin numeroase, simplu de determinat şi, în plus, foarte sistematice.

În ce priveşte discretizarea, care adesea constituie punctul necesitînd cel mai mult pregătirea din partea utilizatorului, ea este pentru metoda marginilor rigidizate foarte simplă şi, în plus, evidentă căci ea se face natural, în funcţie de geometria unică a structurii. În metoda elementelor finite se pune din contra problema alegerii elementului de utilizat şi apoi acela al discretizării [5]; o discretizare mai fină nu este obligatoriu sinonimă cu rezultate mai bune.

Din contră, cu programul nostru, soluţia fiind obţinută analitic, a împărţi un element în două nu aduce nici un folos. Într-adevăr, soluţia va rămîne aceeaşi şi doar timpul de calcul va fi mărit inutil. Din punct de vedere practic, este suficient deci să se discretizeze structura ca un ansamblu de plăci plane şi plăci subţiri cilindrice ale căror dimensiuni relative nu au nici o importanţă. Singur parametrul precizînd numărul de termeni al seriei Fourier necesită puţină experienţă pentru a putea fixa nivelul de

precizie dorit pentru rezultate. Pe măsură ce creşte numărul se măreşte precizia, dar creşte şi costul; în plus, o mărire exagerată a numărului de termeni nu aduce practic nici o îmbunătăţire şi riscă, din contra, să pună probleme numerice. O alegere similară există şi la nivelul elementelor finite cînd utilizatorul trebuie să fixeze gradul cîmpurilor relative la elementul ales. Această alegere necesită şi o anumită experienţă dacă voim să optăm pentru o soluţie economică. Este posibil totodeauna, prin cele două metode amintite, să alegem un grad de cîmp sau un număr de termeni foarte ridicat, aceasta va conduce la soluţie, dar cu un preţ nejustificat.

Ceea ce trebuie să cunoaştem în practică pentru a utiliza metoda marginilor rigidizate este rezumat în cele ce urmează.

Pentru *încărcările uniforme* cum este presiunea hidrostatică, un singur termen constituie o bună aproximaţie din pun ctul de vedere al deplasărilor; pentru tensiuni, 7 termeni constituie un ideal, dar trei termeni pot fi consideraţi ca un optim.

Cînd intervin *eforturi de margine*, ca urmare, de exemplu, a încastrării extremităţilor, trei termeni sînt un minim, dar este preferabil să se aleagă 7 ca un optim. Pentru ca precizia să devină sensibil mai bună, trebuie să depăşim 25 de termeni, ceea ce nu este de dorit din punct de vedere economic.

În concluzie, în afara alegerii numărului de termeni ai seriei, datele sînt simple şi nu se pune nici o problemă de discretizare a structurii. Rezultatele sînt clare, utilizabile direct şi exacte, ţinînd seama, bine înţeles, de dezvoltarea în serie utilizată.

4. STUDIUL UNUI POD-CANAL

Am ales pentru prezentare studiul unui pod-canal, cu ajutorul căruia vom arăta eficienţa şi uşurinţa de utilizare a programului L.B. R.—3.

Este vorba de un pod-canal pentru vase de 1350 tone ale cărui caracteristici principale sînt : lungimea 360 m (cu travei de 20 m), lăţime 50,85 m şi 4,50 m adîncime de apă.

Plecînd de la dimensiunile stabilite de L.G.Cajot [6], prezentăm verificarea calculului pentru traveea simplu rezemată. Vom studia deasemeni traveea dublu încastrată, precum şi influenţa numărului de termeni din seria Fourier asupra preciziei rezultatelor.

4.1. Studiul traveii simplu rezemate. Deschiderea, ţinînd seama de rost şi de grosimea pilei este de 18,5m, iar secţiunea transversală este redată în figura 12. Încărcarea principală este aceea datorită împingerii apei, cu $h = 4{,}5$ m.

Avînd în vedere simetria podului-canal şi a încărcării, ne-am limitat la studiul unei jumătăţi de structură. Fără a intra în detalii, vom menţiona că armăturile au fost luate în considerare în program cu ajutorul secţiunilor echivalente. Greutatea proprie a fost deasemeni introdusă în cazul de încărcare.

Discretizarea efectuată în vederea calculului acestei semistructuri este următoarea : două panouri de tip *placă netedă* pentru a reprezenta bajoaierul, un panou de acelaşi tip pentru a reprezenta porţiunea de ta-

blier de 50 cm grosime și un panou de tip *placă rigidizată* prin 5 traverse pentru a reprezenta restul tablierului. Discretizarea este deci extrem de simplă și ușor de realizat, 4 panouri dintre care unul singur cu rigidizări; rezolvarea acestei probleme cu ajutorul programului este, din această cauză, foarte rapidă, 43 de linii de date și doar 7,3 secunde CPU pe un IBM 4381.

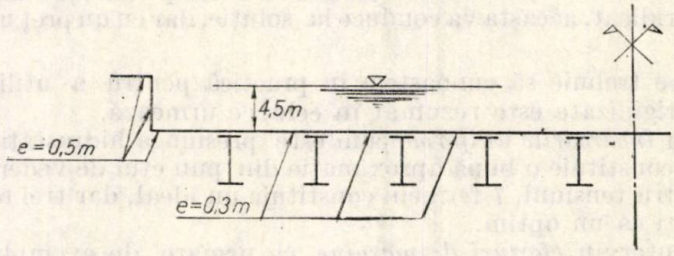


Fig. 12. — Secțiune transversală printr-o travee a podului-canal.

Aceste date extrem de reduse și acești timpi de calcul minimi măresc interesul pentru utilizarea programului L.B.R. — 3 pentru calculul unor asemenea structuri, cu atît mai mult cu cît programul furnizează numeroase rezultate, diversificate și fiabile. Astfel, discretizarea, introducerea datelor, rezolvarea pe calculator și analiza rezultatelor pot fi realizate, pentru exemplul citat, în intervalul de 8 ore. Această metodă scurtează deci considerabil timpul necesar pentru asemenea studii și deschide calea concepției asistate de calculator.

Figurile 13 — 16 dau deplasările și tensiunile în secțiunea transversală de capăt ($x = 0$) și aceea de la mijlocul deschiderii ($x = L/2$)

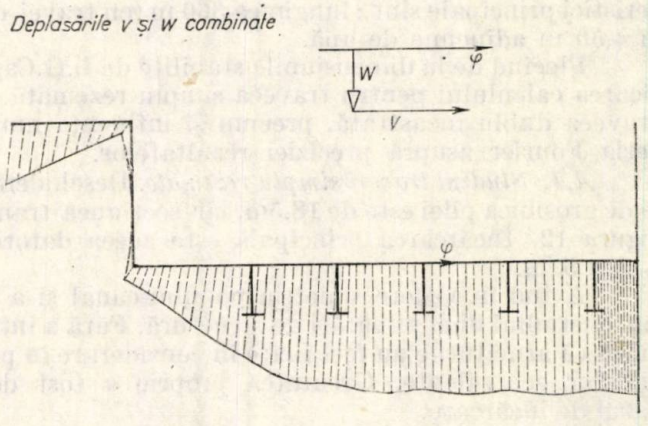


Fig. 13. — Travee simplu rezemată, deplasările w și v combinate în secțiunea transversală de la mijlocul deschiderii.

Se distinge perfect efectul datorat fiecărei traverse. Precizia și densitatea rezultatelor furnizate permit proiectantului să judece rapid modificările de adus pentru îmbunătățirea comportării structurii.

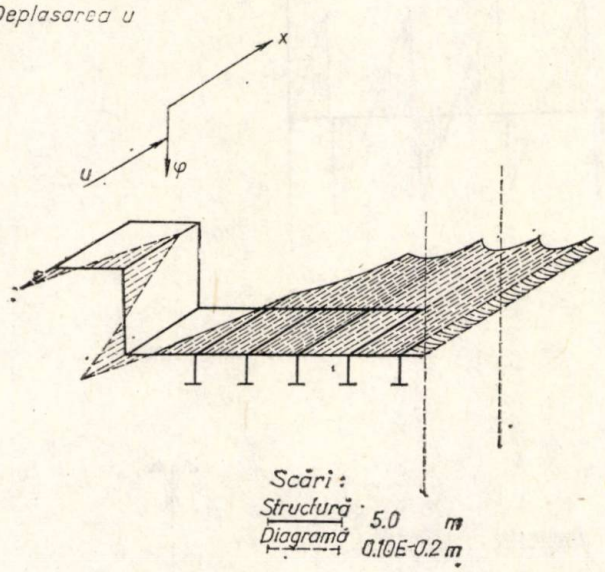


Fig. 14. — Travee simplu rezemată, deplasările longitudinale u în secțiunea de capăt $x = 0$.

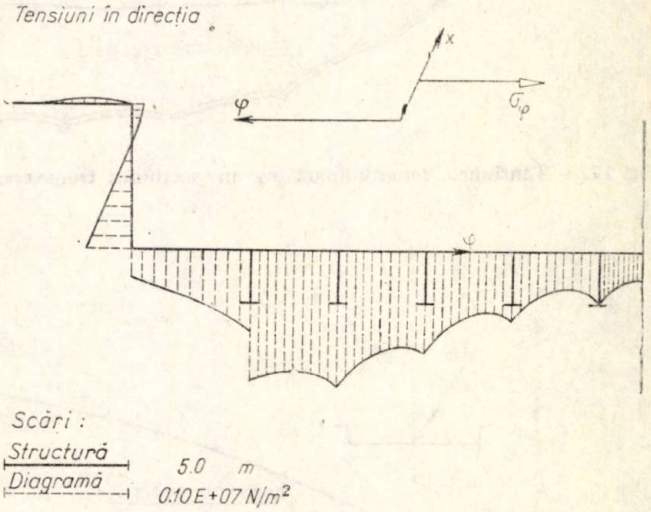


Fig. 15. — Travee simplu rezemată, tensiunile normale transversale σ_φ la mijlocul deschiderii.

4.2. Influența numărului de termeni în seria Fourier. Pentru a compara soluția relativă la traveea simplu rezemată cu aceea relativă la traveea dublu încastrată, am raportat distribuțiile transversale ale tensiunilor longitudinale σ_x, în secțiunea de la mijlocul deschiderii (fig. 17). În plus am reprezentat aceste valori pentru un număr diferit de termeni.

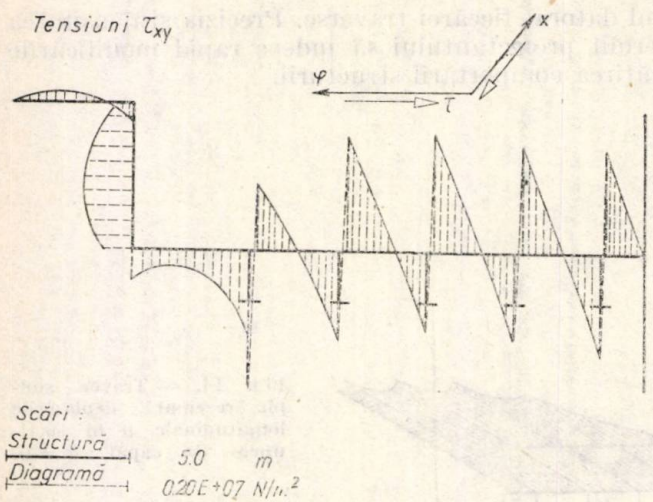


Fig. 16. — Travee simplu rezemată, tensiunile tangențiale $\sigma_{x\varphi}$ în secțiunea de capăt $x = 0$.

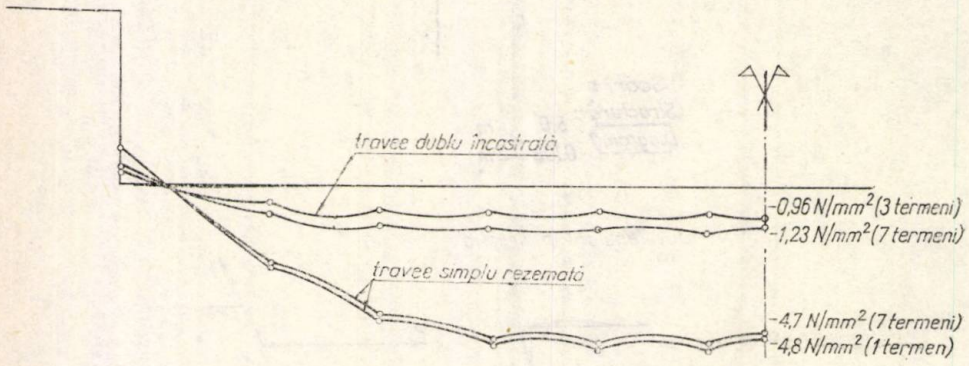


Fig. 17. — Tensiunea longitudinală σ_x în secțiunea transversală de la mijlocul deschiderii.

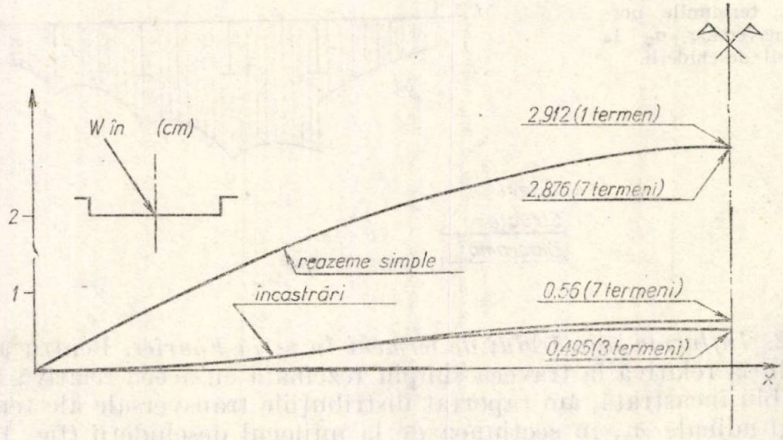


Fig. 18. — Deplasarea verticală w la nivelul axei centrale a unei travei.

Pentru traveea simplu rezemată, rezultatele obținute corespunzător unui singur termen sînt excelente; diferențele constatate în cazul a 7 termeni nu depășesc 2%.

Pentru varianta încastrată, variațiile sînt mai sensibile și diferențele ating 20—30%, ceea ce confirmă interesul de a folosi 7 termeni în vederea obținerii unui nivel de precizie acceptabil.

A fost deasemeni reprezentată variația longitudinală a deplasării verticale w în secțiunea mediană a podului (fig. 18).

5. ALTE APLICAȚII

Vom căuta să dăm o idee asupra performanțelor programului L.B.R. — 3 cu ajutorul unei prezentări succinte a rezultatelor relative la o stavilă [7] și la o poartă maree-furtună [8].

5.1. Studiul unei stavile-cheson. Figura 19 reprezintă secțiunea transversală a chesonului unei stavile segment a unui stăvilar. Se observă rigidizările longitudinale, iar pe această secțiune este raportată diagrama tensiunilor normale σ_x acționînd pe acest bordaj. Aceste tensiuni sînt datorate în principal încovoierii locale a diverselor panouri sub efectul presiunii.

Discretizarea aleasă în vederea calculului corpului stavilei comportă 8 panouri, 5 plăci curbe și 3 plăci plane. Toate aceste panouri sînt rigidizate cu două rînduri de nervuri, traversele formînd cadre rigide regulat distanțate.

Primele calcule efectuate cu ajutorul programului au permis să se controleze predimensionarea. Aceste treceri efectuate cu un termen (vana considerată simplu rezemată pe brațele sale) nu necesită decît 72 de linii de date și 20 secunde CPU pe un IBM 4381. Ultimele treceri efectuate cu 7 termeni și efectele de margine nu necesită decît 3 linii de date suplimentare și cer 411 secunde CPU.

5.2. Studiul unei porți maree-furtună. Este vorba de o poartă plutitoare cu deschiderea de 390 metri, înălțime 22 m, lățime 54 m și cîntărind 55 000 tone. În figura 20 este redată o vedere perspectivă a structurii și a deplasărilor longitudinale ale extremităților. Se disting 30 de panouri din care 24 rigidizate și 6 panouri reprezentînd capacele.

Interesul acestei aplicații rezidă nu în dificultățile de principiu sau în condițiile particulare de rezemare ci pur și simplu în extrema ușurință de aplicare a programului bazat pe metoda margnilor rigidizate. Astfel, dacă luăm exemplul panoului vertical interior stîng caracteristicile lui sînt: dimensiuni totale 9,5 m × 390 m, fie aproape 4000 m², prezența a trei tipuri de nervuri (3 traverse de 390 m, 79 longrine de 9,5 m și un total de 5850 de rigidizări secundare. Toate aceste elemente nu necesită decît 11 linii de date în vederea utilizării programului. Se înțelege deci ușor interesul pe care îl prezintă utilizarea lui.

Într-adevăr, ușurința discretizării, rapiditatea execuției și claritatea rezultatelor au permis efectuarea unui calcul complet în 12 ore (1 oră pentru discretizare , 1 oră pentru introducerea datelor și verificarea lor, 15 la 20 minute timp CPU pe IBM 4381 și, în sfîrșit, 2 ore pentru imprimarea și extragerea rezultatelor.

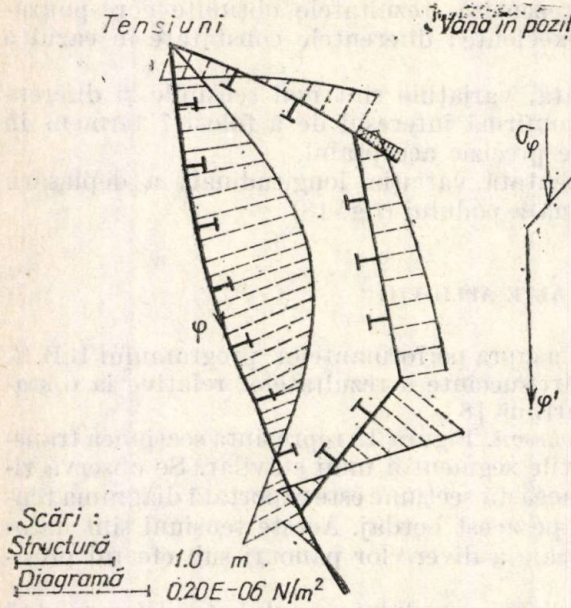


Fig. 19. — Tensiuni normale transversale σ_φ în bordaj la mijlocul deschiderii $x = L/2$.

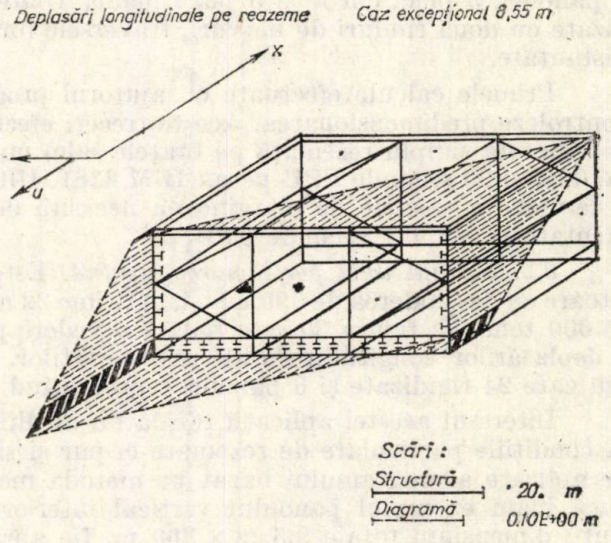


Fig. 20. — Deplasările longitudinale u ale extremităților.

6. CONCLUZII

O dată cu punerea la punct a programului L.B.R. — 3, calculul structurilor compuse din plăci cilindrice ortotrope a devenit o sarcină mult mai ușoară. Într-adevăr, programul bazat pe metoda propusă este deosebit de eficient cînd rigidizările sînt importante, fiincă, deși ține seama de efectele locale ale nervurilor, el integrează nervurile în sistemul de ecuații diferențiale fără a-i îngreuna rezolvarea.

Programul poate fi abordat foarte ușor, datele necesare sînt foarte reduse și foarte simple în privința introducerii lor. Rezultatele, din contra, sînt foarte detaliate și de o mare precizie, atît în ce privește tensiunile, cît și eforturile și deplasările. Într-adevăr, principiul metodei, bazat pe rezolvarea analitică a ecuațiilor, garantează obținerea unei soluții care poate fi considerată ca exactă.

Programul permite, în stadiul actual al dezvoltării sale, în afară de luarea în considerare a încărcărilor exterioare clasice, introducerea oricărui mod de rezemare (rezemare simplă, încastrare, rezemare elastică). Aceasta permite studierea completă a numeroase structuri metalice sau din beton dintre care în particular : poduri-canal, porți de ecluză, vane de stavilă, stelaje, acoperișuri în șed, tabliere de pod ș.a. Astfel, studiul complet al unei asemenea structuri poate fi realizat, grație programului de calcul, în decurs de 8 ore.

Primit în redacție la 27 mai 1990

BIBLIOGRAFIE

1. N. M. DEHOUSSE, *Les bordages raidis en construction hydraulique*. Mémoires du Centre d'Études, de Recherche et d'Essais Scientifiques du Génie Civil (Nouvelle série), (1961).
2. B. FRIEDMAN., *Principles and Techniques of Applied Mathematics*, New York, 1956.
3. A. JAKOBSEN, *Die Berechnung der Zylinderschalen*, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
4. Ph. RIGO, *Applications des développements harmoniques aux calculs des ouvrages hydrauliques métalliques*. Collection des Publications de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège, 1988.
5. P. ARISTAGHES, P. LEBRETON, F. VANSTEENKISTE, *Calcul des portes d'écluses maritimes*, Bulletin AIPCN, 52 (1986).
6. L. G. CAJOT, *Avant-projet d'un pont-canal en béton précontraint*. Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, TFE, 1986.
7. N. M. DEHOUSSE, Ph. RIGO, *Le réglage des niveaux par barrages mobiles pour des ouvrages à faibles retenues*. Bulletin AIPCN, 57 (1987).
8. L. H. C. H, *Stormloedkering, Nieuwe Waterweg*. Rapport interne du LHCN de l'Université de Liège.
9. Ph. RIGO, *Structures prismatiques orthotropes*. IABSE Proceedings P—142/90, February 1990.

ANALIZA PRIN TENSOMETRIE ELECTROREZISTIVĂ A UNUI RECIPIENT CILINDRIC ORIZONTAL, CU FUNCȚIE DE VAS SEPARATOR, DISTORSIONAT PRIN TERMOCOLAPS

de A. PAVEL

Referitor la evaluarea tensometrică privind recipientul nominalizat, se explicitează notațiile și mărimile caracteristice, totodată definindu-se sau precizîndu-se conceptele fundamentale. Prin prelucrarea, analiza și interpretarea rezultatelor experimentale primare, evidențiate prin metoda TER, se studiază distribuția eforturilor unitare circumferențiale și longitudinale, determinîndu-se factorii de amplificare corespunzători. În final, se conturează circumstanțele funcționării în condiții corespunzătoare de securitate tehnică.

1. INTRODUCERE

Evaluarea tensometrică, constituind obiectul principal al studiului de față, se fundamentează pe datele experimentale din lucrarea [3], elaborată de către INCERC București (România) — Secția de Cercetare Inginerie Seismică și Calculul Structurilor, Colectiv Încercarea și Urmărirea în Exploatare a Construcțiilor.

Planul general de tensometrare a fost cel elaborat de către autor, la Institutul de Petrol și Gaze Ploiești (tab. 1), schema generală privind evaluarea tensometrică a eforturilor unitare — circumferențiale (inelare) și meridiane (longitudinale, axiale) — fiind cea redată în figura 1. Amplasarea traductorilor electrorezistivi (TER) s-a organizat pe zone și generatoare, conform planurilor din figurile 2, iar regimul testării prin presurizare hidraulică s-a impus a fi cel din tabelul 2.

Caracteristicile constructiv-geometrice și funcțional-tehnologice ale recipientului cilindric orizontal, cu funcție de vas separator (convențional marcat F-102), de asemenea parametrii săi de stare corespunzînd distorsionării prin termocolaps, se regăsesc ca atare în lucrările anterioare [1, 2].

2. NOTAȚII. MĂRIMI CARACTERISTICE. CONCEPTE FUNDAMENTALE

Se reține următoarele mărimi dimensionale așa-zise *nominale* : $D_{it} = Dn = 4\,000$ mm, care reprezintă diametrul interior (*nominal*) tehnologic al vasului ; $s_1 = 16$ mm — grosimea de perete totală, *nominală*, a peretelui mantalei cilindrice a vasului ; $D_m = D_{it} + s_1 = 4\,016$ mm — diametrul mediu de calcul (*nominal*) al mantalei cilindrice a vasului.

Notînd prin p — presiunea manometrică interioară, în general, de la caz la caz exprimată în bar sau în MPa (N/mm^2) și prin $p_{s,i}$ — presiunea manometrică interioară, măsurată ca atare la partea superioară (p_s) sau la partea inferioară (p_i) ale mantalei (orizontale a) vasului F-102

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 5–6, 1991, P. 393–421

Tabe

Planul general de

Zona	A					
Generatoarea	G_0	G_2	G_2/G_3	G_3	G_4	G_5
Punctele de măsurare	17	1 ; 2	16	3 ; 4 ; 5	6 ; 7 ; 8; 9 ; 10	11 ; 12 ; 13
Numărul de ordine al traductorilor tensometrici electrorezistivi (TER)	48, 49	1, 2, 3 4, 5 6	46, 47	7, 8, 9 10, 11, 12 13, 14, 15	16 ; 17 ; 18 19 ; 20 ; 21 22 ; 23 ; 24 25, 26, 27 28, 29, 30	31, 32, 33 34, 35, 36 37, 38, 39

Tabelul 2

Regimul testării prin presurizare hidraulică

Nivelul de presurizare hidraulică	Presiunea măsurată la partea superioară a vasului, p_s, în bar		Observații
	Ciclurile 1, 2 și 3	Ciclul 4	
1	0,0	0,0	Vasul este umplut cu apă
2	0,5		
3	1,0		
4	2,0	3,5	
5	2,5		Presurizarea se efectuează hidraulic
6	3,0		
7	3,5		
8	0,0	0,0	Vasul rămîne umplut cu apă

Notă. În timpul încercărilor de presiune hidraulică, presiunea manometrică (p_i) s-a măsurat și la partea inferioară a vasului. Din păcate, valorile indicate în [3] (în ordinea nivelurilor de presurizare hidraulică → 0,6 :1,6 ; 2,0 ; 3,2 ; 3,7 ; 4,2 ; 4,6 și 0,6 bar) nu prezintă credibilitate, deoarece $D_{it} = 4\,000$ mm (aportul hidrostatic fiind de cel mult 0,4 bar).

(tab. 2), în bar sau în MPa (N/mm²), rezultă următoarele expresii de calcul :

$$\sigma_t^n = p(D_{mt}/2s_1) = 125{,}50\, p_{s,i},$$

pentru eforturile unitare (tensiunile mecanice) circumferențiale (inelare) *nominale* (exponent n), în N/mm² ;

$$\sigma_m^n = p(D_m/4s_1) = 62{,}75\, p_{s,i},$$

pentru eforturile unitare (tensiunile mecanice) meridiane (longitudinale, axiale) *nominale* (exponent n), în N/mm² ;

$$\bar{\sigma}_{t/m}^n = \sigma_t^n/\sigma_m^n = 2{,}000,$$

lul 1

tensometrare [3,4]

B					C	D
G_6	G_{27}	G_{27}/G_{28}	G_{28}	G_{29}	G_{35}	G_{40}
14 ; 15	18 ; 19 ; 20 ; 21	22 ; 23	24 ; 25 ; 26 27 ; 30	28 ; 29	31 ; 32	33 ; 34
40, 41, 42 43, 44, 45	50, 51, 52 53, 54, 55 56, 57, 58 59, 60, 61	62, 63, 64 65, 66, 67	68, 69, 70 71, 72, 73 74, 75, 76 77, 78, 79 86, 87	80, 81, 82 83, 84, 85	88, 89, 90 91, 92, 93	94,95, 96 97, 98, 99

pentru simplexul caracterizant privind starea *nominală* (exponent n) de eforturi unitare (tensiuni mecanice).

Relevînd prin : $\sigma^n_{max} = \sigma^n_t$ — eforturile unitare (tensiunile mecanice) *nominale* maxime, în N/mm^2 ; $\sigma^n_{min} = \sigma^n_m$ — eforturile unitare (tensiunile mecanice) *nominale* minime, în N/mm^2 și $\sigma^n_{1,2}$ — eforturile unitare (tensiunile mecanice) principale ($\sigma^n_1 > \sigma^n_2$) *nominale* (exponent *n*), în N/mm^2, evident, se obține :

$$\sigma^n_1 = \sigma^n_{max} = \sigma^n_t = p_{s,t}(D_{mt}/2s_1) = 125{,}50\, p_{s,t}\,; \tag{1}$$

$$\sigma^n_2 = \sigma^n_{min} = \sigma^n_m = p_{s,t}\ (D_{m,t}/4s_1) = 62{,}75\ p_{s,t}. \tag{2}$$

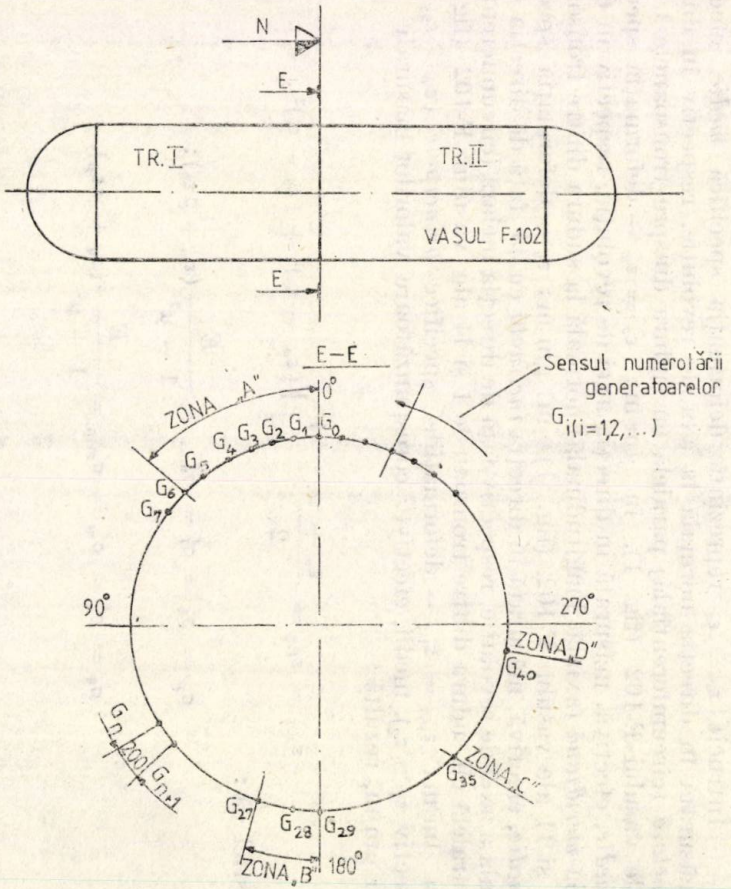
Întrucît $\varepsilon_c = \varepsilon_t$ reprezintă deformația specifică *medie*, efectivă, măsurată în direcția normală la axa de revoluție, respectiv în direcția *inelară* (circumferențială) paralelă cu sudura dinspre tronsoanele I și II ale vasului F-102 (fig. 1), în μm/m ; $\varepsilon_a = \varepsilon_m$ — deformația specifică *medie*, efectivă, măsurată în direcția axei de revoluție, respectiv în direcția *meridiană* (axială, longitudinală) normală la sudura dintre tronsoanele I și II ale vasului F-102 (fig. 1), în μm/m ; ε_b — deformația specifică *medie*, efectivă, măsurată în direcția *înclinată* cu 45° față de direcția generală a axei de revoluție, respectiv față de direcția inelară (circumferențială) paralelă cu sudura dintre tronsoanele I și II ale vasului F-102 (fig. 1), în μm/m ; $\varepsilon_{p,q} = \varepsilon_{1,2}$ — deformațiile specifice *principale* ($\varepsilon_p > \varepsilon_q$, respectiv $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$), medii, efective, corespunzătoare valorilor măsurate $\varepsilon_{c,a,b}$, în μm/m, rezultă :

$$\varepsilon_{p,q} = \varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2}\,, \tag{3}$$

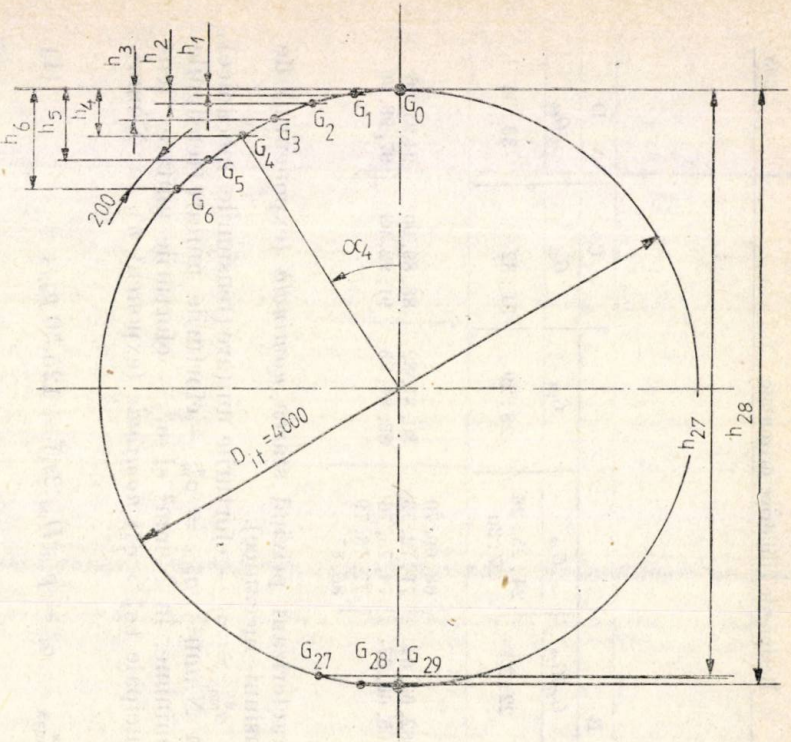
astfel că :

$$\sigma_p = \sigma^e_1 = \sigma^e_t = \sigma^e_{max} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_p + \mu\varepsilon_q)\,; \tag{4}$$

$$\sigma_q = \sigma^e_2 = \sigma^e_m = \sigma^e_{min} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_q + \mu\varepsilon_p), \tag{5}$$



a



i	1	2	3	4	5	6	27	28
α_i, în grd	5,73	11,46	17,19	22,92	28,65	34,38	154,70	160,43
h_i, în mm	9,99	39,87	89,33	157,87	244,83	349,33	3808,14	3884,44

$$h_i = \frac{D_{it}}{2}\left(1-\cos\alpha_i\right)$$

b

Fig. 1

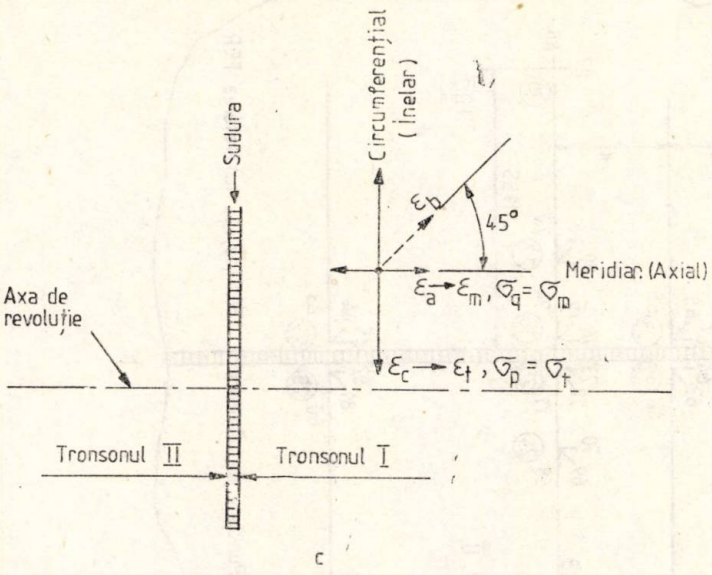


Fig. 1. — Planul general de amplasare a traductorilor tensometrici electrorezistivi (TER): a — numerotarea generatoarelor; b — cotele de poziție ale generatoarelor; c — poziționarea TER.

unde:

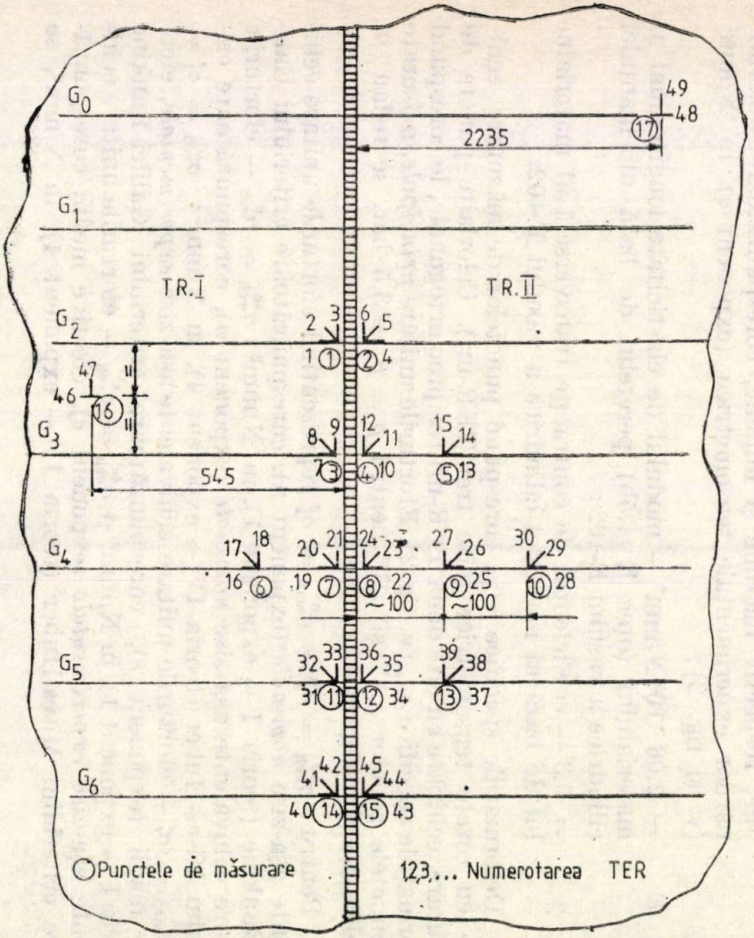
$\sigma_{p,q} = \sigma^e_{1,2} = \sigma^e_{t,m} = \sigma^e_{max,\ min}$ sînt eforturile unitare (tensiunile mecanice) *principale*, efective, *medii*, circumferențiale și meridiane, respectiv maxime și minime, corespunzătoare determinărilor experimentale tensometrice (exponent *e*), în N/mm² (v. și fig. 2);

E = 2,06 · 10⁵ N/mm² — modulul de elasticitate longitudinal al materialului (oțel R 44.5b) peretelui de bază al mantalei cilindrice a vasului F-102;

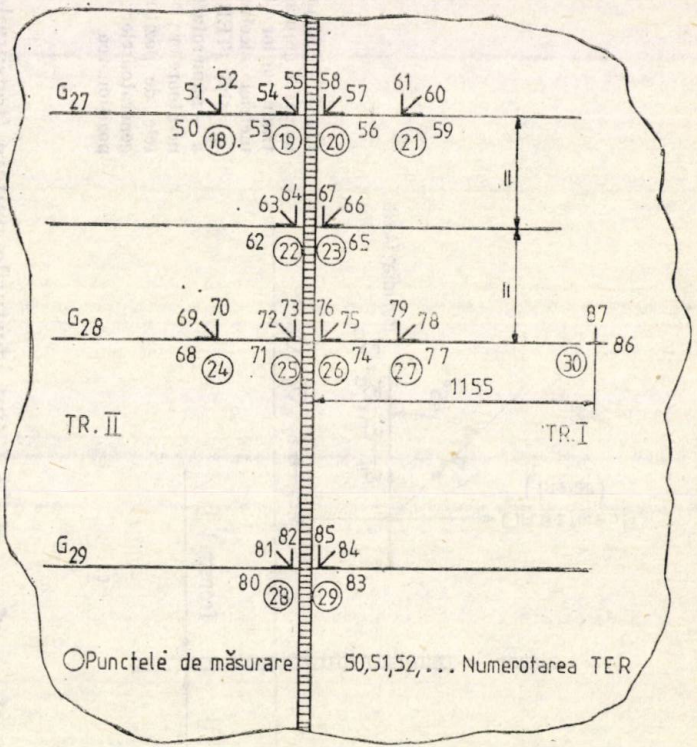
μ = 0,3 — coeficientul de contracție transversală al materialului de bază al mantalei cilindrice a vasului F-102.

Deformațiile specifice $\varepsilon_{c,a,b}$ corespund punctelor de măsurare echipate cu rozete tensometrice (cîte trei TER-uri). Celorlalte puncte de măsurare, echipate cu cîte două TER-uri reciproc ortogonale, le corespund deformațiile specifice $\varepsilon_{c,a}$ (v. fig. 2). Eforturile unitare *principale*, măsurate în punctele zonelor „A" și „B" pentru $p = p_s = 3{,}5$ bar, se redau în tabelele 3,4 și în figura 3.

Pentru: $\sigma^{1n}_{ech} = \sigma^n_1 = \sigma^n_{max} = \sigma^n_t$ reprezentînd eforturile unitare echivalente așa-zise *nominale* (exponent n), corespunzătoare criteriului Galilei-Rankine (teoria I → exponent 1), în N/mm²: $\sigma^{4n}_{ech} = \sigma^n_{ech}$ — eforturile unitare echivalente așa-zise *nominale* (exponent *n*), corespunzătoare criteriului Mises-Huber (teoria IV → exponent 4), în N/mm²; $\sigma^{1e}_{ech} = \sigma^e_1 = \sigma^e_{max} = \sigma^e_t$ — eforturile unitare echivalente așa-zise *experimentale*, efective medii (exponent *e*), corespunzătoare criteriului Galilei-Rankine (teoria I → exponent 1), în N/mm² și $\sigma^{4e}_{ech} = \sigma^e_{ech}$ — eforturile unitare echivalente așa-zise *experimentale* (exponent *e*), efective medii, corespunzătoare criteriului Mises-Huber (teoria IV → exponent 4), în N/mm², se


G0
G1
G2
G3
G4
G5
G6
TR.I
TR.II
2235
545
~100
~100
Punctele de măsurare
123,... Numerotarea TER

a


G27
G28
G29
TR. II
TR. I
1155
Punctele de măsurare
50,51,52,... Numerotarea TER

b

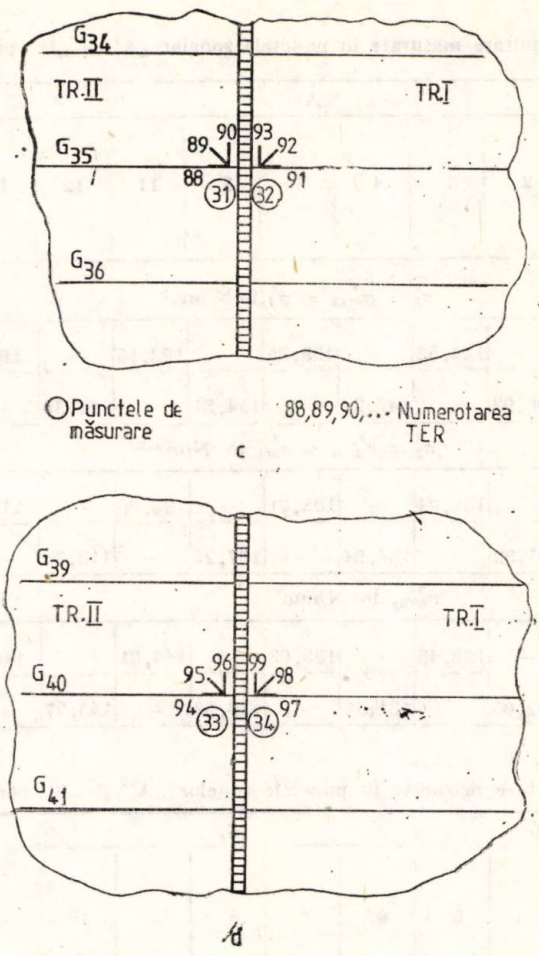


Fig. 2. — Amplasarea TER în diferite zone ale vasului : a — zona „A"; b — zona „B"; c — zona „C"; d — zona „D".

obţine :

$$\sigma^{ln}_{ech} = 125{,}50\ p_{s,t}\,; \tag{6}$$

$$\sigma^{n}_{ech} = \sqrt{(\sigma^{n}_1)^2 + (\sigma^{n}_2)^2 - (\sigma^{n}_1)(\sigma^{n}_2)} = 108{,}686 p_{s,t}\,; \tag{7}$$

$$\sigma^{e}_{ech} = \sqrt{(\sigma^{e}_1)^2 + (\sigma^{e}_2)^2 - (\sigma^{e}_1)(\sigma^{e}_2)}. \tag{8}$$

Simplexurile caracterizante, privind starea efectivă, experimentală (exponent e), de eforturi unitare (tensiuni mecanice) singulare şi/sau echivalente, vor fi (tab. 5 şi fig. 4) :

$$\overline{\sigma}^{e}_{t/m} = \frac{\sigma^{e}_t}{\sigma^{e}_m} \neq 2{,}000\,;\ \overline{\sigma}^{e}_{t/ech} = \frac{\sigma^{e}_t}{\sigma^{e}_{ech}} > 1{,}000. \tag{9,10}$$

Tabe-

Eforturile unitare măsurate în punctele zonelor „A" și „B" pentru

Zona (sudurii)	A								
Punctul nr (n_i, $i = 1, 2, \ldots$) / Tronsonul	1	2	3	4	7	8	11	12	14
	$\sigma_1^e = \sigma_{max}^e = \sigma_t^e$, în N/mm²								
II	136,31		144,53		155,35	—	162,15	—	165,00
I		136,93		147,24	—	154,31	—	161,35	—
	$\sigma_2^e = \sigma_{min}^e = \sigma_m^e$, în N/mm²								
II	96,53		101,04	—	108,51	—	120,06	—	115,68
I	—	97,32		104,54	—	107,26	—	112,33	—
	σ_{ech}^e, în N/mm²								
II	121,41	—	128,43	—	138,03	—	143,81	—	146,7
I	—	122,05		131,21	—	136,98	—	143,27	—

Tab -

Eforturile unitare măsurate în punctele zonelor „A" și „B" pentru

Generatoarea	G_3			G_4					
Punctul nr. (n_i, $i = 1, 2, \ldots$) / T tcrul	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	$\sigma_1^e = \sigma_{max}^e = \sigma_t^e$, în N/mm²								
II	144,53	—	—	150,64	155,35	—	—	—	162,15
I	—	147,24	144,06	—	—	154,31	150,88	149,31	—
	$\sigma_2^e = \sigma_{min}^e = \sigma_m^e$, în N/mm²								
II	101,04	—	—	105,26	108,51	—	—	—	112,06
I	—	104,54	102,68	—	—	107,26	110,87	105,99	—
	σ_{ech}^e, în N/mm²								
II	128,43	—	—	133,85	138,03	—	—	—	143,81
I	—	131,21	128,47	—	—	136,98	135,38	133,05	—

lul 3

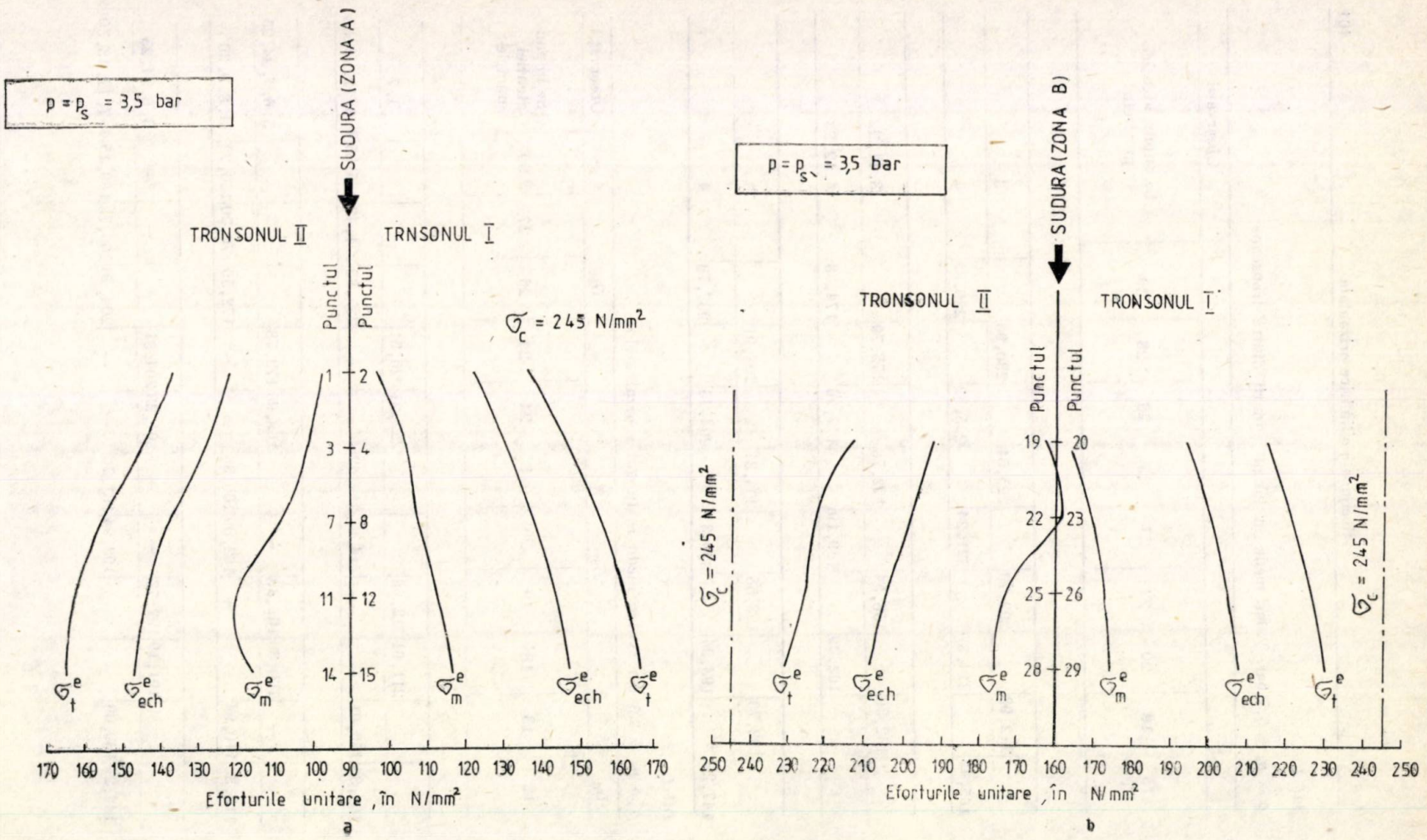
$p = p_s = 3{,}5$ bar. Valori medii în lungul sudurii dintre tronsoane

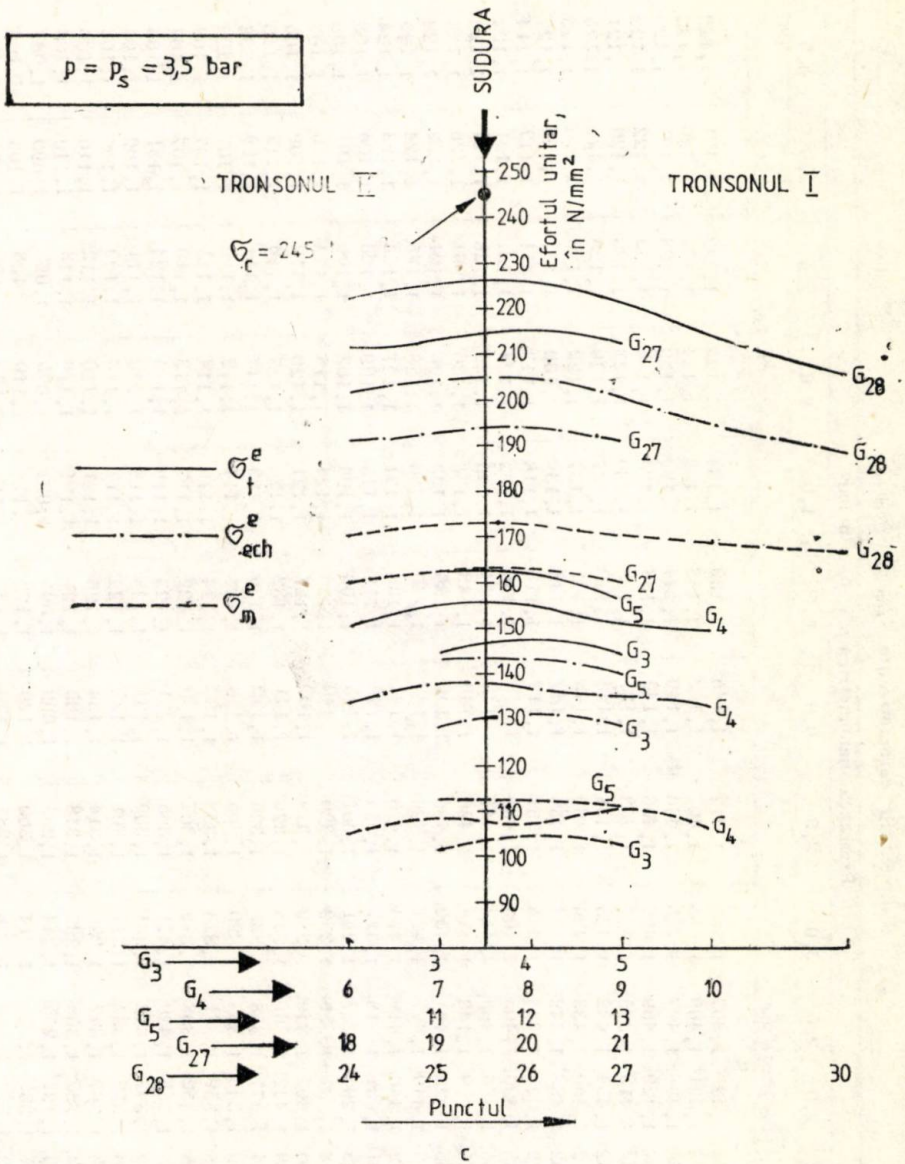
B									Observaţii
15	19	20	22	23	25	26	28	29	Se supun atenţiei punctele :
	212,98		222,73		225,51		230,96		3
165,49		214,87		221,24		225,82		229,88	4
	162,39		158,54		172,78		175,79		3, 11, 22
		162,09		169,19		172,56		174,38	4, 12, 23
	192,73		198,58		204,31		208,91		3
147,25		193,94		200,35		204,46		207,76	4

lul 4

$p = p_s = 3{,}5$ bar. Valori medii în lungul generatoarelor

G_5		G_{27}				G_{28}					Observaţii
12	13	18	19	20	21	24	25	26	27	30	Se impun atenţiei punctele :
		211,61	212,98			222,21	225,51	—			3, 7
161,35	156,01	—	—	214,87	212,42	—	—	225,82	221,43	205,55	4, 8, 12, 13, 30
—	—	160,30	162,39	—	—	169,96	172,78		—		3, 6, 7, 24, 25
112,33	110,94	—	—	162,09	160,36	—	—	172,56	170,20	166,72	4, 8, 9, 30
		191,19	192,73	—	—	201,23	204,31	—	—	—	3, 6, 24, 25
143,27	139,06	—	—	193,94	191,76	—	—	204,46	200,78	189,15	4, 7, 12, 13, 30


p = p_s = 3,5 bar
SUDURA (ZONA A)
TRONSONUL II
TRNSONUL I
Punctul
Punctul
σ_c = 245 N/mm²
1
2
3
4
7
8
11
12
14
15
σ^e_t
σ^e_ech
σ^e_m
σ^e_m
σ^e_ech
σ^e_t
170 160 150 140 130 120 110 100 90 100 110 120 130 140 150 160 170
Eforturile unitare, în N/mm²
a
p = p_s = 3,5 bar
SUDURA (ZONA B)
TRONSONUL II
TRONSONUL I
Punctul
Punctul
σ_c = 245 N/mm²
19
20
22
23
25
26
28
29
σ^e_t
σ^e_ech
σ^e_m
σ^e_m
σ^e_ech
σ^e_t
σ_c = 245 N/mm²
250 240 230 220 210 200 190 180 170 160 170 180 190 200 210 220 230 240 250
Eforturile unitare, în N/mm²
b



c

Fig. 3. — Epurile eforturilor unitare măsurate prin metoda tensometriei electrorezistive :
a — în lungul sudurii circumferențiale dintre tronsoane (zona A, fig. 2, a) ; b — idem (zona B, fig. 2, b) ; c — în lungul generatoarelor (zonale A și B, fig. 2, a și b).

Se definesc factorii (coeficienții) de *amplificare* a eforturilor unitare (tensiunilor mecanice) așa-zise *experimentale*, în raport cu cele *nominale*, prin expresiile (tab. 6, 7 și fig. 5) :

$$K_1 = \frac{\sigma_1^e}{\sigma_1^n} \; ; \; K_2 = \frac{\sigma_2^e}{\sigma_2^n} \; ; \; K_{ech} = \frac{\sigma_{ech}^e}{\sigma_{ech}^n}, \qquad (11, 12, 13)$$

Tabelul 5

Simplexurile caracterizante $\overline{\sigma}^e_{t/m}$ și $\overline{\sigma}^e_{t/ech}$

Punctul nr.	Presiunea manometrică $p = p_s$, în bar													
	0,0	0,5	1,0	2,0	2,5	3,0	3,5	0,0	0,5	1,0	2,0	2,5	3,0	3,5
	$\overline{\sigma}^e_{t/m} = \sigma^e_t / \sigma^e_m$							$\overline{\sigma}^e_{t/ech} = \sigma^e_t / \sigma^e_{ech}$						
1	1,629	1,557	1,504	1,428	1,407	1,403	1,412	1,145	1,139	1,134	1,125	1,122	1,121	1,123
2	1,606	1,542	1,492	1,421	1,400	1,398	1,407	1,143	1,138	1,133	1,124	1,121	1,120	1,122
3	1,703	1,622	1,556	1,464	1,437	1,425	1,430	1,149	1,144	1,139	1,130	1,126	1,125	1,125
4	1,590	1,539	1,497	1,429	1,409	1,406	1,408	1,142	1,138	1,134	1,125	1,122	1,122	1,122
5	1,532	1,495	1,464	1,413	1,395	1,394	1,403	1,137	1,133	1,130	1,123	1,120	1,120	1,121
6	1,642	1,582	1,532	1,454	1,432	1,425	1,431	1,146	1,142	1,137	1,129	1,125	1,125	1,125
7	1,635	1,580	1,532	1,456	1,433	1,426	1,432	1,145	1,141	1,137	1,129	1,126	1,125	1,125
8	1,672	1,608	1,552	1,468	1,442	1,434	1,439	1,147	1,143	1,139	1,130	1,127	1,126	1,127
9	1,389	1,385	1,379	1,353	1,344	1,345	1,361	1,119	1,118	1,118	1,113	1,111	1,112	1,114
10	1,563	1,521	1,485	1,423	1,403	1,400	1,409	1,410	1,136	1,132	1,124	1,121	1,121	1,122
11	1,680	1,620	1,565	1,480	1,453	1,444	1,447	1,148	1,144	1,140	1,132	1,128	1,127	1,128
12	1,652	1,598	1,545	1,469	1,148	1,436	1,436	1,146	1,143	1,138	1,130	1,061	1,126	1,126
13	1,563	1,525	1,490	1,428	1,401	1,409	1,406	1,140	1,136	1,133	1,125	1,121	1,122	1,122
14	1,601	1,559	1,519	1,449	1,427	1,421	1,426	1,143	1,140	1,136	1,128	1,125	1,124	1,125
15	1,577	1,540	1,472	1,440	1,419	1,414	1,420	1,141	1,138	1,131	1,127	1,124	1,123	1,124
16	1,423	1,380	1,361	1,331	1,318	1,317	1,324	1,125	1,118	1,115	1,109	1,106	1,106	1,108
17	1,312	1,303	1,305	1,295	1,287	1,291	1,301	1,105	1,103	1,104	1,102	1,100	1,101	1,103
18	1,564	1,468	1,418	1,381	1,359	1,339	1,320	1,140	1,130	1,124	1,118	1,114	1,110	1,107
19	1,528	1,444	1,400	1,392	1,349	1,329	1,312	1,137	1,127	1,121	1,120	1,112	1,109	1,105
20	1,574	1,479	1,429	1,442	1,369	1,345	1,326	1,141	1,132	1,125	1,127	1,116	1,112	1,110
21	1,551	1,462	1,414	1,377	1,358	1,333	1,325	1,139	1,129	1,123	1,117	1,114	1,109	1,108
22	1,447	1,403	1,369	1,349	1,338	1,320	1,405	1,128	1,121	1,116	1,112	1,110	1,107	1,122
23	1,491	1,423	1,388	1,359	1,341	1,323	1,308	1,133	1,124	1,119	1,114	1,111	1,107	1,104
24	1,468	1,409	1,378	1,352	1,338	1,319	1,307	1,130	1,122	1,117	1,113	1,110	1,107	1,104
25	1,475	1,416	1,386	1,358	1,420	1,471	1,305	1,131	1,123	1,119	1,114	1,124	1,131	1,104
26	1,477	1,416	1,379	1,347	1,342	1,331	1,309	1,131	1,123	1,118	1,112	1,111	1,109	1,104
27	1,479	1,410	1,376	1,352	1,334	1,317	1,301	1,132	1,122	1,117	1,113	1,109	1,106	1,103
28	1,503	1,436	1,398	1,367	1,347	1,329	1,314	1,134	1,126	1,121	1,116	1,112	1,110	1,106
29	1,512	1,442	1,403	1,367	1,355	1,337	1,318	1,135	1,127	1,121	1,116	1,113	1,110	1,106
30	1,277	1,265	1,253	1,192	1,255	1,244	1,233	1,098	1,095	1,092	1,075	1,092	1,090	1,087
31	1,459	1,408	1,357	1,336	1,324	1,314	1,300	1,129	1,122	1,114	1,110	1,108	1,106	1,103
32	1,448	1,392	1,349	1,323	1,316	1,308	1,283	1,128	1,120	1,112	1,107	1,106	1,104	1,099
33	1,467	1,433	1,416	1,390	1,388	1,377	1,374	1,130	1,126	1,123	1,119	1,119	1,117	1,117
34	1,501	1,452	1,410	1,387	1,400	1,389	1,387	1,134	1,128	1,122	1,119	1,121	1,119	1,119

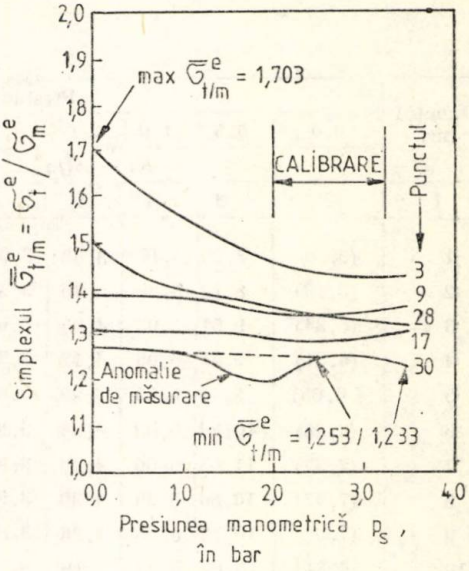


Fig. 4. — Diagramele simplexului caracterizant $\sigma^{-e}_{t,m}$.

acestora corespunzîndu-le factorii (coeficienţii) de *diminuare* a disponibilităţii de capacitate portantă $\psi_{1,2,ech} = K^{-1}_{1,2,ech}$ avînd expresiile evidente:

$$\psi_1 = \frac{\sigma_1^m}{\sigma_1^e} = \frac{1}{K_1}; \tag{14}$$

$$\psi_2 = \frac{\sigma_2^m}{\sigma_2^e} = \frac{1}{K_2}; \tag{15}$$

$$\psi_{ech} = \frac{\sigma_{ech}^m}{\sigma_{ech}^e} = \frac{1}{K_{ech}}, \tag{16}$$

Pentru $\sigma_c = 245$ N/mm² reprezentînd limita tehnică de curgere (valoarea minimă normată) a materialului de bază (oţel R 44.5b) al mantalei cilindrice a vasului F-102 şi $c_e = 1{,}500$ reprezentînd coeficientul de siguranţă, faţă de limita tehnică de curgere, impus (minimal) prin PT ISCIR C 4-83 [5], valorile constatate experimental (în punctul de măsurare nr. 28, ca fiind cel mai solicitat în circumstanţele testării prin presurizare interioară hidraulică → tab. 8 şi fig. 6), pentru coeficientul de siguranţă faţă de limita tehnică de curgere evaluat cu formulele:

$$c_c^{1\,e} = c_c^{e1} = \frac{\sigma_c}{\sigma_1^e}; \tag{17}$$

$$c_c^e = \frac{\sigma_c}{\sigma_{ech}^e}, \tag{18}$$

sînt cele redate în figura 7.

Tabe-

Factorii de amplificare a

Punctul nr.	Presiunea manometrică									
	0,0	0,5	1,0	2,0	2,5	3,0	3,5	0,0	0,5	1, 0
	$K_1 = \sigma_1^e/\sigma_1^n$							$K_2 =$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	(5,08)	8,00	5,17	3,68	3,36	3,19	3,10	(6,24)	10,27	6,88
2	(5,13)	8,10	5,22	3,70	3,38	3,20	3,12	(6,39)	10,50	6,99
3	(6,34)	9,51	5,93	4,05	3,66	3,41	3,29	(7,45)	11,73	7,62
4	(6,51)	9,71	6,05	4,12	3,72	3,49	3,35	(8,19)	12,61	8,08
5	(6,05)	9,15	5,75	3,99	3,60	3,39	3,28	(7,89)	12,24	7,85
6	(6,88)	10,24	6,29	4,24	3,81	3,57	4,43	(8,38)	1 2,94	8, 21
7	(7,57)	11,03	6,69	4,43	3,96	3,69	3,54	(9,26)	13,95	,73
8	(7,47)	10,86	6,60	4,39	3,93	3,67	3,51	(8,93)	13,51	8,51
9	(7,02)	10,32	6,33	4,26	3,82	3,57	3,43	(10,11)	14,90	9,18
10	(6,81)	10,07	6,23	4,19	3,77	3,53	3,40	(8,71)	13,23	8,38
11	(8,51)	12,11	7,23	4,71	4,18	3,87	3,69	(10,13)	14,95	9,
12	(8,58)	12,19	7,26	4,73	4,09	3,89	3,67	(10,38)	15,25	9,4
13	(7,71)	11,15	6,74	4,46	3,98	3,78	3,55	(9,86)	14,62	9,05
14	(8,89)	12,56	7,45	4,82	4,27	3,95	3,76	(11,10)	16,12	9,82
15	(8,95)	12,64	7.44	4,84	4,29	3,96	3,77	(11,35)	16,41	10,11
16	(3,47)	5,87	4,00	3,02	2,81	2,69	2,64	(4, 87)	8,51	5,88
17	(3,37)	5,76	3,94	2,99	2,78	2,67	2,62	,	8,84	6,04
18	(9,95)	15,02	9,15	6,17	5,49	5,08	4,82	(12,73)	20,46	12,90
19	(10,15)	15,25	9,27	6,23	5,54	5,12	4,85	(13,28)	21,12	13,24
20	(10,40)	15,54	9,44	6,40	5,61	5,17	4,89	(13,21)	21,02	13,20
21	(10,06)	15,15	9,21	6,20	5,51	5,10	4,84	(12,97)	20,72	13,03
22	(11,27)	16,62	9,96	6,57	5,82	5,34	5,07	(15,59)	23,68	14,56
23	(11,18)	16,50	9,89	6,53	5,79	5,32	5,04	(15,00)	23,19	14,25
24	(11,33)	16,68	10,02	6,60	5,82	5,35	5,06	(15,44)	23,67	14,54
25	(11,73)	17,28	10,29	6,71	5,63	5,15	5,13	(15,90)	24,40	14,84
26	(11,85)	17,29	10,28	6,73	5,94	5,46	5,14	(16,04)	24,42	14,92
27	(11,34)	16,59	9,94	6,56	5,80	5,34	5,04	(15,34)	23,54	14,45
28	(12,51)	18,09	10,68	6,94	6,10	5,59	5,26	(16,64)	25,19	15,28
29	(12,31)	17,88	10,56	6,88	6,09	5,57	5,23	(16,28)	24,80	15,06
30	(10,19)	15,06	9,06	5,48	5,35	4,94	4,68	(15,96)	23,80	14,47
31	(11,52)	16,47	9,66	6,22	5,42	4,95	4,62	(15,80)	23,39	14,24
32	(11,60)	16,54	9,70	6,22	5,44	4,96	4,58	(16,02)	23,76	14,38
33	(11,13)	15,68	9,15	5,79	5,10	4,67	4,39	(15,17)	21,88	12,92
34	(10,64)	15,10	8,84	5,63	4,98	4,58	4,38	(14,17)	20,79	12,54

ul 6

eforturilor unitare $K_{1,2,ech}$.Valori globale

$p = p_s$, în bar										
2,0	2,5	3,0	3,5	0,0	0,5	1,0	2,0	2,5	3,0	3,5
$= \sigma_2^e/\sigma_2^n$				$K_{e\ h} = \sigma_{ech}^e/\sigma_{ech}^n$						
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
5,15	4,77	4,54	4,40	(5,13)	8,11	5,26	3,77	3,46	3,28	3,19
5,21	4,82	4,58	4,43	(5,18)	8,22	5,32	3,80	3,48	3,30	3,21
5,54	5,09	4,78	4,60	(6,37)	9,	6,01	4,14	3,75	3,50	3,38
5,76	5,27	4,96	4,76	(6,58)	9,85	6,16	4,22	3,82	3,59	3,45
5,64	5,17	4,87	4,68	(6,14)	9,33	5,87	4,10	3,72	3,50	3,38
5,83	5,33	5,01	4,79	(6,93)	10,36	6,39	4,34	3,91	3,66	3,52
6,09	5,53	5,18	4,94	(7,64)	11,16	6,79	4,54	4,07	3,79	3,63
5,99	5,45	5,11	4,88	(7,52)	10,97	6,69	4,49	4,03	3,76	3,60
6,29	5,69	5,32	5,05	(7,24)	10,66	6,54	4,42	3,97	3,71	3,56
5,90	5,37	5,04	4,83	(6,90)	10,23	6,35	4,31	3,88	3,64	3,50
6,36	5,75	5,37	5,10	(8,56)	12,22	7,32	4,80	4,28	3,97	3,78
6,43	7,13	5,41	5,11	(8,64)	12,32	7,36	4,83	4,45	3,99	3,77
6,25	5,69	5,36	5,05	(7,81)	11,32	6,87	4,58	4,10	3,89	3,66
6,65	5,99	5,56	5,27	(8,98)	12,73	7,58	4,93	4,38	4,06	3,86
6,72	6,04	5,60	5,31	(9,06)	12,83	7,60	4,96	4,40	4,07	3,87
4,54	4,26	4,09	3,98	(3,56)	6,07	4,14	3,14	2,93	2,81	2,75
4,62	4,32	4,14	4,03	(3,52)	6,03	4,12	3,13	2,92	2,80	2,74
8,93	8,07	7,58	7,30	(10,08)	15,35	9,40	6,37	5,69	5,28	5,03
8,96	8,21	7,70	7,39	(10,31)	15,63	9,54	6,43	5,75	5,33	5,07
8,88	8,19	7,68	7,38	(10,52)	15,87	9,68	6,56	5,80	5,37	5,10
9,00	8,12	7,64	7,30	(10,20)	15,49	9,47	6,40	5,72	5,30	5,04
9,74	8,71	8,10	7,22	(11,55)	17,11	10,31	6,82	6,06	5,58	5,22
9,62	8,63	8,05	7,70	(11,40)	16,94	10,21	6,77	6,01	5,55	5,27
9,76	8,70	8,12	7,74	(11,58)	17,16	10,35	6,85	6,05	5,58	5,29
9,89	7,92	7,00	7,87	(11,97)	17,76	10,62	6,96	5,78	5,26	5,37
9,99	8,86	8,20	7,86	(12,09)	17,78	10,62	6,99	6,18	5,68	5,37
9,71	8,70	8,11	7,75	(11,58)	17,07	10,27	6,81	6,04	5,58	5,28
10,15	9,06	8,41	8,00	(12,73)	18,55	11,01	7,18	6,34	5,82	5,49
10,07	8,99	8,33	7,94	(12,52)	18,33	10,87	7,12	6,32	5,79	5,46
9,20	8,53	7,94	7,59	(10,72)	15,89	9,59	5,89	5,66	5,23	4,97
9,32	8,18	7,53	7,11	(11,78)	16,95	10,02	6,47	5,56	5,17	4,84
9,40	8,27	7,59	7,14	(11,87)	17,06	10,07	6,49	5,68	5,19	4,81
8,33	7,35	6,78	6,38	(11,37)	16,09	9,41	5,97	5,26	4,83	4,53
8,12	7,11	6,59	6,31	(10,83)	15,46	9,10	5,81	5,13	4,72	4,52

Tabe-

Factorii de amplificare a eforturilor unitar

Punctul nr.	Presiunea manometrică									
	0,0	0,5	1,0	2,0	2,5	3,0	3,5	0,0	0,5	1,0
	$K_1 = \sigma_1^e/\sigma_1^n$							$K_2 =$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	5,08	2,50	2,58	2,30	2,27	2,28	2,36	6,24	3,21	3,44
2	5,13	2,53	2,61	2,31	2,28	2,29	2,37	6,39	3,28	3,50
3	6,34	2,97	2,96	2,53	2,47	2,43	2,50	7,45	3,67	3,81
4	6,51	3,03	3,02	2,57	2,51	2,49	2,55	8,19	3,94	4,04
5	6,05	2,86	2,87	2,49	2,44	2,42	2,50	7,89	3,83	3,93
6	6,88	3,20	3,15	2,65	2,58	2,55	2,61	8,38	4,04	4,11
7	7,57	3,45	3,34	2,77	2,68	2,64	2,69	9,26	4,36	4,36
8	7,47	3,39	3,30	2,75	2,66	2,62	2,67	8,93	4,22	4,25
9	7,02	3,23	3,17	2,66	2,58	2,55	2,61	10,11	4,66	4,59
10	6,81	3,15	3,11	2,62	2,55	2,52	2,59	8,71	4,14	4,19
11	8,51	3,78	3,61	2,94	2,82	2,77	2,81	10,13	4,67	4,62
12	8,58	3,81	3,63	2,95	2,76	2,78	2,79	10,38	4,77	4,70
13	7,71	3,48	3,37	2,79	2,69	2,70	2,70	9,86	4,57	4,53
14	8,89	3,93	3,73	3,01	2,89	2,82	2,86	11,10	5,04	4,91
15	8,95	3,95	3,72	3,02	2,90	2,83	2,87	11,35	5,13	5,05
16	3,47	1,84	2,00	1,89	1,90	1,92	2,01	4,87	2,66	2,94
17	3,37	1,80	1,97	1,87	1,88	1,91	1,99	6,74	2,76	3,02
18	9,95	4,69	4,57	3,85	3,71	3,63	3,67	12,73	6,39	6,45
19	10,15	4,77	4,63	3,90	3,74	3,65	3,69	13,28	6,60	6,62
20	10,40	4,86	4,72	4,00	3,79	3,69	3,72	13,21	6,57	6,60
21	10,06	4,73	4,61	3,87	3,73	3,64	3,68	12,97	6,48	6,51
22	11,27	5,19	4,98	4,10	3,93	3,82	3,86	15,59	7,40	7,28
23	11,18	5,15	4,95	4,08	3,91	3,80	3,83	15,00	7,25	7,13
24	11,33	5,21	5,01	4,12	3,93	3,82	3,85	15,44	7,40	7,27
25	11,73	5,40	5,14	4,20	3,80	3,68	3,91	15,90	7,63	7,42
26	11,85	5,40	5,14	4,21	4,02	3,90	3,91	16,04	7,63	7,46
27	11,34	5,19	4,97	4,10	3,92	3,82	3,84	15,34	7,36	7,22
28	12,51	5,65	5,34	4,34	4,12	3,99	4,00	16,64	7,87	7,64
29	12,31	5,59	5,28	4,30	4,12	3,98	3,98	16,28	7,75	7,53
30	10,19	4,71	4,53	3,43	3,61	3,53	3,56	15,96	7,44	7,23
31	11,52	5,15	4,83	3,89	3,66	3,53	3,51	15,80	7,31	7,12
32	11,60	5,17	4,85	3,89	3,68	3,55	3,48	16,02	7,43	7,19
33	11,13	4,90	4,58	3,62	3,44	3,34	3,34	15,17	6,84	6,46
34	10,64	4,72	4,42	3,52	3,36	3,27	3,33	14,17	6,50	6,27

lul 7

$K_{1,2,ech}$. Valori corectate prin efectul hidrostatic

în bar				$K_{ech} = \sigma^e_{ech}/\sigma^n_{ech}$						
2,0	2,5	3,0	3,5	0,0	0,5	1,0	2,0	2,5	3,0	3,5
$= \sigma^e_2/\sigma^n_2$										
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
3,22	3,23	3,24	3,34	5,13	2,53	2,63	2,36	2,33	2,34	2,43
3,26	3,26	3,27	3,37	5,18	2,57	2,66	2,38	2,35	2,36	2,44
3,46	3,44	3,41	3,50	6,37	3,00	3,00	2,59	2,54	2,50	2,57
3,60	3,56	3,54	3,62	6,58	3,08	3,08	2,64	2,58	2,56	2,62
3,53	3,49	3,48	3,56	6,14	2,91	2,94	2,56	2,51	2,50	2,57
3,64	3,60	3,58	3,65	6,93	3,24	3,19	2,71	2,64	2,62	2,68
3,81	3,74	3,70	3,76	7,64	3,49	3,39	2,84	2,75	2,71	2,76
3,74	3,68	3,65	3,72	7,52	3,43	3,35	2,81	2,72	2,69	2,74
3,93	3,84	3,80	3,84	7,24	3,33	3,27	2,76	2,68	2,65	2,71
3,69	3,63	3,60	3,67	6,90	3,20	3,17	2,69	2,62	2,60	2,66
3,98	3,89	3,83	3,88	8,56	3,82	3,66	3,00	2,89	2,83	2,88
4,02	4,82	3,87	3,89	8,64	3,85	3,68	3,02	3,01	2,85	2,87
3,91	3,84	3,83	3,84	7,81	3,54	3,44	2,86	2,77	2,78	2,78
4,16	4,04	3,97	4,01	8,98	3,98	3,79	3,08	2,96	2,90	2,93
4,20	4,08	4,00	4,04	9,06	4,01	3,80	3,10	2,98	2,91	2,95
2,84	2,88	2,92	3,03	3,56	1,90	2,07	1,96	1,98	2,01	2,09
2,89	2,92	2,96	3,07	3,52	1,88	2,06	1,96	1,97	2,00	2,09
5,58	5,46	5,42	5,55	10,08	4,80	4,70	3,98	3,84	3,77	3,82
5,60	5,55	5,50	5,63	10,31	4,88	4,77	4,02	3,88	3,81	3,85
5,55	5,54	5,48	5,62	10,52	4,96	4,84	4,10	3,92	3,83	3,88
5,63	5,49	5,46	5,56	10,20	4,84	4,74	4,00	3,86	3,79	3,84
6,09	5,88	5,79	5,49	11,55	5,35	5,16	4,26	4,09	3,98	3,97
6,01	5,83	5,75	5,86	11,40	5,29	5,10	4,23	4,06	3,96	4,01
6,10	5,88	5,80	5,89	11,58	5,36	5,18	4,28	4,09	3,99	4,02
6,18	5,35	5,00	5,99	11,97	5,55	5,31	4,35	3,91	3,76	4,09
6,24	5,98	5,86	5,98	12,09	5,55	5,31	4,37	4,17	4,06	4,09
6,07	5,88	5,79	5,90	11,58	5,34	5,14	4,26	4,08	3,98	4,02
6,34	6,12	6,01	6,09	12,73	5,80	5,50	4,49	4,28	4,16	4,18
6,29	6,07	5,95	6,04	12,52	5,78	5,44	4,45	4,27	4,14	4,16
5,75	5,76	5,67	5,78	10,72	4,96	4,79	3,68	3,82	3,74	3,78
5,82	5,53	5,38	5,41	11,78	5,30	5,01	4,05	3,82	3,69	3,68
5,88	5,59	5,42	5,43	11,87	5,33	5,04	4,05	3,84	3,71	3,66
5,20	4,96	4,84	4,86	11,37	5,03	4,70	3,73	3,55	3,45	3,45
5,08	4,81	4,71	4,80	10,83	4,83	4,55	3,63	3,47	3,37	3,44

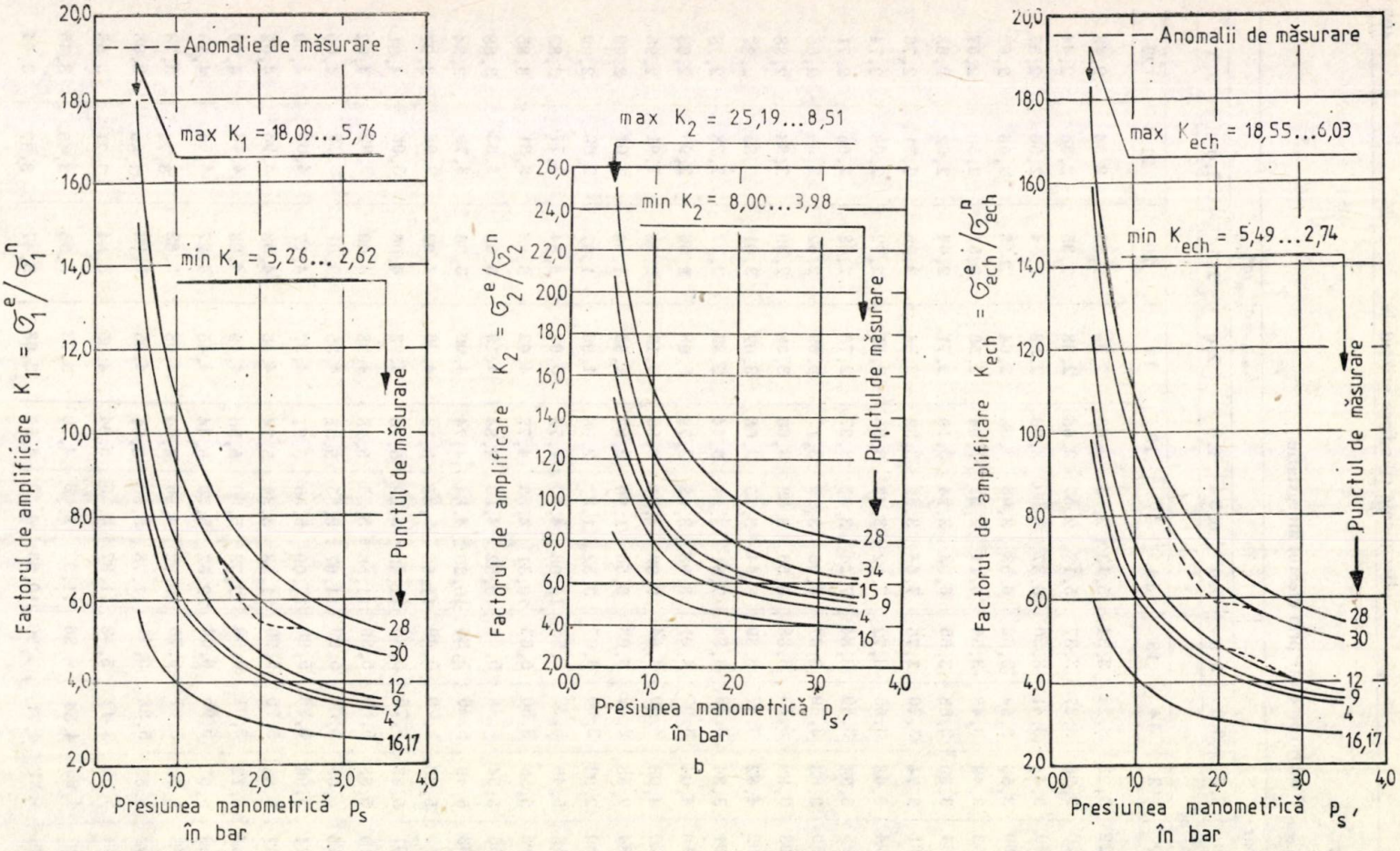


Fig. 5. — Factorii de amplificare : $a - K_1$; $b - K_2$; $c - K_{ech}$.

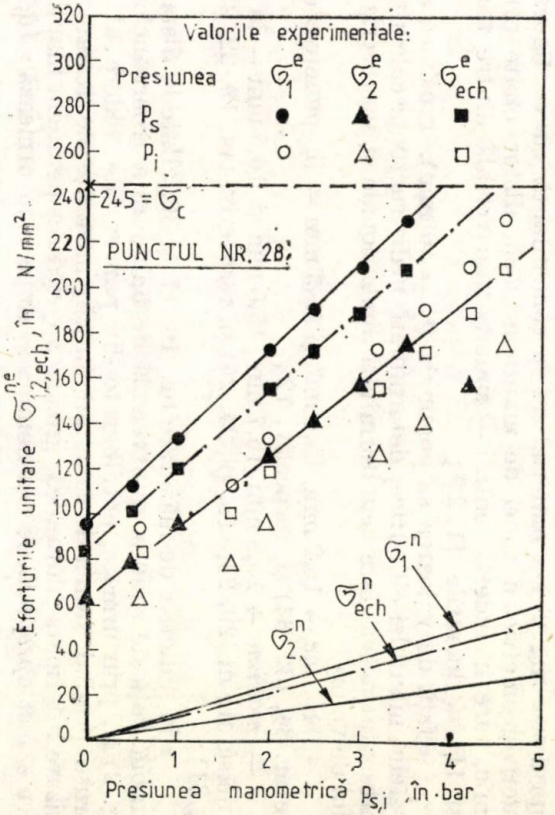


Fig. 6 — Eforturile unitare (tensiunile mecanice) $\sigma_{1,2,ech}^{n,e}$ în punctul de măsurare nr. 28.

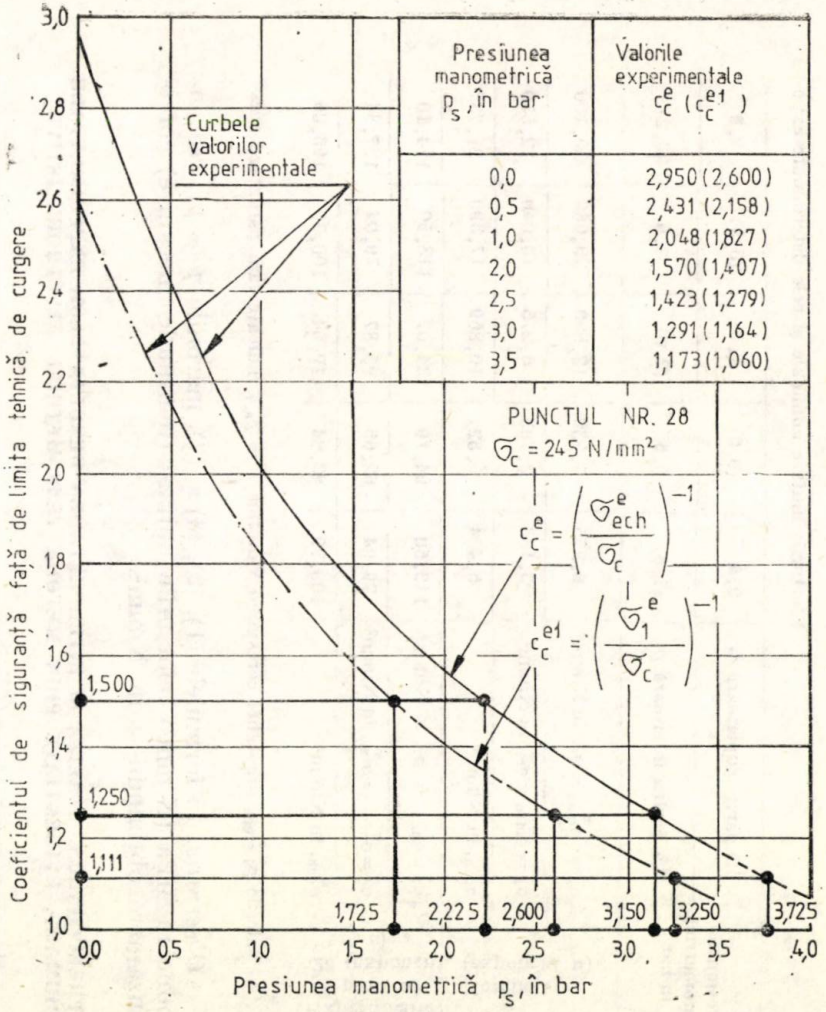


Fig. 7. — Coeficientul de siguranță față de limită tehnică de curgere (valoare minimă normată → σ_c = 245 N/mm²) pentru punctul de măsurare nr. 28.

Tabe-

Eforturile unitare nominale și cele determinate expe-

Presiunea p manometrică, în bar		La partea superioară p_s	0,5	(0,0)	1,0	(0,5)	2,0
		La partea inferioară p_i	(1,6)	0,6	(2,0)	1,6	(3,2)
Nominal (exponent n)		$\sigma_1^n = \sigma_{max}^n = \sigma_t^n$, în N/mm²	6,275	7,530	12,550	20,080	25,100
		$\sigma_2^n = \sigma_{min}^n = \sigma_m^n$, în N/mm²	3,138	3,765	6,275	10,040	12,550
		σ_{ech}^n, în N/mm²	5,434	6,521	10,869	17,390	21,737
Experimental în punctul 28 (exponent e)		$\sigma_1^e = \sigma_{max}^e = \sigma_t^e$, în N/mm²	113,50	94,19	134,07	113,50	174,10
		$\sigma_2^e = \sigma_{min}^e = \sigma_m^e$, în N/mm²	79,04	62,65	95,87	79,04	127,34
		σ_{ech}^e, în N/mm²	100,79	83,04	119,64	100,79	156,06

No tă. Valorile $\sigma_{1,2,ech}^{n,e}$ din tabel corespund valorilor $p = p_{s,i}$ indicate fără paranteze aces-

Observație. În formulele (1), (2), (6) și (7), mărimile $p \rightarrow p_{s,i}$ se introduc în MPa (N/mm²), eforturile unitare (tensiunile mecanice) corespunzătoare obținîndu-se în N/mm².

3. PRELUCRAREA, ANALIZA ȘI INTERPRETAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE PRIMARE, EVIDENȚIATE PRIN METODA TENSOMETRIEI ELECTROREZISTIVE

Se precizează următoarele :

• amplasarea cîmpurilor de TER-uri (fig. 1) și a traductoarelor propriu-zise (fig. 2) s-a materializat în concordanță cu configurația constructiv-geometrică a zonei de manta mijlocii, distorsionate prin colaps termic, care include — central — sudura transversală dintre tronsoanele I și II (v. lucrările [1, 2]);

• față de valoarea sa nominală ($s_1 = 16$ mm), grosimea *efectivă* a peretelui mantalei cilindrice, determinată nedistructiv pe cale ultrasonică, a prezentat accentuate neuniformități dimensionale și s-a înscris în intervalul de valori :

— *minime* → 15,2 mm, 15,4 mm și 15,5 mm — în punctele de măsurare nr. 34, (32, 34) și, respectiv, 12 ;

— *maxime* → 16,8 mm, 16,7 mm, 16,6 mm și 16,5 mm — în punctele de măsurare nr. 29, 24, (18, 19, 24, 25) și, respectiv, (14, 19, 22, 23, 24, 25, 28, 31);

• în punctele de măsurare nr. 16, 17 și 30, aflate la distanță confortabilă față de sudura transversală de îmbinare a tronsoanelor I și II (fig. 2) și, prin urmare, netulburate din punctul de vedere al efectelor intruse privind starea de solicitare în circumstanțe de testare prin presurizare interioară hidraulică, grosimea *efectivă* a peretelui mantalei cilindrice a fost *apropiată* de cea nominală, după cum urmează : 16,1 mm și

ul 8

rimental (tensometric) în punctul de măsurare nr. 28

2,5	(2,0)	3,0	(2,5)	3,5	(3,0)	(3,5)	5,0
(3,7)	3,2	(4,2)	3,7	(4,6)	4,2	4,6	5,0
31,375	40,160	37,650	46,435	43,925	52,710	57,730	62,750
15,688	20,080	18,825	23,218	21,963	26,355	28,865	31,375
27,172	34,780	32,606	40,214	38,040	45,648	49,996	54,343
191,42	174,10	210,35	191,42	230,96	210,35	230,96	—
142,12	127,34	158,27	142,12	175,79	158,27	175,79	—
172,15	156,06	189,75	156,06	208,91	189,75	208,91	—

tea din urmă corelîndu-se cu valorile corespunzătoare $p = p_{t;s}$ menţionate între paranteze.

16,3 mm → nr. 16; 15,9 mm → nr. 17; 15,7 mm şi 15,6 mm → nr. 30; în continuare, pentru referinţă şi comparaţie se reţin rezultatele experimentale privind punctele de măsurare aşa-zise *etalon* nr. 16 (situat echidistant faţă de generatoarele G_2 şi G_3, la 545 mm — în direcţia longitudinală — de marginea sudurii → fig. 2, a) şi nr. 17 (situat pe generatoarea G_0, la 2 235 mm — de asemenea în direcţia longitudinală, dar pe tronsonul I — de marginea sudurii → fig. 2, a);

• valorile presiunii manometrice p_t, măsurate la partea inferioară a vasului F-102 şi reţinute ca atare (0,6; 1,6; 2,0; 3,2; 3,7; 4,2 şi 4,6 bar) în tabelul 8 au doar semnificaţie *informativă* şi *orientativă*.

3.1. DISTRIBUŢIA EFORTURILOR UNITARE

3.1.1. În lungul sudurii transversale. În lungul sudurii transversale dintre tronsoanele I şi II, pe parcursul de la partea superioară (coamă) înspre partea inferioară (burtă) ale vasului F-102, eforturile unitare (tensiunile mecanice) — toate — cresc *neliniar*, contravenind conceptului clasic de presurizare interioară hidrostatică (căruia îi corespunde distribuţia *liniară* de eforturi unitare), după cum urmează (fig. 3, b, c şi tab. 3);

• pentru tronsonul I:

$\sigma_{ech}^{1e} = \sigma_t^e \rightarrow$ de la 136,93 N/mm² pînă la 229,88 N/mm²;

$\sigma_m^e \rightarrow$ de la 97,32 N/mm² pînă la 174,38 N/mm²;

$\sigma_{ech}^e \rightarrow$ de la 122,05 N/mm² pînă la 207,76 N/mm²;

• pentru tronsonul II :

$$\sigma^{1e}_{ech} = \sigma^{e}_{t} \rightarrow \text{de la } 136{,}31 \text{ N/mm}^2 \text{ pînă la } 230{,}96 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma^{e}_{m} \rightarrow \text{de la } 96{,}53 \text{ N/mm}^2 \text{ pînă la } 175{,}79 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma^{e}_{ech} \rightarrow \text{de la } 121{,}41 \text{ N/mm}^2 \text{ pînă la } 208{,}91 \text{ N/mm}^2,$$

valorile indicate revenind celui mai puternic nivel de solicitare prin presurizare, respectiv celui cu $p \rightarrow p_s = 3{,}5$ bar.

Aşadar, eforturile unitare cele mai mari se constată de partea tronsonului II, rezultînd :

$$\sigma_{max\ max} = \sigma^{1e}_{ech} = \sigma^{e}_{t} = 230{,}96 \text{ N/mm}^2 < \sigma_c = 245 \text{ N/mm}^2,$$

respectiv :

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_{max\ max}} = \left(\frac{230{,}96}{245}\right)^{-1} = 1{,}0608 \rightarrow 106{,}08\ \%,$$

sau

$$\sigma'_{max\ max} = \sigma^{e}_{ech} = 208{,}91 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{max\ max},$$

respectiv :

$$\frac{\sigma_c}{\sigma'_{max\ max}} = \frac{245}{208{,}91} = 1{,}1727 \rightarrow 117{,}27\%,$$

deoarece :

$$\frac{\sigma_{max\ max}}{\sigma'_{max\ max}} = \frac{230{,}96}{208{,}91} = 1{,}1056 \rightarrow 110{,}56\%.$$

Pe partea tronsonului I, evoluţia eforturilor unitare prezintă *uniformitate* legică, unele abateri — de altfel destul de mici — evidenţiindu-se doar pentru σ^{e}_{m} în dreptul punctelor de măsurare nr. 4 şi 8. În schimb, pe partea tronsonului II, evoluţia eforturilor unitare este *neunivocă*, abaterile fiind mai puţin pronunţate pentru σ^{e}_{t} şi σ^{e}_{ech}, dar drastic accentuate pentru σ^{e}_{m} (în dreptul punctelor de măsurare nr. 11 şi 22) — fie în sensul amplificării (punctul de măsurare nr. 11), fie în sensul diminuării (punctul de măsurare nr. 22) intensităţii eforturilor unitare respective.

În principal, abaterile constatate se datoresc neconformităţii constructiv-geometrice a mantalei cilindrice, în zona joncţionării tronsoanelor I şi II, pe de o parte şi neuniformităţii grosimii de perete, pe de altă parte, acestea asociindu-se volens-nolens cu efectele acţiunii cîmpului gravific terestru şi, eventual, cu efectele ascunse ale unor concentratori, tensiuni reziduale etc. Oricum, faţă de limita tehnică de curgere $\sigma_c = 245$ N/mm^2, este asigurată o *rezervă* — în condiţiile presurizării hidraulice cu $p_s = 3{,}5$ bar — de cel puţin 6%, în alternativa criteriului Galilei-Rankine

şi de cel puţin 10%, în alternativa criteriului Mises-Huber. Evident, în circumstanţele presurizării tehnologice (cu un grad de umplere $\nu \leqslant 88\%$ vol. şi $p_s \leqslant 1{,}6$ bar, respectiv cu temperatură de regim $t_r \leqslant 75°C$), rezerva asigurată faţă de limita tehnică de curgere este *considerabil mai mare* (peste 50% — v. fig. 7).

3.1.2. În lungul generatoarelor. De această dată, în zona joncţiunii tronsoanelor I şi II ale vasului F-102, distribuţia de eforturi unitare, în lungul fiecăreia dintre generatoarele considerate, prezintă următoarele particularităţi (fig. 3, c şi tab. 4):

• pentru $\sigma_{ech}^{1e} = \sigma_t^e \rightarrow$ intensitatea este *variabilă* în lungul fiecăreia dintre generatoare, legile de dependenţă nefiind aceleaşi de la o generatoare la oricare alta; or, teoretic, intensitatea acestor eforturi unitare trebuia să fie *constantă* în lungul unei aceleiaşi generatoare; de remarcat că cele mai mari valori σ_t^e se constată în preajma sudurii dintre tronsoanele I şi II, intensitatea lor *maximă* revenind generatoarei G_{28} (fig. 3, c) şi generatoarei G_{29} (fig. 3, b→punctul de măsurare nr. 28), pentru care:

$$\max\ \sigma_t^e(G_{28}) = 225{,}82\ \text{N/mm}^2 < \max\ \sigma_t^e(G_{29}) = 230{,}96\ \text{N/mm}^2,$$

iar intensitatea lor *minimă* corespunzînd generatoarei G_3 (fig. 3, c → punctul de măsurare nr. 5), pentru care:

$$\min\ \sigma_t^e(G_3) = 144{,}06\ \text{N/mm}^2,$$

prin urmare:

$$\frac{\max\ \sigma_t^e(G_{29})}{\min\ \sigma_t^e(G_3)} = \frac{230{,}96}{144{,}06} = 1{,}6032 \rightarrow 160{,}32\%;$$

• pentru $\sigma_m^e \rightarrow$ intensitatea este de asemenea *variabilă* în lungul fiecăreia dintre generatoare, dar aceasta se află în deplină concordanţă cu conceptele teoretice corespunzătoare; contrar aşteptării, însă, legile de dependenţă nu prezintă univocitate de la o generatoare la oricare alta, cea mai accentuată anomalie evidenţiindu-se în cazul generatoarei G_4 (în apropierea coamei); rezultă:

$$\max \sigma_m^e = 172{,}78\ \text{N/mm}^2 \leftarrow G_{28};$$

$$\min \sigma_m^e = 101{,}04\ \text{N/mm}^2 \leftarrow G_3.$$

deci:

$$\frac{\max\ \sigma_m^e(G_{28})}{\min\ \sigma_m^e(G_3)} = \frac{172{,}78}{101{,}04} = 1{,}7100,$$

respectiv:

$$\frac{\max\ \sigma_m^e(G_{29})}{\min\ \sigma_m^e(G_3)} = \frac{175{,}79}{101{,}04} = 1{,}7398 \rightarrow 173{,}98\%;$$

• pentru σ^e_{ech} → legile de distribuție sînt concordante cu cele evidențiate anterior pentru σ^e_t și σ^e_m (fig. 3, c), rezultînd :

$$\frac{\max \sigma^e_{ech}(G_{29})}{\min \sigma^e_{ech}(G_3)} = \frac{208{,}91}{128{,}43} = 1{,}6266 \rightarrow 162{,}66\%.$$

Așadar , oricare dintre generatoarele avute în vedere — pentru $p_s = 3{,}5$ bar (tab. 4 și fig. 3, c) — ilustrează cîmpul de eforturi unitare cu intensitate maximă în zona sudurii transversale care joncționează tronsoanele I și II și confirmă, totodată, efectele determinante ale solicitării datorite acțiunii cîmpului gravific terestru (sarcinilor gravitaționale), imperfecțiunilor de formă constructiv-geometrică ș.a.

3.2. SIMPLEXURILE CARACTERIZANTE

Față de simplexul caracterizant așa-zis *nominal* :

$$\bar{\sigma}^n_{t/m} = \frac{\sigma^n_t}{\sigma^n_m} = 2{,}000 \ ,$$

simplexurile caracterizante așa-numite efective, *experimentale*, au valori care se înscriu în intervalul (tab. 5 și fig. 4) :

$$\bar{\sigma}^e_{t/m} = 1{,}233 \ \ldots \ 1{,}703 \ll 2{,}000$$

și aceasta în funcție de : starea dimensională și stabilitatea sa; forma constructiv-geometrică; intensitatea presurizării hidraulice interioare; modul și sistemul de rezemare; legea după care se materializează presurizarea hidrostatică etc.

Datele tabelului 5, împreună cu diagramele redate în figura 4, permit evidențierea în principal a următoarelor aspecte :

— în domeniul investigațiilor experimentale efectuate, a rezultat $\sigma^e_m < \sigma^e_t$, ceea ce confirmă că $\sigma^e_1 = \sigma^e_t$;

— pentru punctele de măsurare nr. 16 și nr. 17, considerate ca niște *etaloane*, corespunde simplexul caracterizat $\bar{\sigma}^e_{t/m} = 1{,}300 \ \ldots \ 1{,}400$, valorile sale modificîndu-se (în sensul dimunării) *nesemnificativ* cu creșterea intensității de presurizare;

— pentru marea majoritate a punctelor de măsurare, simplexul caracterizant $\bar{\sigma}^e_{t/m}$ scade cu creșterea intensității de presurizare p_s pînă la circa 2 bar, în acest domeniu accentuîndu-se influența componentelor de efort unitar σ^e_m care se datoresc — în principal — abaterilor de formă constructiv-geometrică; în intervalul $p_s = 2{,}0 \ \ldots \ 3{,}5$ bar, simplexul caracterizant $\bar{\sigma}^e_{t/m}$ se menține în jurul unor valori *minime*, ceea ce se datorește unor efecte de calibrare — prin presurizare hidraulică interioară —, evident elastică, a formei constructiv-geometrice a mantalei cilindrice;

— unele anomalii de măsurare (de ex. punctele de măsurare nr. 12, 30 etc.) se pot identifica cu ușurință prin intermediul simplexului caracterizant $\bar{\sigma}^e_{t/m}$;

— simplexul caracterizant $\bar{\sigma}^{t}_{i/ech}$ are valori care se înscriu în intervalul :

$$\bar{\sigma}^{t}_{i/ech} = 1{,}061 \ldots 1{,}149,$$

Punctul de măsurare nr. 12 pentru p_s = = 2,5 bar (p_i = 3,7 bar)

Punctul de măsurare nr. 3 pentru p_s = 0,0 bar (p_i = 0,6 bar)

ceea ce înseamnă că analiza fundamentată pe criteriul Galilei-Rankine (teoria I), față de cea fundamentată pe criteriul Mises-Huber (teoria IV), implică *supraevaluări* ale eforturilor unitare echivalente de ordinul a 6 ... 15% și, astfel, situează evaluările privind disponibilitatea de capacitate portantă pe partea lor cea mai acoperitoare.

3.3. FACTORII DE AMPLIFICARE A EFORTURILOR UNITARE

3.3.1. Factorul de amplificare a eforturilor unitare circumferențiale. Definit ca simplex al eforturilor unitare circumferențiale și, deci, reprezentînd raportul dintre eforturile unitare omonime experimentale σ^{e}_{t} și cele nominale σ^{n}_{t}, factorul de amplificare K_1 (tab. 6 și fig. 5, a) scade drastic, după legi cvasihiperbolice, cu creșterea intensității de presurizare p_s — de la nivelul *maxim* : max K_1 = 18,09 ... 5,76, cît corespunde pentru p_s = 0,5 bar și se stabilizează la nivelul *minim* : min K_1 = 5,26 ... 2,62, constatat ca atare pentru $p_s \geqslant 2{,}5$ bar. Cum era de așteptat, factorului K_1 îi corespund valorile *cele mai ridicate* pentru punctul de măsurare nr. 28 și *cele mai coborîte* pentru punctele de măsurare nr. 16 și nr. 17 (K_1 = = 18,09 ... 5,26, respectiv K_1 = 5,87 ... 2,62). Prin urmare, în domeniul de investigare experimentală ($p_s \leqslant 3{,}5$ bar), s-a obținut $K_1 \geqslant 2{,}62$, reatestîndu-se :

— efectele *accentuate* ale factorilor perturbatori — enumerați anterior (v. § 3.1) — asupra stării de solicitare circumferențială, mai cu seamă în domeniul presiunilor manometrice p_s joase (0,5 ... 1,5 bar);

— efectele *favorabile* ale calibrării mantalei cilindrice — tendința de calibrare materializîndu-se în stadiul comportării elastice —, în mod deosebit în domeniul presiunilor manometrice p_s mai ridicate (2,5 .... 3,5 bar).

Faptul că, în punctele de măsurare nr. 16 și nr. 17 așa-zise *etalon*, factorul de amplificare K_1 este *sensibil supraunitar* (K_1 = 2,62 ... 5,87), se explică prin existența ovalizărilor în secțiunile transversale care trec prin punctele respective.

Valorile factorului de amplificare K_1, *corectate* prin efectul hidrostatic înregistrat prin intermediul presiunii manometrice p_i = 0,6 ... 4,6 bar (?!? → v. nota la tab. 2), sînt următoarele (tab. 7) : max K_1 = 5,65 ... ... 2,50 și min K_1 = 4, 00 ... 1,80, pentru $p_s \geqslant 0{,}5$ bar; K_1 = 3,37 ... ... 12,51 pentru p_s = 0,0 bar și p_i = 0,6 bar; $K_1 \geqslant 1{,}80$, indiferent de p_i.

Cum efectul hidrostatic *înregistrat* (v. presiunea manometrică p_i = = 0,6 ... 4,6 bar) nu a putut fi așa de accentuat, valorile corectate K_1 — de altfel evident favorabile — se reține ca avînd numai o semnificație informativă-orientativă, pentru deplină concludență urmînd a se valorifica (dacă mai este cazul !) schema de calcul din figura 1, b.

3.3.2. Factorul de amplificare a eforturilor unitare meridiane. Definit ca simplex al eforturilor unitare meridiane și, deci, reprezentînd raportul dintre eforturile unitare omonime experimentale σ_m^e și cele nominale σ_m^n, factorul de amplificare K_2 (tab. 6, 7 și fig. 5, b) evoluează — calitativ — identic cu factorul de amplificare K_1 (v. § 3.3.1), rezultînd :

— *valorile globale* : max $K_2 = 25{,}19 \ldots 8{,}51$; min $K_2 = 8{,}00 \ldots$ $\ldots 3{,}98$; $K_2 \geqslant 3{,}98$;

— *valorile corectate* (cu semnificație numai informativă-orientativă) : max $K_2 = 7{,}87 \ldots 3{,}03$ și min $K_2 = 6{,}09 \ldots 2{,}66$, pentru $p_s \geqslant$ $\geqslant 0{,}5$ bar ; $K_2 = 4{,}87 \ldots 16{,}64$, pentru $p_s = 0{,}0$ bar și $p_i = 0{,}6$ bar ; $K_2 \geqslant 2{,}66$, indiferent de p_i.

Amplificarea deosebit de drastică a eforturilor unitare meridiane σ_m^e se datorește factorilor perturbatori care au indus efecte de încovoiere (sarcinile masice, distorsiunile de formă implicate de colapsul termic, ovalizările, amprentele, eventualele tensiuni reziduale etc.), pentru punctele de măsurare nr. 16 și nr. 17, așa-zise *etalon*, constatîndu-se valorile : $K_2 =$ $= 3{,}98 \ldots 8{,}84$, deci : $K_2 \geqslant 3{,}98$, astfel că :

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{3{,}98}{2{,}62} = 1{,}5191 \rightarrow 151{,}91\%.$$

3.3.3. Factorul de amplificare a eforturilor unitare echivalente (criteriul Mises-Huber). Definit ca simplex al eforturilor unitare echivalente (criteriului Mises-Huber) și, deci, reprezentînd raportul dintre eforturile unitare echivalente (omonime) experimentale σ_{ech}^e și cele nominale σ_{ech}^n, factorul de amplificare K_{ech} (tab. 6, 7 și fig. 5, c) evoluează — calitativ și cu totul nesurprinzător — identic cu factorii de amplificare $K_{1,2}$ (v. §§ 3.3.1, 2), rezultînd :

— *valorile globale* : max $K_{ech} = 18{,}55 \ldots 6{,}03$; min $K_{ech} = 5{,}49$ $\ldots 2{,}74$; $K_{ech} \geqslant 2{,}74$;

— *valorile corectate* (cu semnificație numai informativă-orientativă) : max $K_{ech} = 5{,}80 \ldots 2{,}09$ și min $K_{ech} = 4{,}18 \ldots 1{,}88$, pentru $p_s \geqslant$ $\geqslant 0{,}5$ bar ; $K_{ech} = 3{,}52 \ldots 12{,}73$ pentru $p_s = 0{,}0$ bar și $p_i = 0{,}6$ bar ; $K_{ech} \geqslant 1{,}88$, indiferent de p_i ;

— valorile corespunzătoare punctelor de măsurare nr. 16 și nr. 17, așa-zise *etalon* : $K_{ech} = 2{,}74 \ldots 6{,}03$, deci : $K_{ech} \geqslant 2{,}74$, astfel că :

$$\frac{K_{ech}}{K_1} = \frac{2{,}74}{2{,}62} = 1{,}0458 \rightarrow 104{,}58\% ;$$

$$\frac{K_2}{K_{ech}} = \frac{3{,}98}{2{,}74} = 1{,}4526 \rightarrow 145{,}26\%.$$

3.4. FUNCȚIONAREA ÎN CONDIȚII CORESPUNZĂTOARE DE SECURITATE TEHNICĂ

Pentru punctul de măsurare nr. 28, care este un așa-numit *cel mai fierbinte punct*, din punctul de vedere al solicitării mecanice a vasului

F-102, în circumstanţele de presurizare hidraulică pentru care s-a efectuat tensometrarea, datele reprezentative — primare şi/sau prelucrate în mod adecvat — se redau final în tabelul 8 şi în figurile 6, 7. Analiza datelor respective evidenţiază — în plus faţă de cele sintetizate în paragrafele anterioare — următoarele rezultate, semnificative pentru exploatarea tehnologică industrială:

a) în alternativa valorificării criteriului de rezistenţă Mises-Huber (teoria IV → curba c_c^e în fig. 7):

Epuizarea disponibilităţii din punctul de vedere al limitei tehnice de curgere $\sigma_c = 245$ N/mm²			Coeficientul de siguranţă faţă de limita tehnică de curgere c_c^e, asigurat	Presiunea manometrică p_s maximă, admisă pentru exploatarea tehnologică, în condiţii de securitate tehnică, în bar
%	$k_c^e=(c_c^e)^{-1}$	$k_c^e\sigma_c$	$c_c^e=(k_c^e)^{-1}$	
90	0,90	$0,90\sigma_c$	1,111	3,725
80	0,80	$0,80\sigma_c$	1,250	3,150
66	0,66	$0,66\sigma_c$	1,500	2',225

b) în alternativa valorificării criteriului de rezistenţă Galilei-Rankine (teoria I → curba $c_c^{e1} \equiv c_c^{1e}$ în fig. 7):

%	$k_c^{e1} = (c_c^{e1})^{-1}$	$k_c^{e1}\,\sigma_c$	$c_c^{1e} \equiv c_c^{e1}=(k_c^{e1})^{-1}$	p_s, în bar
90	0,90	$0,90\sigma_c$	1,111	3,250
80	0,80	$0,80\sigma_c$	1,250	2,600
66	0,66	$0,66\sigma_c$	1,500	1,725

Întrucît prevederile prescripţiilor tehnice ISCIR C 4-83 [5] sînt fundamentate pe criteriul de reszistenţă Galilei-Rankine, care se identifică cu criteriul de rezistenţă Coulomb-Guest (teoria III) în alternativa cu $\sigma_3 \to 0$ (aici σ_3 fiind cel de-al treilea, minim, efort unitar principal → $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$), se impune adoptarea următoarelor valori *maxime* pentru presiunea manometrică p_s:

- privind exploatarea tehnologică industrială în condiţii corespunzătoare de securitate tehnică ($c_c = 1,500$; rezerva faţă de $\sigma_c \to 44\%$): $p_s = 1,725$ bar;
- privind încercarea de presiune hidraulică la scadenţele ISCIR sau în alte circumstanţe ($c_c = 1,111$; rezerva faţă de $\sigma_c \to 10\%$): $p_s = 3,250$ bar.

4. CONCLUZII. RECOMANDĂRI

4.1. În condiţiile exploatării tehnologice industriale, cerinţele asigurării securităţii tehnice — în conformitate cu prevederile PT ISCIR C 4-83 [5] — impun ca presiunea manometrică, la partea superioară a

vasului F-102, să fie limitată la cel mult 1,725 bar. Evident, această din urmă presiune manometrică este mai mare decît presiunea manometrică de regim (1,600 bar), însă se situează sensibil sub presiunea manometrică de calcul (2,500 bar).

4.2. Din aceleași motive de securitate tehnică (se are în vedere criteriul restricției de 90% din limita tehnică de curgere!), încercările de presiune hidraulică — la scadențele ISCIR sau în oricare alte circumstanțe — se vor efectua la presiunea manometrică de 3,250 bar, această presiune revenind la nivelul părții superioare a vasului F-102. Evident, presiunea manometrică (3,250 bar) impusă astfel se situează sub cea 3,500 bar) consemnată ca atare în documentația tehnică a vasului F-102.

4.3. Cerințele de securitate tehnică, formulate în deplină concordanță cu preceptele criteriului de rezistență Mises-Huber (teoria IV) — care nu este inclus în fundamentarea prevederilor PT ISCIR C 4-83 [5] —, impun ca presiunea manometrică la partea superioară a vasului F-102 să fie limitată astfel:

— la cel mult 2,225 bar, în condițiile exploatării tehnologice *normale*, presiunea respectivă situîndu-se confortabil deasupra celei de regim (1,600 bar) și rămînînd totuși, sub nivelul celei de calcul (2,500 bar);

— la cel mult 3,725 bar, în condițiile *încercării* de presiune hidraulică, presiunea respectivă de asemenea situîndu-se peste nivelul celei omonime (3,500 bar) impuse prin documentația tehnică de bază.

4.4. Limitării de la pct. 4.1 îi corespund următorii coeficienți/factori de amplificare a eforturilor unitare (tensiunilor mecanice):

$$\left.\begin{aligned} &\sigma^{1e}_{ech} = \sigma^{e}_{i} \rightarrow K_1 = 3{,}20; \\ &\sigma^{e}_{m} \rightarrow K_2 = 4{,}64; \\ &\sigma^{4e}_{ech} = \sigma^{e}_{ech} \rightarrow K_{ech} = 3{,}17; \end{aligned}\right\} \text{pentru punctele de măsurare nr. 16 și nr. 17, } \textit{etalon}:$$

$$\left.\begin{aligned} &K_1 = 7{,}58; \\ &K_2 = 11{,}00 \\ &K_{ech} = 7{,}70; \end{aligned}\right\} \text{pentru punctul de măsurare nr. 28 } \textit{cel mai solicitat},$$

valorile menționate rezultînd din graficele redate în figurile adecvate 5 (pentru $p_s = 1{,}725$ bar).

4.5. Restricțiile din lucrările anterioare, [1, 2], rămîn pe mai departe în vigoare ca atare.

Primit în redacție la 31 iulie 1990

BIBLIOGRAFIE

1. A. PAVEL, *Analiza disponibilității de capacitate portantă a vasului F-102 — Refacere Piroliză — C. P. Teleajen, care prezintă unele abateri constructiv-geometrice*, Ploiești, Institutul de Petrol și Gaze, 1987 (fondul documentar prof. dr. ing. A. Pavel).

2. A. PAVEL, *Avarierea prin colaps a apratelor tehnologice chimice și petrochimice (III). Distorsionarea prin termocolaps a unui recipient cilindric orizontal, cu funcție*

de vas separator, în circumstanțe de tratament termic local (zonal). Ploiești, Institutul de Petrol și Gaze, 1990 (fondul documentar prof. dr. ing. A. Pavel).

3. V. RADIANOV și colab., *Referat asupra rezultatelor verificării capacității de rezistență a vasului F-102 din obiect refacere Piroliză-Teleajen în timpul încercărilor de probă.* Contract nr. 6338/1988, fază unică. București, INCERC, 1989.
4. V. RADIANOV, *Analiza experimentală a distribuției tensiunilor la un recipient metalic orizontal din industria petrochimică.* În : Lucrări prezentate la al V-lea Simpozion Național de Tensometrie (cu participare internațională), vol. I., Galați — România, 20—23 sept., 1989, p. 305—312.
5. * * * *Prescripții tehnice pentru proiectarea, execuția, instalarea, exploatarea, repararea și verificarea recipientelor metalice stabile sub presiune.* C 4-83, Colecția ISCIR — — România, ediție oficială, București, 1984.

OPTIMIZAREA FUNCȚIONAL – CONSTRUCTIVĂ A VARIATORULUI EHD DE TIP FRONTAL CU BILE

de I. M. CIORNEI

Universitatea „Ștefan cel Mare", Suceava

În lucrare, după prezentarea construcțiilor clasice de variatoare EHD de tip frontal cu bile, sînt deduse relațiile de calcul ale spinului, bine verificate și de măsurătorile experimentale. În final, se descriu cîteva noi variante, cu performanțe deosebite, parte din ele brevete de invenție.

GENERALITĂȚI

La variatoarele frontal cu bile, suprafețele cu căi de rulare de diametru variabil, sînt plane — suprafețele frontale ale unor discuri plane. După cum s-a arătat, [1] [6], comparativ cu celelalte tipuri de variatoare ele prezintă avantajul simplității constructive, asigurînd în domeniul puterilor mici și mijlocii, obținerea de turații la ieșire pînă la zero, respectiv de a porni de la zero în sus, atunci cînd turația de intrare este constantă.

Primele tipuri de variatoare cu bile construite au fost cu o singură bilă, avînd schema prezentată în figura 1. Variatorul are două discuri montate excentric, unul de intrare, sau conductor, 1, și altul de ieșire, condus, 2; între cele două discuri se află dispusă într-o colivie 4, o bilă 3 prin care se transmite mișcarea. Prin deplasarea coliviei 4 pe direcție radială, în planul axelor se modifică raportul de transmitere.

În cazul neglijării alunecării, din peliculele EHD de lubrifiant, dintre bile și cele două discuri, raportul de transmitere poate fi calculat cu relația:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{b}{a} = \frac{e-a}{a} = \frac{e}{a} - 1,$$

unde e este excentricitatea variatorului.

Variatorul are dezavantajul unei capacități portante scăzute din cauza utilizării unui singur contact punctual, care impune, valori mici pentru forța de apăsare Q.

Pentru mărirea capacității portante s-a încercat utilizarea unui număr sporit de bile, dispuse într-o colivie, așa cum se arată în figura 2. Evident, un asemenea variator nu poate funcționa deoarece vitezele transmise discului de ieșire prin diverse bile sînt diferite, ceea ce duce la blocarea lui.

Pentru a elimina blocarea variatorului s-a trecut la montarea coliviei într-un rulment axial cu bile 5, ceea ce face posibilă rotirea liberă a ansamblului tuturor bilelor în jurul centrului coliviei figura 3. Schimbarea raportului de transmitere are loc prin deplasarea coliviei 4, împreună cu rulmentul 5, pe direcție radială, în planul axelor variatorului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 5–6, 1991, P. 423–438

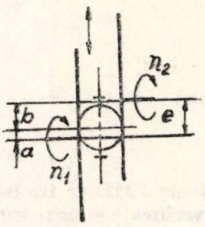


Fig. 1. — Variator frontal cu o singură bilă.

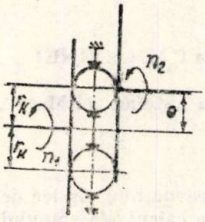


Fig. 2. — Variator frontal cu mai multe bile.

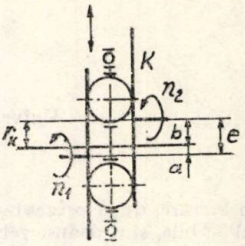


Fig. 3. — Variator frontal cu bile: varianta clasică.

O construcție detaliată a acestui tip de variator este prezentată în figura 4. Variatorul are 10 bile montate într-o colivie, care se poate deplasa radial între cele două discuri, montate excentric. Pentru determinarea raportului de transmitere se asimilează colivia cu cele 10 bile, ca o singură bilă, plasată în centrul coliviei, [8] [9] [13]; raportul de transmitere are valoarea stabilită mai sus, pentru variatorul cu o singură bilă.

Arborele de intrare se sprijină pe doi rulmenți radiali, momentul motor fiind transmis la discul conducător prin intermediul unui cuplaj 6; de asemenea, pe capătul arborelui de intrare este montată o articulație

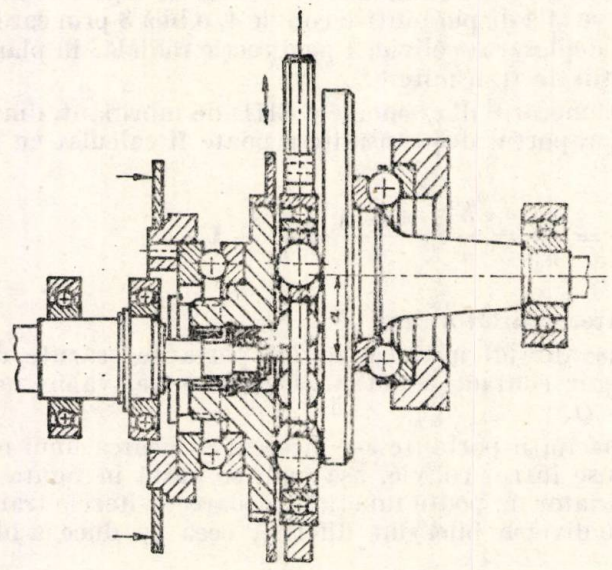


Fig. 4. — Construcția detaliată a unui variator frontal cu bile.

sferică 7, care permite corecta așezare a discului conducător pe întreaga gamă a raportului de transmitere. Forța de apăsare este creată cu ajutorul unui arc disc 8, astfel tensionat încît să permită obținerea forței totale de apăsare, iar în caz de suprasarcină variatorul să funcționeze ca un limitator de cuplu. Arborele de ieșire se montează pe un rulment radial și unul radial- axial, capătul de ieșire fiind prevăzut cu cuplaj elastic,

Este un fapt, unanim, recunoscut că, aprecierea unui variator EHD trebuie făcută nu numai prin prisma puterii pe care el o poate furniza, la ieşire, ci şi prin randamentul său. În acest sens, la o asemenea variantă clasică, s-au efectuat o serie de măsurători experimentale, [12], pe un stand, figura 5, iar graficele obţinute, figura 6, arată că variaţia puterii maxime transmise se corelează bine cu relaţiile propuse în [13]. Randamentul global al variatorului este relativ scăzut, el îmbunătăţindu-se pe măsura reducerii raportului de transmitere. Valoarea redusă a randamentului se datoreşte pierderilor mari din rulmenţi.

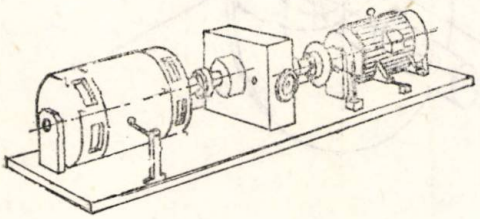


Fig. 5. — Stand pentru testarea variatoarelor frontale cu bile.

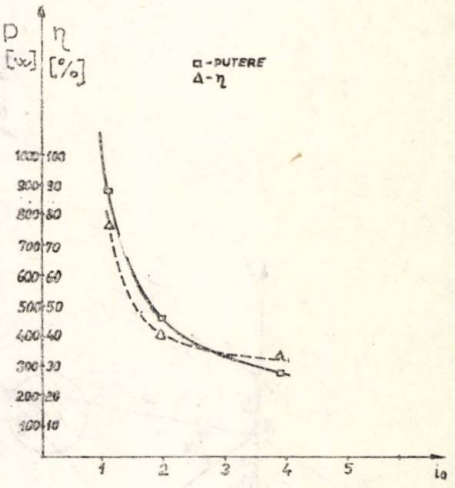


Fig. 6. — Variaţia puterii şi a randamentului la un variator frontal cu bile.

Pentru mărirea adecvată a randamentului este necesar, fie să se utilizeze lubrifianţi speciali de tracţiune, fie să se adopte soluţii constructive care să permită aplicarea sarcinii normale, direct, fără a afecta rulmenţii variatorului. [1] [12] [2]. De asemenea sînt necesare studii experimentale în vederea găsirii unor dimensiuni optime. ale coliviei, reducîndu-se în acest fel mişcarea parazită de spin. Rezolvarea acestor probleme înseamnă a optimiza funcţional şi constructiv variatoarele EHD de tip frontal cu bile.

CALCULUL SPINULUI IN VARIATOARELE FRONTAL CU BILE. MĂSURĂTORI EXPERIMENTALE

Pentru calculul spinului se consideră figura 7, cazul general de funcţionare, de unde s-a detaliat contactul dintre o bilă şi discuri figura 8; sub acţiunea sarcinii normale aceste contacte se realizează pe cercuri presupuse plane de rază ρ_{max}.

Fie M şi N două puncte interioare cercurilor de contact cu centrele în A şi respectiv în B, de vector de poziţie faţă de A şi B, $\overline{\rho}$ respectiv $\overline{\rho}'$, poziţionate unghiular faţă de axa x prin unghiurile φ şi ψ. Coordonatele punctelor M şi N sînt : $M(R\cos\alpha + \rho\cos\varphi$; $R\sin\alpha + \rho\sin\varphi$, $r)$ şi $N(R\cos\alpha + \rho\cos\psi$, $R\sin\alpha + \rho\sin\psi - r)$.

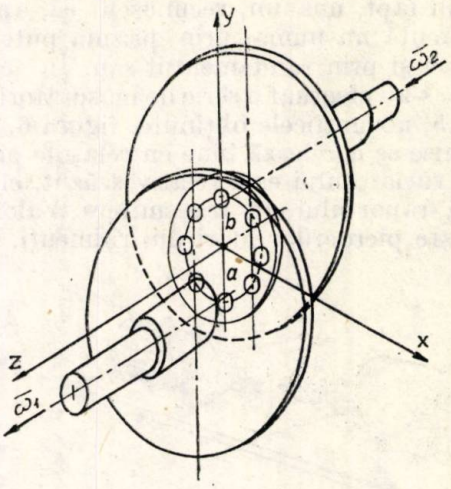


Fig. 7. Variator frontal cu bile; cazul general de funcționare.

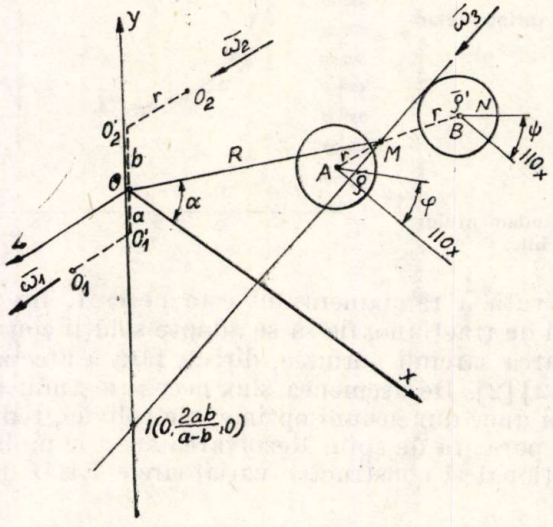


Fig. 8. — Reprezentarea detaliată a contactului dintre o bilă și discuri.

Viteza punctului M de pe discul 1, este :

$$\bar{V}_{M1} = \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1M} = -\omega_1(R\sin\alpha + \rho\sin\varphi + a)\,\bar{i} + \omega_1(R\cos\alpha + \rho\sin\varphi)\bar{j}.$$

Viteza punctului M de pe bilă este :

$$\bar{V}_{M3} = \bar{V}_C + \bar{\omega}_3 \times \overline{OM} = \bar{\omega} \times \overline{OC} + \bar{\omega}_3 \times \overline{OM} = (-\omega R\sin\alpha + r\omega_{3y} - \rho\omega_{3z}\sin\varphi)\bar{i} + (R\cos\alpha - r\omega_{3x} + \rho\omega_{3z}\cos\varphi)\bar{j} + (\rho\omega_{3x}\sin\varphi - \rho\omega_{3y}\cos\varphi)\bar{k}.$$

În caz particular, $\rho = 0$, se poate scrie :

$\bar{V}_{M10} = \bar{V}_{M30} + \bar{V}_{SLO}$, unde $\bar{V}_{SLO}$ este viteza de alunecare.

De aici rezultă :

$$\bar{V}_{SLO} = (-\omega_1 R\sin\alpha - \omega_1 a + \omega R\sin\alpha - r\omega_{3y})\bar{i} + (\omega_1 R\cos\alpha - \omega R\cos\alpha + - r\omega_{3z})\bar{j}.$$

Această viteză de alunecare, conţinută într-un plan perpendicular pe axa z, poate fi considerată ca fiind provenită dintr-o viteză unghiulară de alunecare ω_{SL} :

$$\bar{\omega}_{SL} = \bar{\omega}_{SL} \times \bar{i} + \bar{\omega}_{SL}\bar{j}.$$

Viteza de alunecare se scrie :

$$\bar{V}_{SLO} = \bar{\omega}_{SL} \times \overline{OA} = \bar{r}\omega_{SLy}\bar{i} - r\omega_{SL}\bar{j}.$$

Egalînd cele două forme ale vitezei de alunecare V_{SLO}, se obţine sistemul :

$$\begin{cases} \omega_1 R\sin\alpha - \omega_1 a + \omega R\sin\alpha - r\omega_{3i} = r\omega_{SLy} \\ \omega_1 R\cos\alpha - \omega R\cos\alpha + r\omega_{3x} - r\omega_{SLx}, \end{cases}$$

cu soluţia :

$$\omega_{3x} = \frac{R}{r}(\omega - \omega_1)\cos\alpha - \omega_{SL}$$

$$\omega_{3y} = \frac{R}{r}(\omega - \omega_1)\sin\alpha - \frac{a}{r}\omega_1 - \omega_{SLy}.$$

Viteza punctului M de pe bilă devine :

$$\bar{V}_{M3} = [-\omega R\sin\alpha - R(\omega - \omega_1)\sin\alpha - a\omega_1 - r\omega_{SLy} - \rho\omega_{3z}\sin\varphi]\bar{i} +$$

$$+ [\omega R\cos\alpha - R(\omega - \omega_1)\cos\alpha - r\omega_{SLx} + \omega_{3z}\cos\varphi]\bar{j} +$$

$$+ \left\{ \rho\left[\frac{R}{r}(\omega - \omega_1)\cos\alpha - \omega_{SLx}\right]\sin\varphi - \omega_{SLx} - \rho\left[\frac{R}{r}(\omega - \omega_1)\sin\alpha - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{a}{r}\omega_1 - \omega_{SLy}\right]\cos\varphi \right\} \bar{k}.$$

Aplicînd metodologia din, [1], [3] [10], pentru punctul M rezultă o viteză de spin :

$$\bar{A} = \rho(\omega_{3z} - \omega_1)(\sin\varphi\bar{i} - \cos\varphi\bar{j})$$

iar pentru N :

$$\bar{A}' = \rho'(\omega_2 - \omega_{3z})\ (\sin\varphi\bar{i} - \cos\varphi\bar{j}).$$

Dacă se consideră două puncte aflate pe cele două cercuri de contact situate pe aceeași normală la planele discurilor, $\rho = \rho'$, și $\varphi = \psi$, expresiile vitezelor de spin devin :

$$\bar{V}_{S1} = \bar{A} = \rho(\omega_{3z} - \omega_1)(\sin\varphi\bar{i} - \cos\varphi\bar{j})$$

$$\bar{V}_{S2} = \bar{A}' = \rho(\omega_2 - \omega_{3z})(\sin\varphi\bar{i} - \cos\varphi\bar{j}).$$

Din cinematica variatoarelor frontale cu bile, [8], s-a arătat că mișcarea relativă este formată dintr-o rotație dată de vectorul $(\sin\alpha\bar{i} - \cos\alpha\bar{j})$, în jurul axei coliviei cu viteza $R(\omega_2 - \omega_1)/2$, la care se adaugă mișcarea de transport cu viteza unghiulară $(\omega_2 + \omega_1/)2$.

Întrucît ambele mișcări au loc în jurul axei z, rezultă că viteza unghiulară a acestei mișcări este tocmai ω_{3z} :

$$\omega_{3z} = \frac{R}{2r}(\omega_2 - \omega_1) + \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2);$$

se observă că această viteză este egală pentru toate bilele din colivie, așa cum s-a presupus. Se obține :

$$\bar{V}_{S1} = \rho\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\left(\frac{R}{2r} + 1\right)(\sin\varphi\bar{i} - \cos\varphi\bar{j})$$

$$\bar{V}_{S2} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\left(1 - \frac{R}{2r}\right)(\sin\psi\bar{i} - \cos\psi\bar{j}).$$

Vitezele unghiulare ω_{S1} și ω_{S2} au expresiile :

$$\omega_{S1} = \frac{1}{2}\ \omega_2 - \omega_1)\left(\frac{R}{2r} + 1\right)$$

$$\omega_{S2} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\left(1 - \frac{R}{2r}\right).$$

Aceste viteze unghiulare sînt imprimate de către discuri, bilelor prin intermediul peliculelor EHD de lubrifiant. Dacă ele sînt egale ca mărime, fiind orientate în același sens, peliculele nu sînt solicitate la torsiune, decît de momentul de frecare bilă — colivie, care se neglijează. Dacă vitezele unghiulare de spin, ω_{S1} și ω_{S2} sînt diferite, apare răsucirea parazită a peliculei, care conduce la diminuarea capacității de transmitere a contactului. Dacă se neglijează momentul de frecare bilă-colivie, rezultă că cele două

momente trebuie să fie egale. Deformaţiile unghiulare ale peliculelor, deci vitezele lor unghiulare de spin, sînt în cazul acţiunii acelorași momente, invers proporţionale cu rigidităţile lor torsionale.

Prin analogie cu răsucirea barelor se poate afirma că, deoarece rigiditatea torsională este invers proporţională cu lungimea supusă răsucirii, vitezele unghiulare de spin sînt proporţionale cu grosimea peliculelor de lubrifiant. În mod automat bila se ajustează pentru a realiza echilibrul. Evident, forfecarea peliculei este nulă dacă:

$$\omega_{s1} = \omega_{s2} = 0,$$

ceea ce se obţine la raport de transmitere $i = 1$, cîn dare loc și relaţia:

$$\omega_{3s} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2).$$

Pe măsură ce se îndepărtează de această poziţie, diferenţa de viteză unghiulară de spin:

$$\Delta\omega_s = \omega_{s1} - \omega_{s2} = 2\omega_{3s} - (\omega_1 + \omega_2) = \frac{R}{r}(\omega_2 - \omega_1),$$

ce creşte, ca valoare absolută, și ca urmare creşte și forfecarea parazită a peliculei de lubrifiant.

Dacă se analizează aceste relaţii, se observă că:

a) în regim de reductor $\omega_2 < \omega_1$

$\omega_{s1} = -$

$\omega_{s2} = +$, întrucît paranteza $\left(1 - \frac{R}{2r}\right) < 0$;

b) în regim de multiplicator $\omega_2 > \omega_1$

$\omega_{s1} = +$

$\omega_{s2} = -$, întrucît paranteza $\left(1 - \frac{R}{2r}\right) < 0$,

ceea ce arată că în ambele situaţii are loc răsucirea parazită a peliculei de lubrifiant. Situaţia devine critică în al doilea caz, cînd contactul de pe discul condus al variatorului consumă putere, apărînd deci o scădere pronunţată a capacităţii de transmitere și randamentului transmisiei. Probab din acest motiv firma producătoare de asemenea transmisii, PIV, [13], n le recomandă pentru regim de multiplicator, de cît pînă la $i = 0{,}8$.

În scopul evidenţierii influenţei mișcării de spin asupra capacităţii de transmis a variatoarelor frontale cu bile s-a conceput, proiectat și realizat un stand similar cu cel din figura 5.

Rezultatele experimentale sînt prezentate în figura 9, pentru coeficientul maxim de tracţiune și figura 10, pent ru randament, funcţie de parametrul adimensional al vitezei de spin.

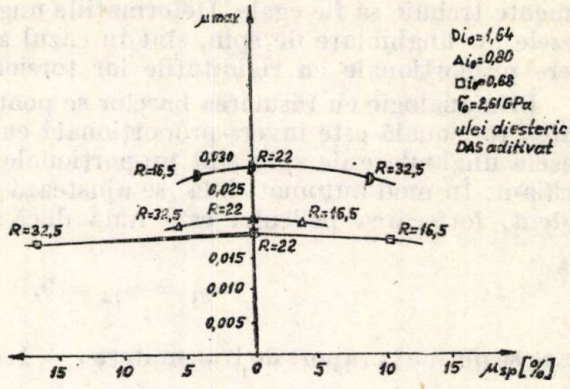


Fig. 9. Variația coeficientului maxim de tracțiune, cu parametrul adimensional al vitezei unghiulare de spin.

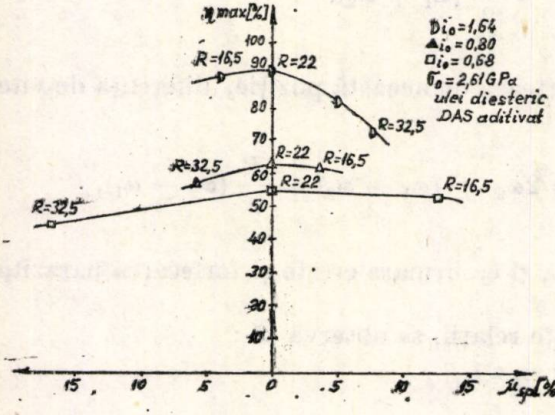


Fig. 10. — Variația randamentului cu parametrul adimensional al vitezei unghiulare de spin.

Se observă o scădere a coeficientului maxim de tracțiune cu creșterea spinului, scădere cu atît mai pronunțată cu cît variatorul funcționează în regim de multiplicator; ceea ce relațiile teoretice au indicat, s-a confirmat, adică coeficientul maxim de tracțiune, este atunci cînd $R = 2r$. Similar se întîmplă și în cazul randamentului.

VARIATOARE EHD DE TIP FRONTAL CU BILE OPTIMIZATE DIN PUNCT DE VEDERE FUNCȚIONAL ȘI CONSTRUCTIV

Noua variantă, destinată echipării mașinilor de rectificat elemente de rulmenți și dotat cu dispozitiv electronic pentru menținerea constantă a vitezei periferice a pietrei de rectificat, [11], nu mai are în structura sa rulmenți pentru preluarea forței de apăsare normală; aceasta se include direct prin elementele în contact, fără a afecta lagărele. Schema constructivă a acestui variator, realizat cu elemente tipizate de rulmenți este prezentată în figura 11. Pe arborele de intrare sînt montate, pe caneluri, două discuri de intrare 4. Pe arborele de ieșire 2 sînt montate trei discuri, dintre care unul fix și două alunecătoare, dispuse alternant cu discurile de intrare.

Între cele două discuri succesive, conducătoare sau conduse, este dispusă cîte o colivie cu bile 6, montată într-un rulmnet radial 7. Sarcina normală se realizează cu ajutorul arcului 3, montat pe arborele de ieşire. Raportul de transmitere se reglează prin deplasarea simultană a coliviilor cu bile, pe direcţie radială, în planul axelor. Este evident că forţa de apăsare se închide prin arborele de ieşire, bile şi discuri, fără a fi preluată de sulmenţi.

Puterea de ieşire precum şi randamentul variatorului, trasate la două tensiuni de contact, sînt prezentate în figurile 12, 13, 14 şi 15.

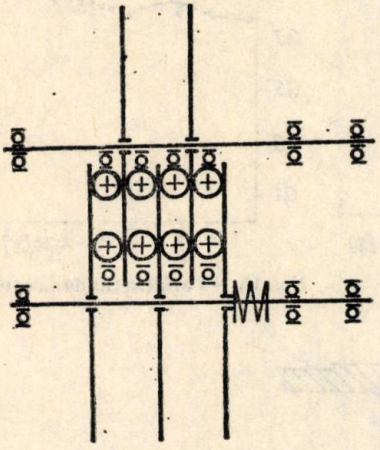


Fig. 11. Schema constructivă.

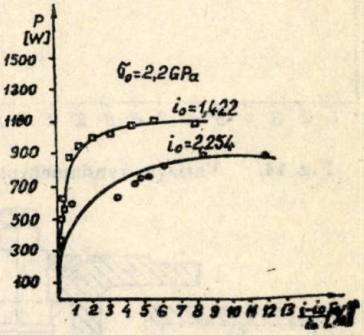


Fig. 12. Variaţia puterii.

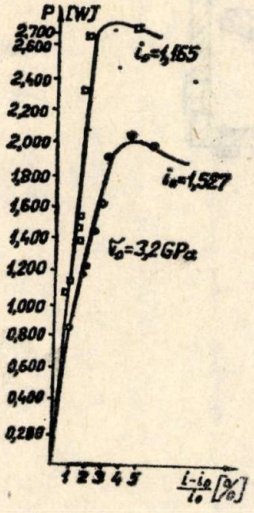


Fig. 13. — Variaţia puterii.

Din examinarea curbelor se pot trage următoarele concluzii :

— capacitatea de transmitere, apreciată prin puterea maximă de ieşire a variatorului, scade cu creşterea raportului de transmitere, respectiv scăderea turaţiei de ieşire, în concordanţă cu precizările teoretice ;

— presiunea normală de contact dintre bile şi discuri influenţează favorabil capacitatea de transmitere, în sensul măririi atît a pantei iniţiale, cît şi a puterii maxime transmise ;

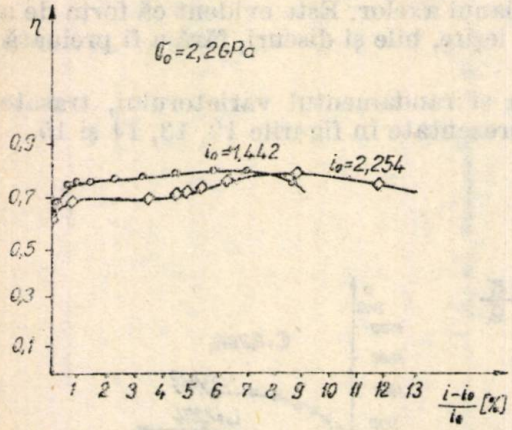


Fig. 14. Variaţia randamentului.

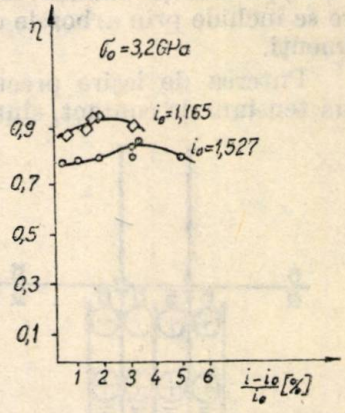


Fig. 15. — Variaţia randamentului.

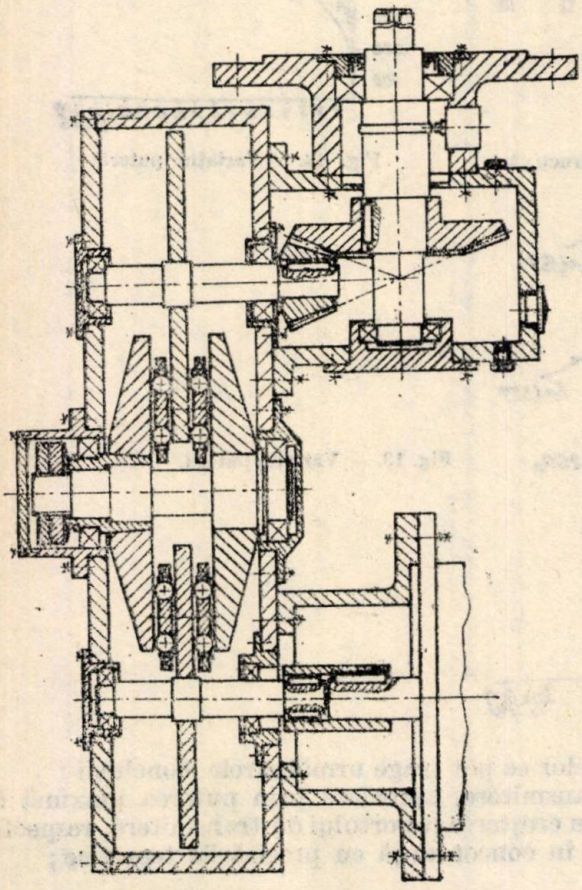


Fig. 16. — Variator frontal cu bile şi rulmenţi descărcaţi în două trepte.

— randamentul variatorului este substanţial îmbunătăţit, la tensiuni mici de contact capătă valori de 0,7 — 0,8, la presiuni mai mari se păstrează predominant peste 0,9.

În figura 16 este prezentat un varireductor, compus din trei trepte, primele două de tip frontal cu bile, cu rulmenţi descărcaţi, iar a treia dintr-o pereche de role conice cu dinţi drepţi, care are rolul ca, în baie să nu stea decît discul de intrare al variatorului, reducîndu-se astfel pierderile de putere prin barbotarea uleiului.

Modificarea raportului de transmitere se realizează prin deplasarea furcii care conţine coliviile cu bile, montate într-un rulment radial cu bile, pe direcţia liniei centrelor discurilor de pe cei trei arbori. Sarcina normală de apăsare se realizează cu ajutorul unor arcuri disc, pretensionate cu o piuliţă.

În vederea determinării capacităţii portante a variatorului şi a gamei de reglaj realizate, s-a conceput şi realizat un stand prezentat în figura 17, iar rezultatele experimentale sînt date în figurile 18, 19, 20, 21, primele două trasate la turaţia maximă iar ultimele la turaţia minimă.

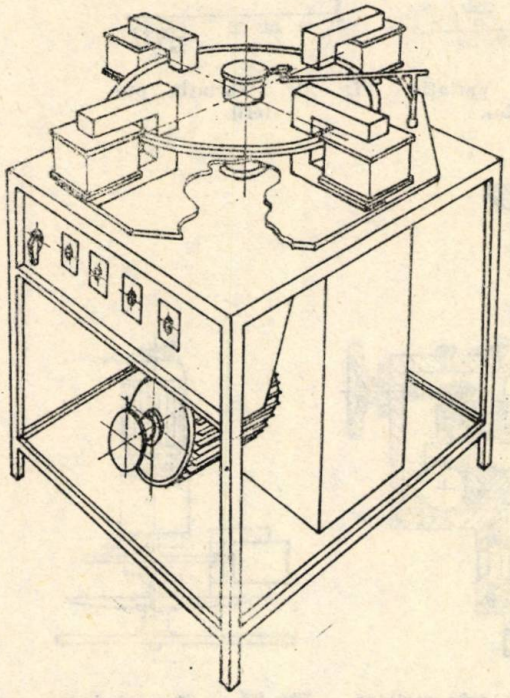


Fig. 17. — Standul pentru testarea variatorului.

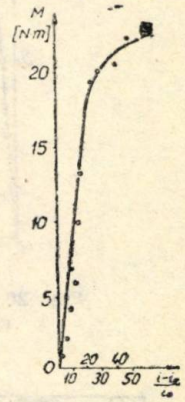


Fig. 18. — Variaţia puterii.

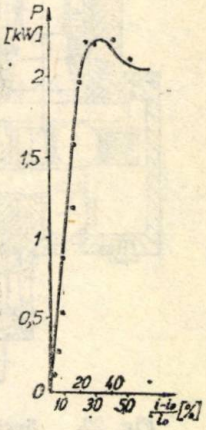


Fig. 19. — Variaţia puterii.

Varireductorul este brevet de invenție 89032/1985 [4], asigurînd o putere de 2,2 kW, gama de reglaj 5 iar turația de intrare 2800 rpm.

Pentru proiectarea unui variator cu o putere de intrare de 0,55 kW, turația de intrare 2880 rpm, gama de reglaj 5 și raportul maxim de reducere 14,4, s-a pornit tot de la ideea variatoarelor frontale cu bile, la care s-a înseriat o treaptă planetară cu raport constant de reducere, egal cu 2, figura 22, testat pe un stand, figura 23.

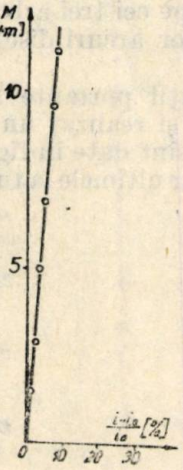


Fig. 20. — Variația cuplului.

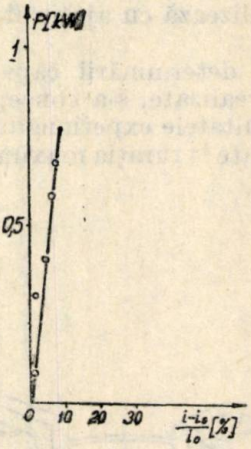


Fig. 21. — Variația puterii.

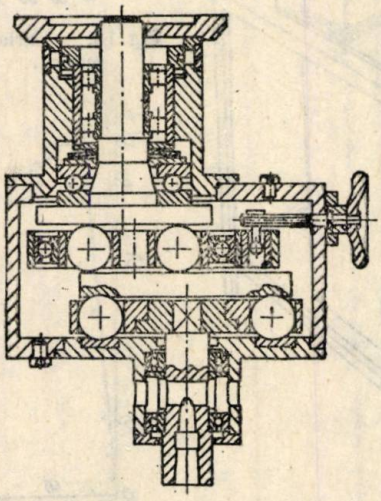


Fig. 22. — Secțiune prin variator.

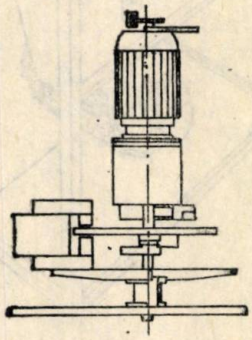


Fig. 23. — Standul de testat variatoare de mică putere.

Variatorul este format dintr-un arbore de intrare 1, montat pe rulmenți radiali cu role, al cărui inel exterior 3 se poate deplasa axial prin rotirea piuliței 4. Prin intermediul arcului disc 5 se creează forța de apăsare dintre elementele active ale variatorului.

Mișcarea de rotație se transmite de la arborele de intrare 1 prin intermediul bilelor 6 la discul flotant 7, și apoi la colivia 8, solidarizate cu arborele de ieșire 9 ; constructiv, variatorul a fost conceput ca motovariator.

Puterea maximă transmisă discului flotant în trepte cu raport variabil, are expresia cunoscută :

$$P_{1\max} = \mu_{\max} Qa\omega_1,$$

iar cea care s-ar putea vehicula de la acest disc la bilele transmisiei planetare este dată de :

$$P_{2\max} = \mu_{\max} Q \frac{\omega_1}{i_v} R,$$

unde i_v este raportul de reducere al treptei planetare și R raza cercului de dispunere a bilelor.

Încercările privind capacitatea de transmitere a variatorului s-au efectuat pe standul de testat variatoare de mică putere [7], Brevet de invenție 83277, și au constat din determinarea momentului și a puterii de ieșire din variator, pentru diverse rapoarte de transmitere, funcție de variația relativă a raportului de transmitere.

În figurile 24 și 25 sînt prezentate rezultatele experimentale obținute. Se observă că dacă la turații reduse de ieșire, variatorul se comportă conform așteptărilor, cu creșterea turației puterea sa de ieșire crește mai

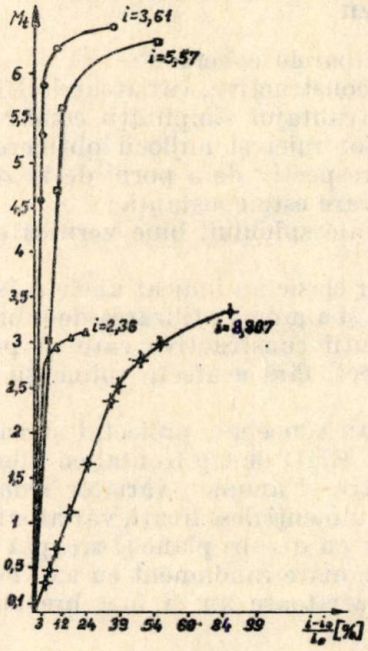


Fig. 24. Variația momentului de torsiune.

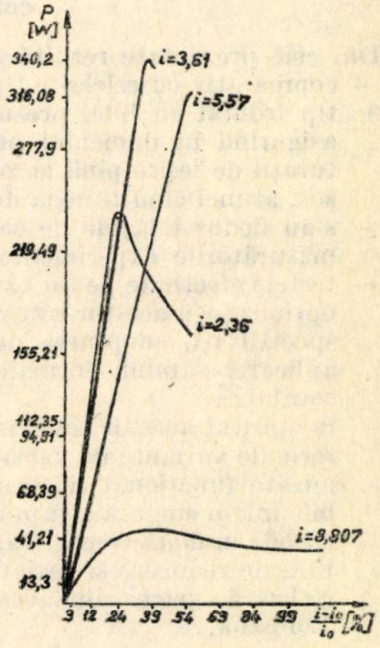


Fig. 25. Variația puterii.

încet decît se prevede, ba chiar, la turații mari scade. Aceasta se datorește pierderilor mari prin barbotarea uleiului, de către discul flotant și colivia planetară, care, sînt mult mai mari decît la un variator obișnuit, ele cresc cu pătratul vitezei.

Pentru echiparea ferăstrăului cu bandă orizontală FBO 350 produs de Intreprinderea de Mașini Unelte Suceava, s-a conceput, proiectat și realizat un variator de mare randament, figurile 26, 27.

Ca soluție de variator, s-a adoptat una de tip frontal cu bile, cu rulmenți descărcați, cu axă nematerializată, Brevet de invenție 89329/ /1986, [5]; discul conducător este poziționat pe 4 rulmenți, pe exteriorul lui fiind presată o coroană dințată.

Mișcarea este primită de la un pinion montat pe arborele de intrare al transmisiei care la rîndul lui o primește de la motorul electric.

De la discul conducător mișcarea este transmisă, prin intermediul coliviilor cu bile, discurilor de ieșire, montate pe arborele de ieșire, pentru eliminarea încovoierii din acesta s-au prevăzut și seturi de colivii pasive. Forța de apăsare este asigurată de un cuplaj cu autoapăsare, pretensionat cu ajutorul unui arc disc.

Modificarea raportului de transmitere este realizată cu ajutorul unui șurub, iar aducerea uleiului în zona de contact este asigurată cu ajutorul unei pompe, montate pe arborele de intrare. Raportul de transmitere al perechii pinion-coroană dințată asigură o peliculă de ulei de grosime suficientă la raport minim de transmitere. Variatorul este robust, comod în exploatare și întrucît se elimină rulmenții axiali și avînd încorporată o pompă, care aduce uleiul în zona de contact, randamentul poate atinge valori ridicate.

CONCLUZII

Din cele prezentate rezultă următoarele concluzii :

- comparativ cu celelalte tipuri constructive, variatoarele EHD de tip frontal cu bile, prezintă avantajul simplității constructive, asigurînd în domeniul puterilor mici și mijlocii obținerea de turații de ieșire pînă la zero, respectiv de a porni de la zero în sus, atunci cînd turația de intrare este constantă ;
- s-au dedus relațiile de calcul ale spinului, bine verificate și de măsurătorile experimentale ;
- testele efectuate pe un variator clasic au indicat unele măsuri de optimizare a acestor transmisii și anume : utilizarea de lubrifianți specializați, adoptarea de soluții constructive care să permită aplicarea sarcinii normale direct, fără a afecta rulmenții variatorului ;
- în spiritul acestor concluzii s-au conceput, proiectat și realizat o serie de variante de variatoare EHD de tip frontal cu bile, optimizate funcțional și constructiv și anume ; variator frontal cu bile într-o singură treaptă cu rulmenți descărcați, variator frontal cu bile în două trepte, variator cu discuri plane și treaptă planetară de reducere și variator de mare randament cu axă nematerializată ; parte din aceste variatoare au și fost brevetate în România.

Primit în redacție la 25 martie 1989

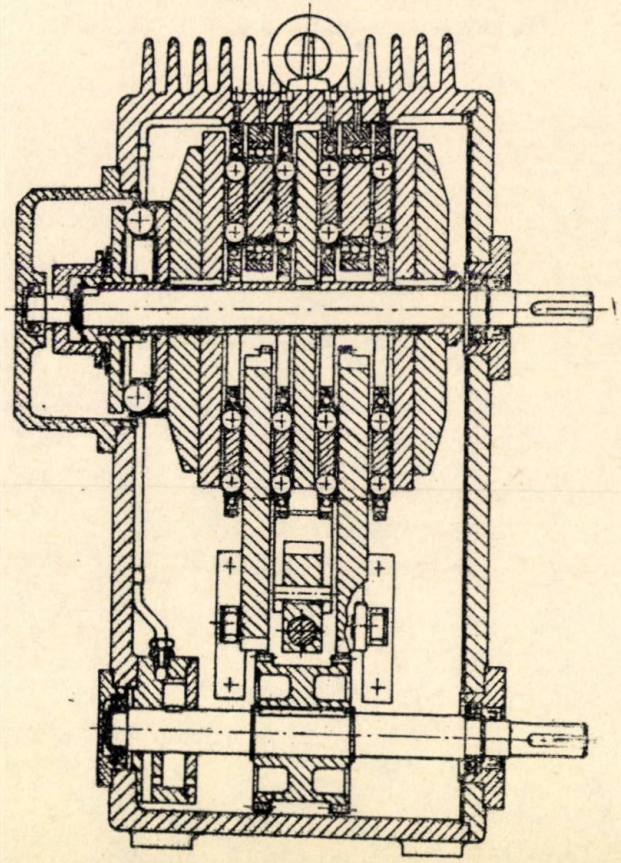


Fig. 26. — Secțiune prin variatorul de mare randament.

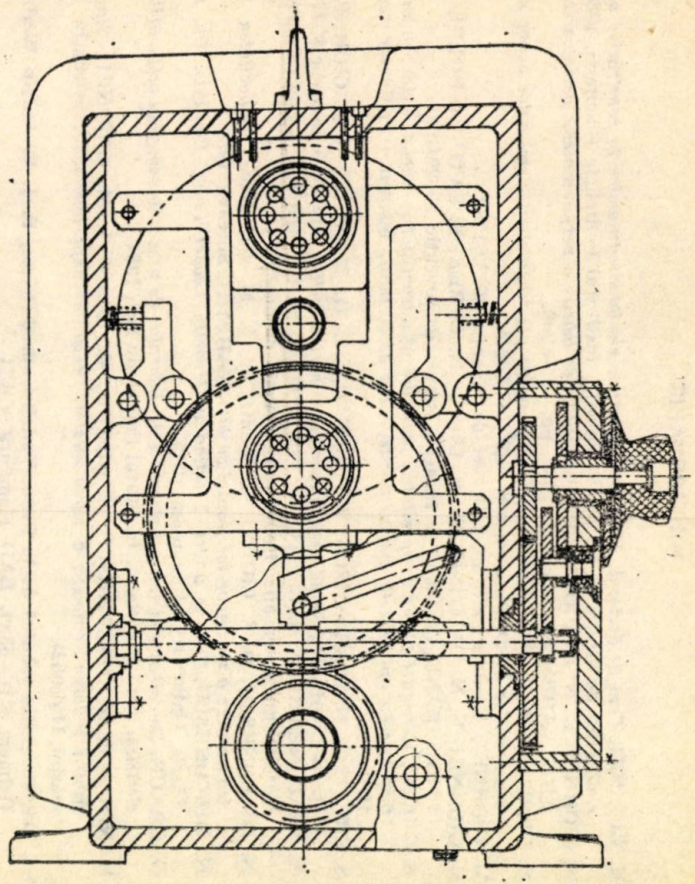


Fig. 27. — Secțiune prin variatorul de mare randament.

BIBLIOGRAFIE

1. I. M. CIORNEI, *Teză de doctorat, Utilizarea efectelor elastohidrodinamice în construcția variatoarelor de turație de tip frontal cu bile*, Institutul Politehnic București, 1986.
2. I. M. CIORNEI, E. N. DIACONESCU, *Posibilități de mărire a performanțelor variatoarelor EHD*, VAREHD 2, Suceava, 1982, pg. 195—208.
3. I. M. CIORNEI, E. N. DIACONESCU, *Unele aspecte ale cinematicii elementelor active ale variatoarelor EHD*, St. cerc. mec. apl., 47(1984).
4. I. M. CIORNEI, *Variator de turație*, Brevet de invenție 89032/1983.
5. I. M. CIORNEI, E. N. DIACONESCU, C. IACOB, N. OPREA, V. LATU, M. BOICU, I. UNGUREANU, *Variator de turație*, Brevet de invenție 89329/1986.
6. O. S. CREȚU, *Cercetări privind capacitatea portantă și durabilitatea variatoarelor cu role toroidale cu aplicații la mașini-unelte, Teză de doctorat*, Institutul Politehnic Iași, 1981.
7. O. S. CREȚU, E. N. DIACONESCU, V. P. SECARĂ, L. G. MANDICI, I. M. CIORNEI, M. N. CIOBANU, *Stand pentru încercarea variatoarelor*, Brevet de invenție 83277.
8. E. N. DIACONESCU, O. S. CREȚU, S. TIMOFTE, I. M. CIORNEI, *Cinematica variatoarelor frontale cu bile*, Revista Construcția de mașini, 11, (1982).
9. E. N. DIACONESCU, O. S. CREȚU, S. TIMOFTE, I. M. CIORNEI, *Capacitatea de transmitere a variatoarelor frontal cu bile*, VAREHD, Suceava, 1980.
10. E. N. DIACONESCU, *Pitting under Traction in Heavily Loadet Point Contacts. Ph. D. Thesis*, University of London, 1975.
11. A. G. GRAUR, *Contribuții la implementarea calculatorului de proces în comanda acționărilor electrice. Teză de doctorat*, Institutul Politehnic Iași, 1984.
12. L. MANDICI, E. N. DIACONESCU, A. GRAUR, M. CRASI, I. M. CIORNEI, *Stand pentru testarea completă a variatoarelor. Rezultate experimentale*,Construcția de mașini, 11 (1982).
13. * * * Documentație tehnică de la firma Variable speed Drives, P. I. V. Antrib Werber Reimers KD—6380. BAD Hamburg V.d.H.

DETERMINAREA TEORETICĂ A CARACTERISTICII UNIVERSALE A UNEI REŢELE DREPTE DE PROFILE

V. R. ANCUŞA

Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

În lucrare se prezintă o metodă de determinare pe cale teoretică a caracteristicii universale a unei reţele drepte de profile. S-a aplicat metoda propusă pentru reţele drepte de profile MHT 1—12% pentru care există date experimentale [4]. Se compară rezultatele obţinute teoretic cu datele experimentale, obţinîndu-se o bună concordanţă. Diferenţele care apar sînt explicate prin neglijarea influenţei stratului limită. Completarea caracteristicii universale a unei reţele drepte de profile cu curbele de egal unghi de incidenţă, permite delimitarea domeniului optim de funcţionare al reţelei.

INTRODUCERE

Construcţia rotorului maşinilor hidraulice axiale necesită cunoaşterea caracteristicilor energo-cavitaţionale ale reţelelor drepte de profile care alcătuiesc paleta acestuia [3]. Pentru a avea o imagine de ansamblu asupra performanţelor energo-cavitaţionale ale reţelei drepte de profile se apelează la caracteristica universală a unei reţele drepte de profile, definită şi introdusă în literatura de specialitate de către d-na prof. Viorica Anton [4, 5]. În figura 1 se prezintă schematic conţinutul unei asemenea caracteristici universale pentru un pas relativ t/l dat. Se observă că sînt reprezentate dependenţele $\delta u = \delta u(\beta_1)$ cu β_s ca parametru, peste care sînt suprapuse curbele de egal coeficient de portanţă C_{yr}, egal coeficient de depresiune maximă (deci de presiune minimă) de pe suprafaţa profilului $k_{p\,max}$ şi egal coeficient de pierderi ζ. În caracteristica universală originală mai sînt trasate şi curbele de egal coeficient al forţei tangenţiale C_T.

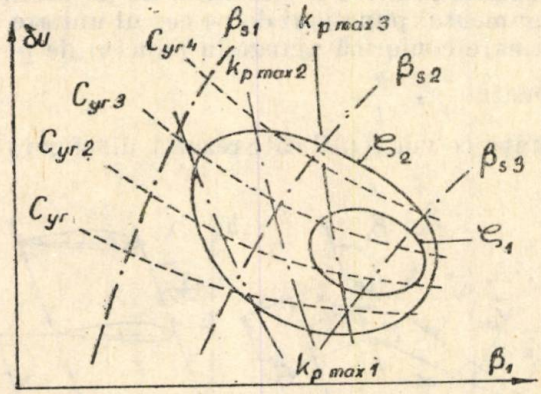


Fig. 1. — Schema unei caracteristici universale pentru o reţea dreaptă de profile

Determinarea pe cale experimentală a unei asemenea caracteristici universale este extrem de laborioasă, necesitînd în plus o dotare tehnică şi o metodică de lucru corespunzătoare.

Scopul prezentei lucrări este de a prezenta o metodă de determinare pe cale teoretică în prima etapă numai a curbelor caracteristice $\delta u = \delta u(\beta_1)$ cu β_s ca parametru, a curbelor de egal coeficient de portanţă C_{yr} şi de a compara rezultatele obţinute cu datele experimentale.

Într-o altă lucrare se va prezenta completarea curbelor stabilite anterior cu cele de egal coeficient de depresiune maximă şi de egal coeficient de pierderi.

ELEMENTE GEOMETRICE ŞI CINEMATICE ALE REŢELEI DREPTE DE PROFILE

Se consideră că profilul care este dispus în reţea este descris de următoarele ecuaţii parametrice [7, 1]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{l} &= \frac{1}{2}(1+\cos\varphi) \\ \frac{y}{l} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)] \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

unde x/l — abscisa relativă a unui punct de pe profil;
y/l — ordonata relativă a punctului de pe profil;
φ — argumentul punctului de pe cercul unitate care prin transformare conformă ajunge în punctul de pe profil de coordonate $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$.

Celelalte notaţii ce vor fi utilizate rezultă din figura 2.

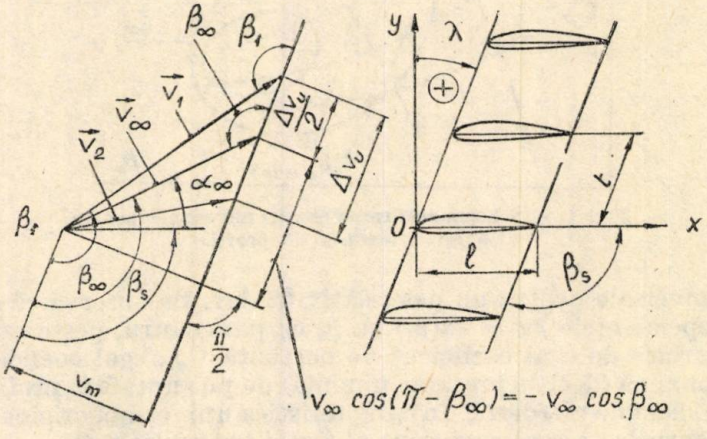


Fig. 2. — Notaţii utilizate

Se observă următoarele relații :

$$\beta_s = \frac{\pi}{2} + \lambda \tag{2}$$

și

$$\beta_\infty = \beta_s + \alpha_\infty \tag{3}$$

METODA PROPUSĂ PENTRU DETERMINAREA CARACTERISTICII UNIVERSALE

Se definește coeficientul de deviație al rețelei δu ca fiind :

$$\delta u = \frac{\Delta v_u}{v_m}. \tag{4}$$

Din figura 2 se observă că :

$$v_m = v_\infty \sin(\pi - \beta_\infty) = v_\infty \sin \beta_\infty \tag{5}$$

ar deviația este dată de [8] :

$$\Delta v_u = \frac{\Gamma}{t}. \tag{6}$$

În ipoteza mișcării potențiale a unui fluid nevîscos și incompresibil, d-l. prof. O. Popa a arătat că circulația Γ este dată de relația [7] :

$$\Gamma = 4 v_\infty t \frac{m}{M} (\gamma_0 \cos\alpha_\infty + \gamma_1 \sin\alpha_\infty) \tag{7}$$

unde

$$\gamma_0 = -\frac{1}{G} B \sum_{n=1}^{N} n a_n \tag{8}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{G}\left[1 + B \sum_{n=1}^{N} n b_n\right] \tag{9}$$

$$G = 1 + 2B\left[Q \sum_{n=1}^{N} n b_n - P \sum_{n=1}^{N} n a_n\right] \tag{10}$$

$$B = \sqrt{\frac{\pi l}{t} \cdot \frac{M}{m}} \tag{11}$$

$$P = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \sin(2\lambda) \tag{12}$$

$$Q = \left(\frac{m}{M}\right)^2 [m^2 + \cos(2\lambda)] \tag{13}$$

$$M = \sqrt{1 + m^4 + 2m^2 \cos(2\lambda)} \tag{14}$$

Cu m s-a notat parametrul funcţiei Weinig, deci mărimea care satisface ecuaţia :

$$\frac{l}{t} = \frac{2}{\pi}\left[\cos\lambda \operatorname{argth}\left(\frac{2m}{M}\cos\lambda\right) + \sin\lambda \operatorname{arctg}\left(\frac{2m}{M}\sin\lambda\right)\right] \tag{15}$$

Ţinînd cont de (5), (6), (7), (2) şi (3), coeficientul de deviaţie $\delta u(5)$ dobîndeşte următoarea expresie :

$$\delta u = 4\frac{m}{M} \cdot \frac{\gamma_0 \cos\alpha_\infty + \gamma_1 \sin\alpha_\infty}{\cos(\lambda + \alpha_\infty)} \tag{16}$$

Pentru a determina legătura între δu şi β_1 este suficient să se stabilească legătura între β_1 şi α_∞.

Din figura 2 rezultă :

$$\operatorname{tg}(\pi - \beta_1) = \frac{v_m}{v_\infty \cos(\pi - \beta_\infty) + \frac{\Delta v_u}{2}} \tag{17}$$

Ţinînd cont din nou de relaţiile (5), (6), (7), (3) şi efectuînd calculele se obţine :

$$\operatorname{tg}\beta_1 = -\frac{\cos(\lambda + \alpha_\infty)}{\sin(\lambda + \alpha_\infty) + \frac{2m}{M}(\gamma_0 \cos\alpha_\infty + \gamma_1 \sin\alpha_\infty)} \tag{18}$$

relaţie ce permite stabilirea corespondenţei între β_1 şi α_∞.

În această situaţie pentru o reţea dată (λ sau β_s, t/l, forma profilului bine precizate) dînd valori lui α_∞ se obţin valorile corespunzătoare pentru $\delta u(16)$ şi $\beta_1(18)$, deci tocmai dependenţa căutată $\delta u = \delta u(\beta_1)$ cu β_s sau λ ca parametru pentru un pas relativ t/l dat.

Pentru a suprapune curbele de egal coeficient de portanţă C_{yr} peste dependenţele anterioare se procedează astfel.

Expresia coeficientului de portanţă este :

$$C_{yr} = 8\frac{t}{l} \cdot \frac{m}{M} \cdot (\gamma_0 \cos\alpha_\infty + \gamma_1 \sin\alpha_\infty). \tag{19}$$

Notînd

$$A = \frac{C_{yr} M}{8\frac{t}{l} m} \tag{20}$$

se obține valoarea unghiului de incidență α_∞ care asigură coeficientul de portanță impus :

$$\alpha_\infty = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma_1 - \sqrt{\gamma_0^2 + \gamma_1^2 - A^2}}{A + \gamma_0}\right). \qquad (21)$$

Cu această valoare pentru α_∞ se calculează cu relațiile (16) și (18) δu și respectiv β_1, valori care asigură un C_{yr} impus. Dacă se lasă ca β_s, respectiv λ, să parcurgă domeniul ales se obține curba de egal C_{yr}.

REZULTATE OBȚINUTE

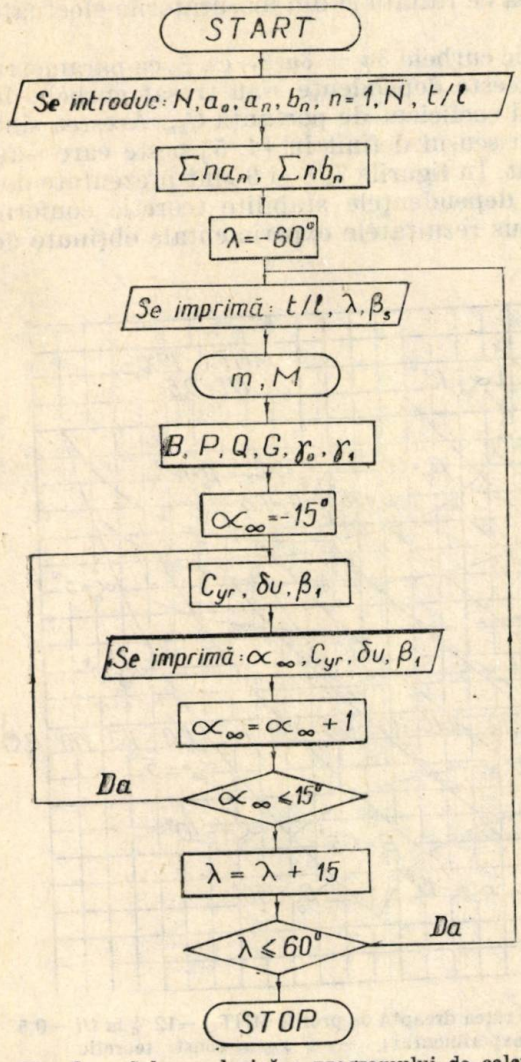


Fig. 3. — Schema logică a programului de calcul

Conform relațiilor indicate s-a realizat un prim program de calcul în limbaj BASIC pe un calculator HP 9845 S. Schema logică a acestui program este indicată în figura 3.

Verificarea metodei propuse s-a efectuat pentru rețele drepte de profile de tip MHT 1—12% pentru care există caracteristici universale determinate experimental de către V. Anton și prezentate în [4, 6].

Utilizînd coordonatele profilului MHT 1—12% indicate în [4] s-au calculat coeficienții polinomului trigonometric cu metoda expusă în [2] și cu programul elaborat în cadrul lucrării [1]. Valorile numerice ale acestor coeficienți sînt : $a_0 = 2{,}46110 \cdot 10^{-2}$, $a_1 = -1{,}12053 \cdot 10^{-3}$, $a_2 = -1{,}31550 \cdot 10^{-2}$, $a_3 = 9{,}90880 \cdot 10^{-4}$, $a_4 = 8{,}38004 \cdot 10^{-4}$, $a_5 = 1{,}29647 \cdot 10^{-4}$, $a_6 = 1{,}15109 \cdot 10^{-5}$, $b_1 = 5{,}38570 \cdot 10^{-2}$, $b_2 = -1{,}82392 \cdot 10^{-2}$, $b_3 = -1{,}49745 \cdot 10^{-3}$, $b_4 = -3{,}19221 \cdot 10^{-3}$, $b_5 = 2{,}73363 \cdot 10^{-5}$, $b_6 = 6{,}90730 \cdot 10^{-6}$.

S-au determinat teoretic dependențele $C_{yr} = C_{yr}(\beta_1)$ cu β_s ca parametru pentru $t/l = 0{,}5$; 0,75 și 1. Pe aceste

dependenţe s-au trasat şi curbele de egal unghi de incidenţă α_∞. Ele sînt prezentate în figurile 4, 5 şi 6. Se remarcă că în acest mod de prezentare se pot delimita domeniile posibile de funcţionare în realitate ale reţelelor de profile. Domeniile de funcţionare sînt delimitate de unghiurile de incidenţă la care apar desprinderile şi de valorile limită ale coeficientului de portanţă ce pot fi realizate.

Suprapus peste aceste dependenţe teoretice s-au prezentat rezultatele experimentale obţinute de către V. Anton [4]. Se remarcă faptul că se obţine o concordanţă bună între rezultatele teoretice şi cele experimentale. Diferenţele care apar se măresc cu micşorarea unghiului de instalare β_s şi a pasului relativ t/l. Aceasta se explică prin aceea că modelul teoretic corespunde fluidului nevîscos, iar în realitate fluidul este vîscos, efectul stratului limită fiind cu atît mai mare cu cît reţeaua este mai deasă şi unghiul de instalare mai mic, ceea ce rezultă şi din măsurătorile efectuate de către V. Anton [4, 6].

S-au determinat apoi teoretic curbele $\delta u = \delta u(\beta_1)$ cu β_s ca parametru pentru $t/l = 0{,}5$; 0,75 şi 1. Pe aceste dependenţe s-au trasat curbele de egal unghi de incidenţă α_∞ şi egal coeficient de portanţă C_{yr}. Acestea sînt de fapt caracteritici universale în sensul definit în [4, 5] peste care s-au suprapus şi curbele de α_∞ constant. În figurile 7, 8 şi 9 sînt prezentate dependenţele astfel trasate. Peste dependenţele stabilite teoretic conform metodicii de mai sus s-au suprapus rezultatele experimentale obţinute de

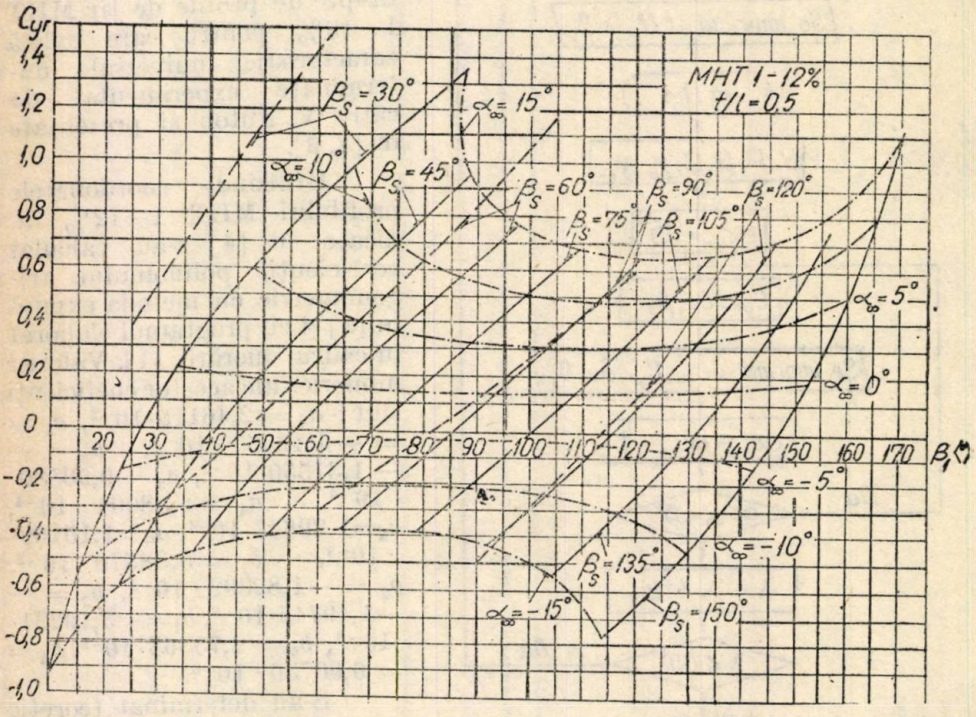


Fig. 4 — Caracteristica $C_{yr} = C_{yr}(\beta_1)$ pentru reţea dreaptă de profile MHT 1—12% la t/l—0,5
——— C_{yr} teoretic; – – – – C_{yr} experimental; — · — · α_∞ = const. teoretic

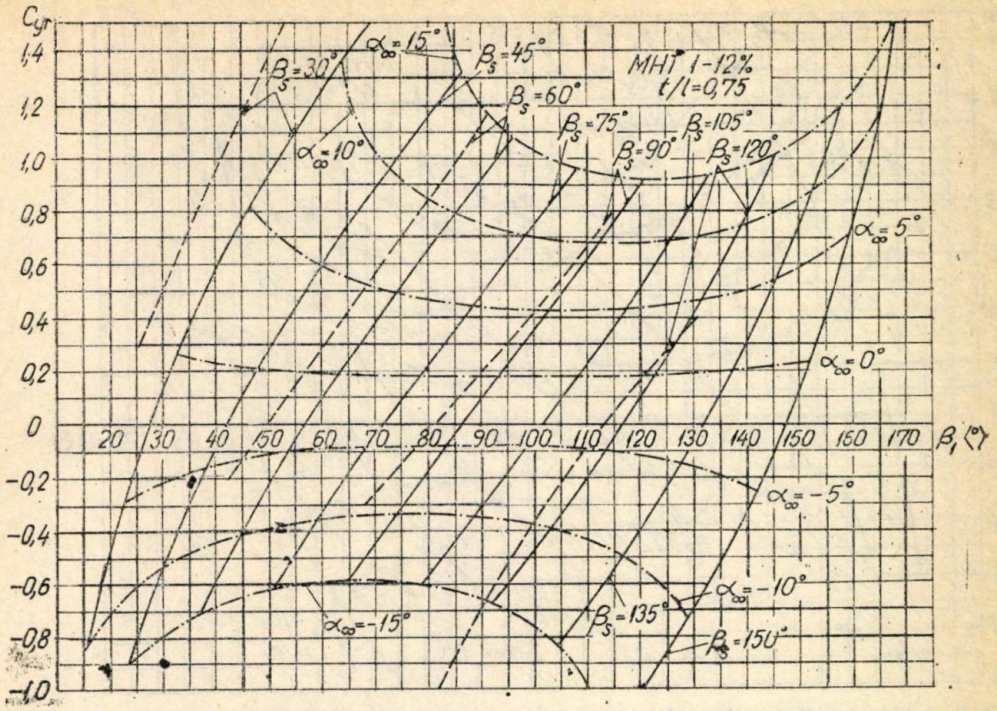


Fig. 5. — Caracteristica $C_{yr} = C_{yr}(\beta_1)$ pentru rețea dreaptă de profile MHT 1—12% la t/l=0,75
——— C_{yr} teoretic; — — — —C_{yr} experimental; —·—·α_∞ = const. teoretic

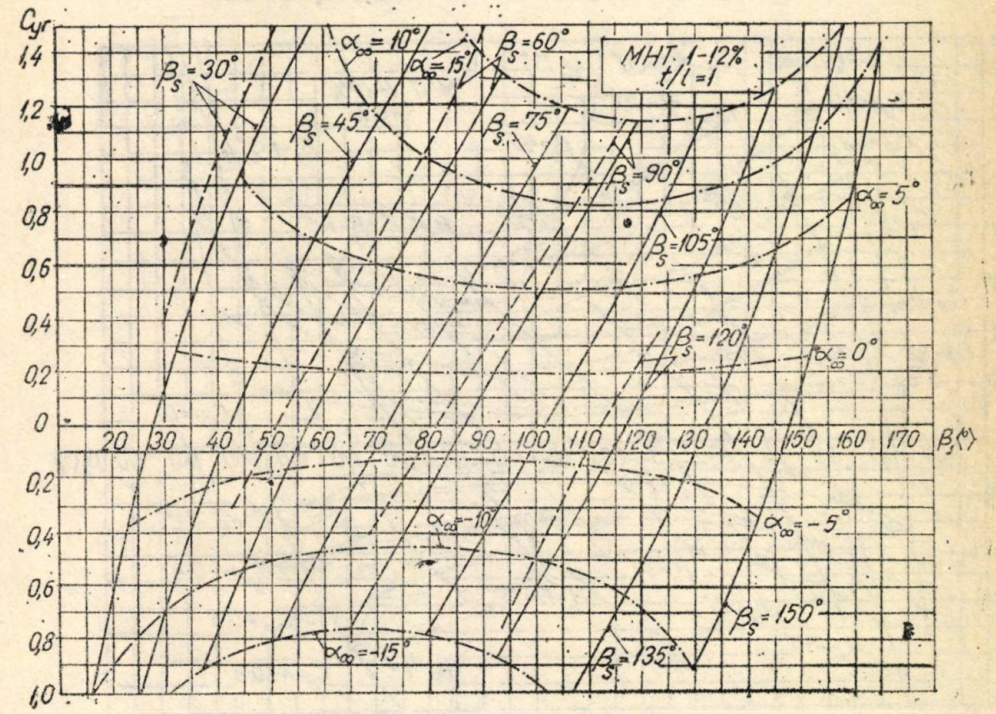


Fig. 6. — Caracteristica $C_{yr} = C_{yr}(\beta_1)$ pentru rețea dreaptă de profile MHT 1—12% la t/l=1
——— C_{yr} teoretic; — — — —C_{yr} experimental; —·—·α_∞ =iconst. teoretc

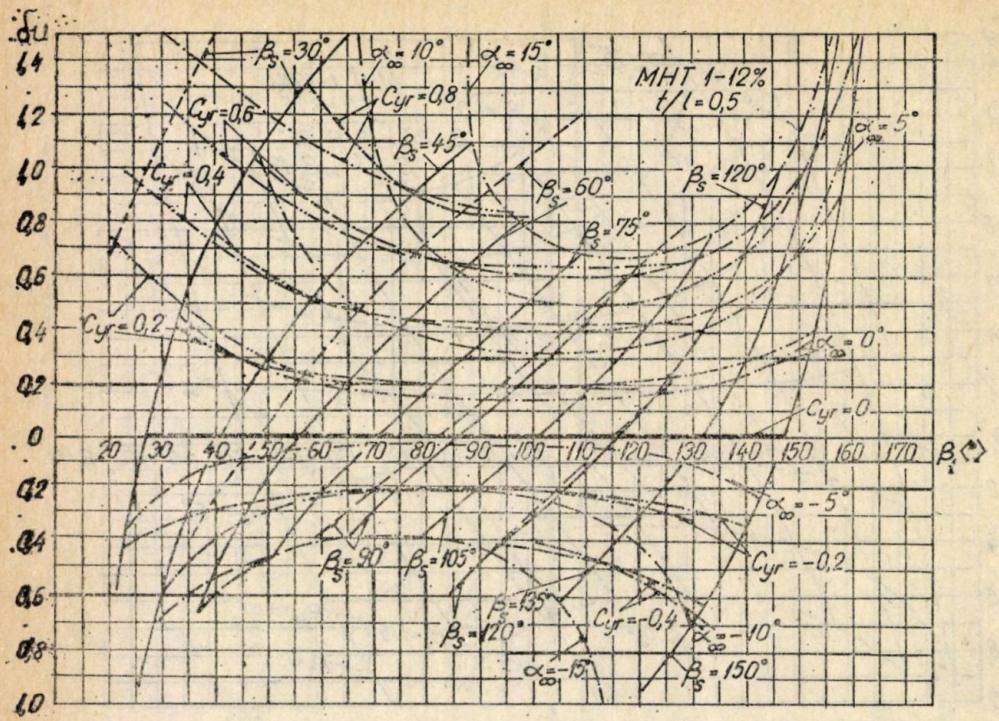


Fig. 7. — Caracteristica universală a reţelei drepte de profile MHT 1—12% la $t/l = 0{,}5$
——— δu teoretic; — · — · — · C_{yr} teoretic; — · — · α_∞ = const. teoretic
— — — — — δu experimental; · · — · · — · · — · · C_{yr} experimental

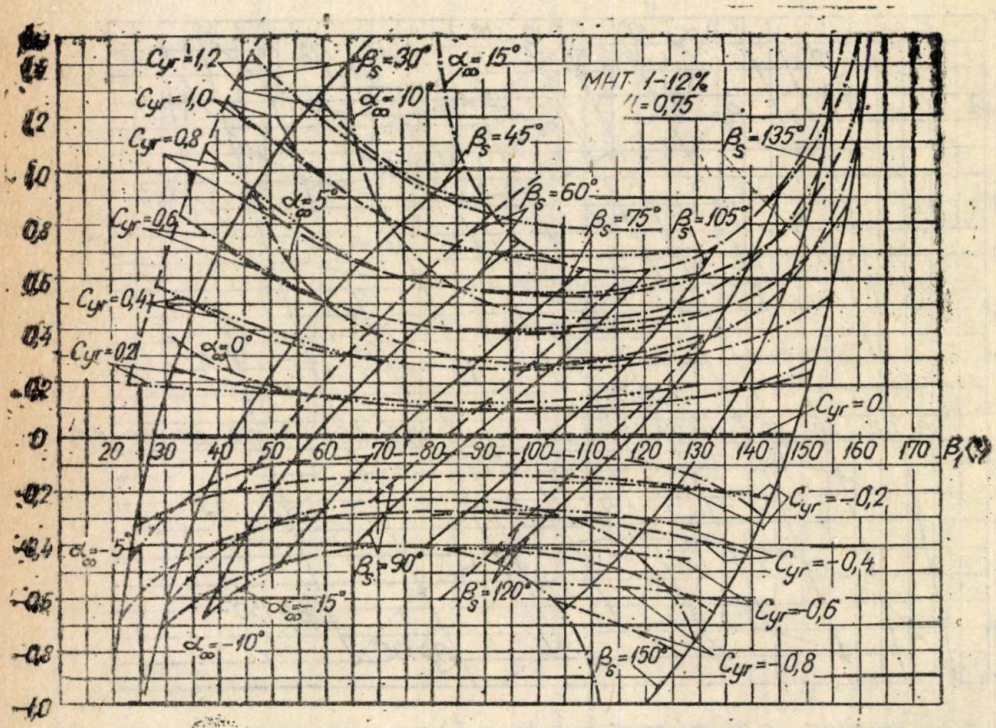


Fig. 8. — Caracteristica universală a reţelei drepte de profile MHT 1—12% la $t/l = 0{,}75$
——— δu teoretic; — · — · — · C_{yr} teoretic; — · — · α_∞ = const. teoretic
— — — — — δu experimental; · · — · · — · · — · · C_{yr} experimental

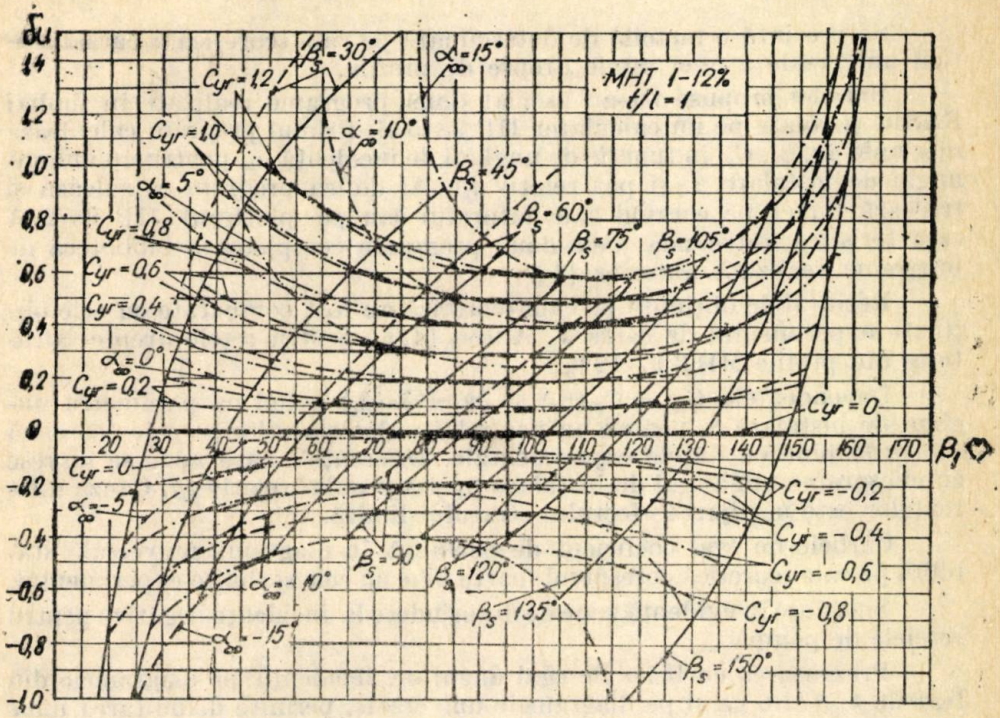


Fig. 9. — Caracteristica universală a rețelei drepte de profile MHT 1—12% la $t/l = 1$
——— δu teoretic; — · — · — · C_{yr} teoretic; — · — · α_∞ = const. teoretic
— — — — — δu experimental; · · — · · — · · — · · C_{yr} experimental

către V. Anton [4, 6]. Se remarcă o concordanță bună în privința curbelor $\delta u = \delta u(\beta_1)$ stabilite teoretic și experimental. Ca și anterior la curbele $C_{yr} = C_{yr}(\beta_1)$, diferențele se accentuează cu micșorarea unghiului de instalare β_s și a pasului relativ t/l, datorită aceluiași efect al stratului limită neglijat la modelul teoretic. Concordanța între curbele de egal coeficient de portanță stabilite teoretic și experimental se apreciază a fi foarte bună. Apar de asemenea puse clar în evidență zonele cu desprinderi la incidențe negative și $t/l = 0{,}75$ respectiv 1 în domeniul rețelelor de pompă ($\beta_s > 90^0$).

Prezența curbelor de egal unghi de incidență vine să delimiteze și aici domeniul de funcționare al rețelei de profile.

Pe ansamblu se apreciază o concordanță bună între caracteristicile stabilite teoretic și experimental.

Ținînd cont de complexitatea calculelor și a timpului necesar pentru trasarea diagramelor, s-a realizat un al doilea program care realizează direct calculul și reprezentarea grafică a caracteristicii universale fie pe ecranul calculatorului HP 9845 S, fie pe un plotter HP 9872 A.

CONCLUZII

Se prezintă o metodă de determinare pe cale teoretică a caracteristicii universale a unei reţele drepte de profile.

Metodei propuse i s-au asociat două programe realizate în limbaj BASIC şi rulate pe un calculator HP 9845 S. Primul program calculează mărimile δu, β_1, C_{yr} în funcţie de unghiul de incidenţă α_∞ pentru un anumit unghi de instalare β_s şi pas relativ t/l. Al doilea program calculează şi trasează direct pe ecranul calculatorului sau pe plotterul HP 9872 A caracteristica universală. Cele două programe completează biblioteca de programe realizată anterior [1].

Rezultatele obţinute pe cale teoretică au fost comparate cu cele obţinute experimental de către V. Anton [4, 6] pentru reţele drepte alcătuite din profile MHT 1—12%.

Dependenţele $C_{yr} = C_{yr}(\beta_1)$ şi $\delta u = \delta u(\beta_1)$ avînd ca parametru unghiul de instalare β_s pentru un pas relativ dat stabilite pe cale teoretică concordă bine cu datele experimentale. Diferenţele care apar se măresc cu micşorarea unghiului de instalare β_s şi a pasului relativ t/l. Cauza diferenţelor este neglijarea efectului stratului limită.

Curbele de egal coeficient de portanţă în diagrama universală stabilită pe cale teoretică corespund foarte bine cu cele stabilite experimental.

Sînt puse în evidenţă zone de desprindere la incidenţe negative pentru reţelele de pompă.

Prezentarea curbelor de egal unghi de incidenţă pe diagramele din figurile 4, 5 şi 6 ca şi pe diagramele universale, permite delimitarea unor domenii de funcţionare raţionale ale reţelei de profile.

Primit în redacţie la 20 martie 1991

BIBLIOGRAFIE

1. V. ANCUŞA, — *Studiul teoretic al caracteristicilor unui profil hidrodinamic izolat şi dispus în reţea*, Conferinţa Maşini Hidraulice şi Hidrodinamică, Timişoara 15—17. 11. 1990, vol. I, p. 27—34.
2. V. ANCUŞA, *Determinarea coeficienţilor polinomului trigonometric pentru un profil aerodinamic*, Buletinul I. P. „Traian Vuia" Timişoara, Seria Mecanică, **19 (33)**, 2 (1974).
3. I. ANTON, *Turbine hidraulice*, Facla, Timişoara, 1979, p. 121—136, 202—203.
4. V. ANTON, *Cercetări experimentale privind influenţa geometriei unor reţele de profile asupra caracteristicilor lor energetice şi cavitaţionale*, Teză de doctorat, I. P. „Traian Vuia", Timişoara, 1972.
5. V. ANTON, *Diagrame universale ale reţelelor plane de profile*, Buletinul I. P. „Traian Vuia" Timişoara, Seria Mecanică, **21 (35)**, 2 (1976).
6. V. ANTON, *Caracteristicile energetice ale reţelei de profile MHT 1—12% la $t/l = 0{,}75$*, Buletinul I. P. „Traian Vuia" Timişoara, Seria Mecanică, **17 (31)**, (1972).
7. O. POPA, *The Determination of a General Relation Between the Aerodynamic Properties of a Single Airfoil and Those of the Same Airfoil Arranged in an Arbitrary Cascade*, Proceedings of the Fourth Conference on Fluid Machinery, Budapest, September, 1972, p. 1015—1030.
8. GH. ZIDARU, *Mişcări potenţiale şi hidrodinamica reţelelor de profile*, Editura didactică şi pedagogică Bucureşti, 1981, p. —99—107.

ASUPRA VALABILITĂȚII MODELULUI DE FLUID INCOMPRESIBIL PENTRU STUDIUL STABILITĂȚII HIDRAULICE A CASTELELOR DE ECHILIBRU

M. POPESCU
Institutul de Cercetări Hidrotehnice din București

A. HALANAY
Universitatea din București

Studiul stabilității sistemelor hidraulice sub presiune cu funcționare automată prevăzute cu castele de echilibru, începînd cu Thoma și continuînd cu Escande și Jaeger se efectuează pornind de la modelul de fluid incompresibil.
În acest articol se arată că secțiunea Thoma constituie o condiție suficientă de comportare stabilă a sistemului la mici oscilații chiar dacă se pleacă de la modelul de fluid compresibil, furnizînd în acest fel un nou argument în favoarea modelului de fluid incompresibil.
Tratarea matematică a problemei se bazează pe evidențierea în sistemul de ecuații de propagare a unui parametru mic, ceea ce sugerează neglijarea dependenței spațiale a debitului de pe galeria de aducțiune.
O abordare analogă pentru o altă problemă a fost adoptată de Thirriot în lucrarea [3].

1. INTRODUCERE

Studiul stabilității sistemelor hidraulice sub presiune cu funcționare automată prevăzute cu castele de echilibru, începînd cu Thoma și continuînd cu Escande și Jaeger, se efectuează pornind de la modelul de fluid incompresibil [1], [2].

În acest articol se arată că secțiunea Thoma furnizează o condiție suficientă de comportare stabilă a sistemului la mici oscilații chiar dacă se pleacă de la modelul de fluid compresibil, furnizînd în acest fel un nou argument în favoarea modelului de fluid compresibil. Tratarea matematică se bazează pe evidențierea în sistemul de ecuații de propagare a unui parametru mic, ceea ce sugerează neglijarea dependenței spațiale a debitului de pe galeria de aducțiune. O abordare analogă, pentru o altă problemă a fost adoptată de Thirriot în lucrarea [3].

Legătura între modelul de fluid compresibil și modelul de fluid incompresibil a mai fost studiată de autori în alt context, punînd în evidență un tip special de mișcări nepermanente în sistemele hidraulice sub presiune [4].

2. MODELUL MATEMATIC DE FLUID COMPRESIBIL

Vom considera schema hidraulică fundamentală formată din rezervor, galerie de aducțiune, castel de echilibru și turbină (fig. 1). Pornim de la modelul matematic al mișcării nepermanente a apei în sistem :

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{gf}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + PQ^2(x,t) = 0$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 5–6, 1991, P. 449–455

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial t} + \frac{c^2}{gf}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$F\frac{dZ(t)}{dt} + Q_T(t) = Q(l,t)$$

$$H(0,t) = H\,; \quad H(l,t) = H + Z(t)$$

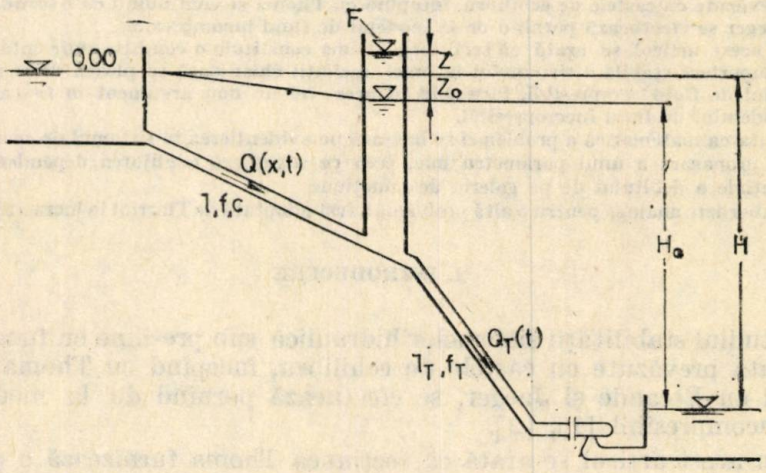


Fig. 1. — Schema unei uzine hidroelectrice de derivaţie prevăzute cu castel de echilibru.

Vom analiza funcţionarea automată a uzinei la putere constantă, ceea ce corespunde unei condiţii de forma :

$$\eta g Q_T(H(l,t) = N \tag{2}$$

Regimul permanent corespunzător va fi dat de relaţiile :

$$H(x) = H - PQ_0^2 x\,; \quad Z_0 = -PQ_0^2 l$$

$$\eta g Q_0 H_0 = N, \quad H_0 = H + Z_0 \tag{3}$$

deci :

$$\frac{\eta^2 g^2}{Pl} Z_0(H + Z_0)^2 + N^2 = 0 \tag{4}$$

Se va discuta stabilitatea regimului pentru care

$$Z_0 \in \left(-\frac{H}{3}, 0\right) \tag{5}$$

Liniarizînd modelul matematic în jurul regimului permanent și păstrînd pentru abateri aceleași notații, rezultă :

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{gf}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + 2PQ_0\,Q(x,t) = 0$$

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial t} + \frac{c^2}{gf}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

$$F\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{Q_0}{H_0}Z(t) + Q(l,t)$$

$$H(0,t) = 0\,; \quad H(l,t) = Z(t)$$

3. ADIMENSIONALIZAREA MODELULUI MATEMATIC

Se aleg următoarele relații de adimensionalizare pentru principalii parametrii ai mișcării :

$$y(\tau) = \frac{1}{Z_0}Z\left(\frac{\tau fl}{Q_0}\right)$$

$$h(\xi,\tau) = \frac{1}{Z_0}H\left(l\xi, \frac{\tau fl}{Q_0}\right) \qquad (7)$$

$$q(\xi,\tau) = \frac{1}{Q_0}Q\left(l\xi, \frac{\tau fl}{Q_0}\right)$$

Efectuînd calculele, ecuațiile adimensionale ale mișcării și condițiile la limită corespunzătoare scrise sub forma (6), rezultă de forma :

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{Q_0^2}{gf^2Z_0}\frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{2l}{Z_0}PQ_0q = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{c^2}{gZ_0}\frac{\partial q}{\partial \xi} = 0 \qquad (8)$$

$$Fy'(\tau) = \frac{fl}{H_0}y(\tau) + \frac{fl}{Z_0}q(1,\tau)$$

$$h(0,\tau) = 0\,; \quad h(1,\tau) = y(\tau)$$

4. APROXIMAREA PRIN MODELUL DE FLUID INCOMPRESIBIL

Efectuăm o rescriere a ecuațiilor mișcării cu ajutorul următoarelor constante fundamentale ale schemei hidraulice, [4]:

$$\varepsilon = \frac{2Q_0}{cf}; \quad k = \frac{cQ_0}{gf} \tag{9}$$

și rezultă:

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{k\varepsilon}{2}\frac{l}{Z_0}\frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{2l}{Z_0} PQ_0^2 q = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\varepsilon Z_0}{2kl}\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0$$

Observînd că pentru schemele hidraulice întîlnite în practica inginerească *) termenul $\left(\frac{\varepsilon Z_0}{2k}\right)$ are valori foarte mici (de exemplu $10^{-3} \div 10^{-4}$), acest lucru sugerează o schimbare a scării spațiale. Vom nota:

$$\frac{\varepsilon Z_0}{2k} = \hat{\varepsilon} \tag{11}$$

și vom lua:

$$h(\xi, \tau) = \hat{h}(\hat{\varepsilon}\,\xi, \tau)$$

$$q(\xi, \tau) = \hat{q}(\hat{\varepsilon}\,\xi, \tau) \tag{12}$$

Vor rezulta ecuațiile:

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \tau}(\hat{\xi}, \tau) + \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{\xi}}(\hat{\xi}, \tau) = 0$$

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{\xi}}(\hat{\xi}, \tau) + \left(\frac{kl}{Z_0}\right)^2 \frac{\partial \hat{q}}{\partial \tau}(\hat{\xi}, \tau) + \frac{2l}{Z_0 \hat{\varepsilon}} lQ_0^2\, \hat{q}(\hat{\xi}, \tau) = 0 \tag{13}$$

Integrăm ultima ecuație de la 0 la $\hat{\varepsilon}$ și deducem:

$$\hat{h}(\hat{\xi}, \tau) - \hat{h}(0, \tau) + \left(\frac{kl}{Z_0}\right)^2 \int_0^{\hat{\xi}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \tau}(\hat{\xi}, \tau)\, d\hat{\xi} +$$

$$+ \frac{2l}{Z_0} PQ_0^2 \frac{1}{\hat{\xi}} \int_0^{\hat{\xi}} \hat{q}(\hat{\xi}, \tau) d\hat{\xi} = 0 \tag{14}$$

*) De exemplu, pentru uzinele hidroelectrice Bicaz și Someș-Mărișelu valoarea acestui termen a rezultat 10^{-4} și respectiv 8×10^{-4}, [5].

Notăm :

$$\check{q}(\tau) = \frac{1}{\hat{\varepsilon}} \int_0^{\hat{\varepsilon}} \hat{q}(\hat{\xi}, \tau)\, d\hat{\xi} \tag{15}$$

şi admiţînd că $\hat{q}$ are derivate parţiale continue, ecuaţia (14) devine :

$$\frac{Q_0^2}{gZ_0 f^2} \check{q}'(\tau) + \frac{2l}{Z_0} PQ_2^2 \check{q}(\tau) + y(\tau) = 0 \tag{16}$$

Se adaugă ecuaţia :

$$Fy'(\tau) = \frac{fl}{H + Z_0} y(\tau) + \frac{fl}{Z_0} q(1, \tau) \tag{17}$$

care se poate scrie sub forma :

$$Fy'(\tau) = \frac{fl}{H + Z_0} y(\tau) + \frac{fl}{Z_0} \check{q}(\tau) + \frac{fl}{Z_0} [q(1, \tau) - \check{q}(\tau)] \tag{18}$$

Folosind relaţiile (12) şi (15) putem calcula :

$$q(1, \tau) - \check{q}(\tau) = \frac{1}{\hat{\varepsilon}} \int_0^{\hat{\varepsilon}} [\hat{q}(\hat{\varepsilon}, \tau) - \hat{q}(\hat{\xi}, \tau)]\, d\hat{\xi} \tag{19}$$

de unde rezultă :

$$|q(1, \tau) - \check{q}(\tau)| \leqslant \frac{L}{\hat{\varepsilon}} \int_0^{\hat{\varepsilon}} (\hat{\varepsilon} - \hat{\xi})\, d\hat{\xi} = \frac{L\hat{\varepsilon}}{2} \tag{20}$$

dacă soluţia q este Lipschitz în raport cu variabila spaţială. Putem considera astfel problema dată ca o perturbaţie a sistemului :

$$\begin{aligned} \check{q}' &= -2lP\, gf^2 \check{q} - \frac{gZ_0 f^2}{Q_0^2} y \\ y' &= \frac{fl}{F(H + Z_0)} y + \frac{fl}{FZ_0} \check{q} \end{aligned} \tag{21}$$

Începem prin a evidenţia condiţiile de stabilitate pentru acest sistem. Se scrie ecuaţia caracterisică, iar condiţiile de stabilitate implică :

$$2lP\, gf^2 - \frac{fl}{F(H + Z_0)} > 0, \text{ deci } F > \frac{1}{2g(H + Z_0)Pf} = F_{Th} \tag{22}$$

$$\text{şi } \frac{gf^3l}{FQ_0^2} - \frac{2l^2Pgf^3}{F(H+Z_0)} > 0, \text{ deci } \frac{H+3Z_0}{H+Z_0} > 0 \tag{23}$$

Am regăsit astfel formula clasică Thoma scrisă sub forma (22), pentru stabilitatea la mici oscilaţii a nivelului apei din castelul de echilibru, coeficientul P avînd semnificaţia din modelul de calcul (1).

În ce priveşte comportarea presiunilor din sistemul hidraulic considerat, aceasta rezultă din ecuaţiile de propagare în care se ia condiţia la limită $h(1, \tau) = y(\tau)$, iar pentru y avem evaluări bune pe baza modelului redus.

Raţionamentul efectuat poate fi luat ca punct de plecare într-o procedură de dezvoltare asimptotică a soluţiei problemei în care partea principală este dată de :

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \tau}(\hat{\xi}, \tau) + \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{\xi}}(\hat{\xi}, \tau) = 0$$

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{\xi}}(\hat{\xi}, \tau) + \left(\frac{kl}{Z_0}\right)^2 \frac{\partial \hat{q}}{\partial \tau}(\hat{\xi}, \tau) + \frac{2l}{Z_0 \hat{\varepsilon}} PQ_0^2 \hat{q}(\hat{\xi}, \tau) = 0 \tag{24}$$

$$\hat{h}(\hat{\varepsilon}, \tau) = y(\tau); \quad \hat{h}(0, \tau) = 0$$

unde y este calculat din modelul redus, corespunzător ipotezei de fluid incompresibil, avînd comportare exponenţială stabilă, dacă F este mai mare decît secţiunea Thoma.

NOTAŢII

H	— căderea brută a centralei ;
H_0	— căderea netă a centralei ;
$H(x, t)$	— înălţimea piezometrică instantanee, într-o secţiune curentă, din galeria de aducţiune faţă de nivelul apei aval de turbine ;
$Z(t)$	— cota instantanee a nivelului apei din castelul de echilibru, faţă de nivelul lacului de acumulare ;
$Q(x, t)$	— debitul instantaneu într-o secţiune din galeria de aducţiune ;
Q_0	— debitul centralei la funcţionarea de regim :
$Q_T(t)$	— debitul instantaneu al turbinelor ;
$\pm PQ^2$	— pierderea longitudinală de sarcină hidraulică pe galeria de aducţiune (P — constant), pozitivă pentru $Q > 0$;
l	lungimea galeriei de aducţiune ;
f	aria secţiunii transversale a galeriei de aducţiune ;
F	aria secţiunii orizontale a castelului de echilibru ;
N	puterea turbinelor ;
x	distanţa la o secţiune curentă pe galeria de aducţiune, măsurată în sensul de curgere ;
η	randamentul turbinelor ;
g	acceleraţia gravitaţiei ;
c	celeritatea pe galeria de aducţiune ;
y, h, q, ξ, τ	mărimi adimensionale respectiv pentru nivelul apei din castel, presiunea şi debitul pe galeria de aducţiune, lungime şi timp ;
ε, k	parametrii fundamentali de calcul.

Primit în redacţie la 4 mai 1990

BIBLIOGRAFIE

1. L. ESCANDE, *Méthodes nouvelles pour le calcul des chambres d'équilibre*, Edit. Dunod, Paris, 1950.
2. C. JAEGER, *Hydraulique technique*, Edit. Dunod, Paris, 1954.
3. C. THIRRIOT, *Considérations sur le calcul des surpressions dans les conduites provoquées par des manœuvres graduelles*, C. R. Acad. Sc. Paris, 260 (1965).
4. M. POPESCU, A. HALANAY, *Unsteady motions in the intermediary domain between slow and fast motions in hydraulic surge systems*, International Conference on Hydraulic Engineering Software, Portororoz, Yugoslavia, 1984.
5. M. POPESCU, D. ARSENIE, *Metode de calcul hidraulic pentru uzine hidroelectrice și stații de pompare*, Edit. tehnică, București, 1987.
6. A. HALANAY, *Differential equations. Stability, Oscillations, Time Lags*, (Chapter 1, Section 1.8), Academic Press, New York, London, San Francisco, 1966.

R. H. WAGONER, K. S. CHAN, S. P. KEELER (sub. red.), *Forming Limit Diagrams : Concepts, Methods and Applications* (Diagrame limită de formare : concepte, metode și aplicații), TMS—AIME, Warrendale, 1989, VI + 343 pagini, 209 figuri, 9 tabele, 617 ref. bibl.

Cartea reprezintă o culegere de articole de referință din domeniul diagramelor limită de formare (DLF). Aceasta reprezintă prima carte care tratează, în mod unitar, toate aspectele legate de metodele de definire și determinare a DLF precum și principalele modele teoretice pentru simularea acestora.

Cartea cuprinde 17 lucrări organizate în patru secțiuni tematice.

Prima secțiune „Metode și rezultate experimentale" cuprinde cinci lucrări. Dintre acestea prima (care are ca autor pe S. P. Keeler — inițiatorul metodei DLF în aprecierea deformabilității tablei) tratează originile și istoricul DLF. Celelalte lucrări prezintă cîteva metode originale de determinare experimentală a DLF pentru table metalice (metoda Bragard — bazată pe interpretarea grafică a deformațiilor — metoda benzilor de forfecare) precum și pentru structuri tip „sandwich" (oțel inoxidabil + aluminiu). De asemenea, este introdus un nou concept și anume acela de „diagramă limită de ondulare" (Buckling Limit Diagram) concept introdus în anul 1975 de J. Havranek (BHP Melbourne) și prezentat aici de P. F. Thomson.

A doua secțiune a volumului, intitulată „Analize Marciniak — Kuczynski" cuprinde trei lucrări. Prima dintre ele reprezintă o amplă sinteză a cercetărilor teoretice privind modelarea DLF utilizînd teoria Marciniak — Kuczynski (M — K) . Sînt prezentate diferențiat, modelele pentru zona pozitivă (DLF ($\varepsilon_2 > 0$) respectiv pentru cea negativă ($\varepsilon_2 < 0$) precum și diferitele influențe asupra formei și poziției DLF (tipul funcției de plasticitate — Hill, Hosford, Bassani — anizotropia, ecruisarea materialului etc.). Funcția de plasticitate a lui Budiansky este utilizată de Ferron și Molinari pentru simularea DLF, modelul propus fiind prezentat în cea de-a doua lucrare a acestei secțiuni. Ultima lucrare a secțiunii prezintă un model simplificat de modelare a DLF elaborat de Graf și Hosford.

Secțiunea a treia „Alte metode de calcul" cuprinde șase lucrări care tratează simularea DLF. Astfel, în acest scop, Burford și Wagoner utilizează metoda elementului finit iar Barata de Rocha elaborează un model M—K cu luarea în considerare a ecruisării anizotrope a materialuui. În lucrarea sa Gotoh folosește o funcție de plasticitate originală iar Chen și Gerdeen iau în considerare și efectul îndoirii asupra DLF. Choi, Gillis și Jones extind, în lucrarea lor, modelul Jones — Gillis (J—G) și pentru zona negativă ($\varepsilon_2 < 0$) a DLF. Ultima lucrare a acestei secțiuni prezintă un model matematic al DLF prin utilizarea teoriei de me mbrană și luarea în considerare a parametrilor reologici ai materialului.

Ultima secțiune „Influențe microstructurale" cuprinde trei lucrări. Prima lucrare prezintă un model M—K în care parametrii macroscopici sînt definiți pe baza celor microscopici (defectele interne, textura cristalografică) iar cea de-a doua influența parametrilor microscopici asupra instabilității plastice a materialelor predeformate. Wilson prezintă, în ultima lucrare, rezultatele unor cercetări experimentale privind influența structurii metalurgice asupra DLF.

Volumul de față reprezintă prima încercare din literatura de specialitate de abordare globală și unitară a problemelor legate de aprecierea deformabilității tablelor metalice utilizînd metoda DLF. La elaborarea volumului au participat, prin lucrările lor, 27 de specialiști din învățămîntul superior, din institute de cercetare și din întreprinderi reprezentînd cele mai puternice laboratoare în care se studiază deformabilitatea tablei. Se dă astfel posibilitatea unei priviri de ansamblu asupra stadiului actual și al principalelor direcții și tendințe de cercetare n domeniul DLF. Totodată rezultă și amploarea pe care au luat-o în utlimul timp cercetările privind utilizarea metodei DLF în aprecierea deformabilității tablei. Cartea este deosebit de utilă tuturor celor care se ocupă de elaborarea și prelucrarea prin deformare a tablelor metalice.

D. Banabic

ST. CERC. MEC. APL., TOM 50, NR. 5—6, 1991, P. 457—458

J. EIBL, (ed.), *Beton-Kalender 1991* (**Manual pentru beton 1991**), **Ernst und Sohn, Berlin** 1991, ed. 80, 1600 p.

Actuala ediție a manualului stă sub semnul introducerii, la sfîrșitul anului 1992, a normelor europene EUROCODE. Ca și în anii precedenți primul volum al lucrării se referă mai ales la materialele pentru beton armat și pentru beton precomprimat și la dimensionarea elementelor constructive supuse diferitelor solicitări. Se fac mereu comparații între normele germane și cele europene, astfel încît se obține o imagine bună a posibilităților de descriere a fenomenelor mecanice prin relații de calcul. Normele europene se remarcă prin tratarea unitară a betonului armat și a celui precomprimat și prin renunțarea la unele noțiuni depășite. Din păcate nu curpind încă rezultatele cercetărilor privind dimensionarea elementelor de formă oarecare prin structuri înlocuitoare alcătuite din bare.

În primul volum al manualului este tratată și statica structurilor din bare în teoria de ordinul I și în cea de ordinul II. Se prezintă metoda eforturilor și metoda deplasărilor în varianta clasică și în cea matriceală, inclusiv formularea ultimei metode prin elemente finite. Eficiența metodei elementelor finite crește dacă se utilizează matrice de transfer. Pentru prima dată variantele iterative ale metodei deplasărilor sub forma procedeului Cross și a procedeului Kani — foarte utile pentru verificarea calculelor electronice-sînt doar amintite. Capitolul se încheie cu formule pentru calculul grinzilor continue și al cadrelor.

Volumul doi debutează cu probleme legate de armonizarea regulilor tehnice în construcții ca și contribuția la crearea pieții europene comune în 1992. După reproducerea normelor germane privind terenul de fundație, fundațiile și betonul armat este redată versiunea engleză a normelor europene pentru beton armat și beton precomprimat. Eurocode 2. Lucrarea se încheie cu un capitol consacrat alcătuirii și calculului podurilor din beton armat și beton precomprimat.

Prin abordarea problematicii normelor europene pentru construcții în general și a celor masive în special și prin tratarea la zi a unor capitole importante din mecanica construcțiilor, actualul manual de beton prezintă un interes deosebit pentru proiectanții și cercetătorii în construcții.

R. Friedrich

D. PFAFFINGER, *Tragwerksdynamik* (Dinamica structurilor), Springer Verlag, Wien 1989, 335 p., 99 fig., 116 ref. bibl.

Calculatoarele electronice permit renunțarea la calculele simplificate cu acțiuni statice înlocuitoare în favoarea unor analize dinamice ale structurilor. Aceste analize sînt necesare și importante mai ales în cazul structurilor zvelte și ușoare supuse cutremurului și vîntului, dar și la fundații de mașini și la platformele marine expuse valurilor. Chiar și sub acțiuni statice obținîndu-se rar soluții analitice exacte, trebuind să se recurgă la soluții numerice, analiza dinamică apelează și mai mult la calculul electronic numeric.

Prezenta carte a profesorului elvețian își propune descrierea fenomenelor dinamice astfel încît formularea matematică a comportării structurilor să poată fi transpusă ușor pe calculator. Capitolul 2 se referă la noțiunile de bază ca principiile dinamicii, expresiile energetice și ecuațiile lui Lagrange. Problemele clasice ale dinamicii structurilor sînt exemplificate pe un oscilator cu un singur grad de libertate în capitolul 3. Sînt tratate vibrațiile proprii, mișcarea staționară, vibrațiile forțate și amortizarea.

Sistemele cu mai multe grade de libertate fac obiectul capitolului 4. Se prezintă atît discretizarea matematică prin diferențe finite a ecuațiilor comportării fizice cît și discretizarea fizică a structurilor continue prin elemente finite. Metodei elementelor finite îi este rezervat bineînțeles spațiul cel mai larg. Ținînd seama de rolul central al determinării valorilor proprii în dinamică, capitolul 5 se ocupă intens de această problemă.

Capitolul 6 se referă la vibrațiile forțate ale structurilor cu mai multe grade de libertate, punîndu-se accent pe metoda integrării în timp și pe metoda spectrelor de răspuns. Expunerea este concentrată mai ales asupra problemelor solicitării seismice a structurilor. După o introducere în studiul structurilor sub acțiuni stohastice în capitolul 7, capitolul 8 cuprinde probleme geometric și fizic neliniare în formulare Lagrange totală și actualizată.

Volumul limitat a impus rezumarea materiei la problemele de bază, cu referiri la literatura de specialitate. Lucrarea cuprinde și exemple de aplicare, din păcate însă doar nenumerice. Prin tematica abordată se adresează inginerilor și cercetătorilor din construcții, construcția de mașini și din aero- și astronautică. Prezentarea fiind clară și îngrijită, consultarea cărții este deosebit de plăcută și utilă.

R. Friedrich

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 50 199

INDEX ALFABETIC

	Nr.	Pag.
ANCUŞA, V. R., Determinarea coeficienţilor polinomului trigonometric pentru un profil aerodinamic simetric	3—4	197
ANCUŞA, V. R., Determinarea teoretică a caracteristicii universale a unei reţele drepte de profile	5—6	437
BERBENTE, C., v. MARINESCU, G.	3—4	185
BRATU, P., Stabilirea ecuaţiilor de mişcare pentru rigidul cu legături elastice. Vibraţii libere	1—2	53
BRIŞAN, C., v. HANDRA-LUCA, V.	5—6	329
BUZDUGAN, GH., Dinamica sistemului maşină-fundaţie-sol : o trecere în revistă a stadiului actual al problemei	1—2	115
BUZESCU, FLORINA LILIANA, VIERU, D., FETECĂU, CORINA, Optimizarea funcţionării unui manipulator de clupe la o maşină de pieptănat fuior de in şi cînepă	3—4	285
CHERGUI, S., Analiza dinamică a masturilor de foraj la operaţii de manevră	3—4	253
CHERGUI, S., v. POSEA, N.	5—6	349
CHIUJDEA, CORNELIA, GEORGESCU, ADELINA, Efectul Toms.	5—6	305
CIOCLOV, D., Concepte probabilistice în mecanica ruperii materialelor	1—2	101
CIORNEI, I. M., Optimizarea variatorului toroidal din punct de vedere al spiculuí.	3—4	241
CIORNEI, I. M., Optimizarea funcţională constructivă a variatorului EHD de tip frontal cu bile	5—6	421
CONSTANTINESCU, V. N., DĂNĂILĂ, S., O formă unitară privind utilizarea metodei singularităţilor pentru simularea mişcărilor subsonice şi supersonice.	3—4	155
DĂNĂILĂ, S., v. CONSTANTINESCU, V. N.	3—4	155
ENE, GH. I., IORDACHE, GH., Determinarea puterii necesare acţionării morilor pendulare	1—2	83
ENE, GH. I., Stabilirea parametrilor constructivi şi funcţionali ai granulatoarelor cu taler	3—4	231
FETECĂU, CORINA, v. BUZESCU, FLORINA LILIANA	3—4	285
GĂLEŢUŞE, S., Metodă analitică de proiectare a elicei tractive	3—4	213
GĂLEŢUŞE, S., Studiul aerodinamic analitic al elicei eoliene cu ax orizontal	5—6	323
GEORGESCU, ADELINA, Modelarea matematică în mecanica fluidelor	3—4	295
GEORGESCU, ADELINA, v. CHIUJDEA, CORNELIA	5—6	305
HALANAY, A., v. POPESCU, M.	5—6	447
HANDRA-LUCA, V., TIUCĂ, Studiul geometric al angrenajului melcat globoidal	1—2	89
HANDRA-LUCA, V., BRIŞAN, C., Analiza cinematică a unui robot biped : problema directă.	5—6	329
HOMENTCOVSCHI, D., JUDE, L., Asupra reţelelor circulare de profile	1—2	19
IORDACHE, GH., v. ENE, GH. I.	1—2	83
IORACHE, GH., Dimensionarea melcului maşinii de extrudere (disc-melc)	5—6	365
JUDE, L., v. HOMENTCOVSCHI, D.	1—2	19
KALMUŢCHI, P., v. URSU, I.	3—4	273

LUPU, M., Generalizarea și studiul modelului Jukovski-Roshko-Eppler în cazul jeturilor axial simetrice utilizînd funcțiile (P, Q) analitice . . . . . 3—4 167
MARINESCU, G., BERBENTE, C., O metodă pentru calculul curgerilor transonice în jurul profilelor aerodinamice folosind două baze de aproximare 3—4 185
PAVEL, A., Analiza prin tensometrie electrorezistentă a unui recipient cilindric orizontal, cu funcție de vas separator, distorsionat prin termocolaps . . . 5—6 391
PĂRĂUȘANU, I., Predicția efectului modificărilor structurale prin analiză modală . . . . . 1—2 67
PĂUNESCU, S., v. URSU, I. . . . . 3—4 273
POPESCU, M., HALANAY, A., Asupra validității modelului unui fluid incompresibil pentru studiul stabilității hidraulice a castelelor de echilibru . . 5—6 447
POSEA, N., ȚILIMPEA, I., CHERGUI, S., Vibrațiile axiale ale garniturilor de foraj . . . . . 5—6 349
RIGO, PH., Metoda marginilor rigidizate . . . . . 5—6 375
STAICU, ȘT., Model tensorial în mecanica sistemelor . . . . . 1—2 3
TIUCĂ, T. L., v. HANDRA-LUCA, V. . . . . 1—2 89
TRANDAFIR, PAULA-MANUELA, Studiul asimptotic al unei probleme de perturbații singulare . . . . . 1—2 13
ȚĂPOSU, I., Determinarea răspunsului avionului la comenzi în manevre neliniare arbitrare cu variații mici de altitudine și viteză . . . . . 1—2 25
ȚILIMPEA, I., v. POSEA, N. . . . . 5—6 349
URSU, I., PĂUNESCU, S., KALMUȚCHI, P., Simularea numerică a funcționării unităților electrohidraulice de acționare pentru pilotul automat . . . 3—4 273
VIERU, D., v. BUZESCU, FLORINA LILIANA . . . . . 3—4 285

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1846